COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS

A Practical Approach

计算流体力学

——从实践中学习

ISBN 978-7-81102-752-5

定价：38.00元

计算流体力学

——从实践中学习

Computational Fluid Dynamics

A Practical Approach

〔澳〕Jiyuan Tu　Guan Heng Yeoh　〔美〕Chaoqun Liu　著

王晓冬　译

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

计算流体力学：从实践中学习 /（澳）屠基元等著；王晓冬译. —沈阳：东北大学出版社，2009.10

书名原文：Computational Fluid Dynamics：A Practical Approach

ISBN 978-7-81102-752-5

Ⅰ. 计…　Ⅱ. ①屠…　②王…　Ⅲ. 计算流体力学—流体力学　Ⅳ. O351.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 179507 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com

印 刷 者：沈阳市市政二公司印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm×235mm
印　　张：21.5
字　　数：474 千字
出版时间：2009 年 10 月第 1 版
印刷时间：2009 年 10 月第 1 次印刷
责任编辑：刘乃义
封面设计：唐敏智
责任校对：郎　坤
责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-752-5　　定　价：38.00 元

译者序

本书译自英国 Elsevier 出版社于 2008 年出版的《COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS—A Practical Approach》. 该书是澳大利亚墨尔本皇家理工大学（RMIT UNIVERSITY）屠基元（Jiyuan Tu）教授等著者长期科研和教学工作的总结和升华. 正如题目给出的那样，本书是将 CFD 基本理论、CFD 软件操作和 CFD 最新研究成果有机结合的具有很强实用性的一本新书.

译者于 2006 年 10 月至 2007 年 10 月期间作为教育部公派访问学者，到 RMIT 大学屠教授的科研团队从事多相流动的学习和合作研究，参与了澳洲自然科学基金项目，从屠教授那里学到了很多东西. 在听取屠教授为本科生开设的 CFD 课程时，开始接触本书原著的初稿. 通过学习，译者认为它是一本独具特色的 CFD 书. 国内关于 CFD 的中文书籍虽然已经不少，但或着重计算流体力学的基本理论，或围绕 CFD 软件的使用展开，因此确实需要这样一本适于 CFD 教学和 CFD 初学者的书. 基于此认识，译者在澳洲期间即着手对原著的翻译工作.

随着翻译工作的深入，本项工作之浩繁、任务之艰难常使译者有力不从心之感. 好在有屠教授的大力支持和热情帮助，译稿亦得到原著者屠基元教授和刘超群教授的校对，才有本书的出版.

本书的第 3 章、第 4 章是译者在刘超群教授对肖国庆老师初译稿详细修订之上的补充和完善. 肖国庆老师对本书上述章节的翻译付出了大量的富有成效的工作.

本书的出版得到了英国 Elsevier 出版社的版权许可和原著者的授权，并得到了东北大学的资助. 本书的出版得到了东北大学出版社的高度重视，编辑们付出了辛勤的汗水，在此表示衷心的感谢.

由于CFD发展很快，涉及的应用领域很多，新的名词和术语不断出现，普遍缺少对应的中文翻译，这给译者的翻译工作带来了很多困难和挑战. 译者在翻译不同专业领域各种名词和术语时，业已考虑国内现有的通行译法，并在文中给出了相应的英文原文.

由于译者CFD理论和应用水平的局限，加之原著中的某些内容确已超出译者研究所及，译文中的不妥之处恳请读者批评指正.

译　者

2009年5月于东北大学

原著前言

计算流体力学（CFD），过去只是学术研究、博士后或相关专业专家涉及的领域，现正逐步成为许多大学毕业生们的研究工具，他们将 CFD 应用于工程研究、产品开发和设计等方面. CFD 在处理复杂流动和传热问题中的作用越来越重要. 从事实际工作的工程师面临着来自流体流动和传热问题的不断挑战，对于缺乏流体力学和传热学基础知识以及基本概念的工程师，CFD 的学习和训练是相当艰苦的历程.

如今的工程师越来越趋向使用一些 CFD 商业软件来解决实际问题，这些商业软件有 ANSYS-CFX，ANSYS-FLUENT 以及 STAR-CD 等. 如果没有适当的指导就使用这些软件，犹如没有受过训练的士兵能对手中的先进武器运用自如是不可能的一样. 通过软件可能获得各种计算结果，但如果训练不当，就可能导致诸多错误的分析，这样危害会更大. 因此，进行系统的 CFD 知识和应用方面的培训显得尤为重要. 此外，使用者可以从经常出现的错误中逐渐了解 CFD 软件的缺陷. 然而，应用环境的千差万别严重制约了对 CFD 软件这些缺陷的发现. 大量的 CFD 使用者拥有高性能的计算机，他们在自己的实践中正在快速扩大 CFD 的应用范围.

本书的目的是为现在和将来使用 CFD 的读者提供一本合适的教材. CFD 是一门与数学相关的复杂学科，本书旨在为读者提供通俗易懂的 CFD 基础理论、基本技术和实用指南，而非计算技术中的复杂数学和理论. 本书尝试用各种方式来讨论所涉及的素材，以引起读者的兴趣. 本书的特色在于从实践中理解 CFD. 基于在 CFD 教学方面的经验，作者能够确认初学者在最开始时应掌握的基本概念. 本书精心设计的系列 CFD 计算实例可以促进读者的学习，同时可以更好地理解 CFD 的基本原理. 本书所采用的方法是专为致力于 CFD 技术工程实践的初学者而设计的.

本书的内容安排如下.

第 1 章是流体动力学概述，说明 CFD 技术的特有优势、CFD 作为研究和设计工具在工业领域的应用范围以及未来发展趋势.

第 2 章的目的是为满足首次使用 CFD 的读者对 CFD 问题一般处理和求解过程的了解而编写的. 读者将从商业软件以及自编 CFD 程序的基本求解过程中有所收益. 更为重要的是，本章为读者指出了与本章相关的其他章节中的 CFD 基础知识. 与现有的许多传统 CFD 书籍相比，本书的第 2 章是特别安排的.

第 3 章通过对流体动力学和传热学控制方程的处理及讨论，介绍与 CFD 相关的基本

计算思想．这对读者充分理解和掌握 CFD 基本物理方程和内在原理都是非常重要的．通过书中精心设计的实例，读者将对质量守恒、动量守恒和能量守恒控制方程有更好的理解．

第 4 章介绍了计算求解过程的两个阶段．第一阶段为数值离散，本章中介绍目前常用的求解流动问题的数值离散化技术，如有限差分法和有限体积法（该方法被大多数商业软件采用）．第二阶段涉及代数方程的特殊求解技术．本章介绍的压力-速度耦合方法（SIMPLE 及其扩展形式）是本书的核心内容．该方法已经被大多数商业 CFD 软件所采用，并且在复杂工业问题的模拟中获得成功．

第 5 章讨论稳定性、收敛性、相容性以及计算精度等概念．对流体流动和热量传递基本方程的了解是 CFD 的基础，而了解 CFD 求解技术才是最终目的．本章将使读者更好地评价应用不同数值方法获得的数值模拟结果．

著者经过仔细考虑后还是把 CFD 中的湍流模型包括在本书中，因为在现实世界中，CFD 所涉及的问题毕竟多是湍流问题．因此，为更好地理解湍流模型以及其他常用模型，著者在第 6 章中为读者提供了一些实用的指导．另外，著者还精心编选了一些实例以帮助读者理解复杂的模型．

涵盖 CFD 不同方面的书籍和刊物的数量在不断增加，专家们结合工程实践提出了各种新的术语．在第 7 章中，通过一系列重要工程领域中的相关应用，阐述了 CFD 的求解能力．本章特别想通过某些 CFD 应用实例来激发读者的兴趣．

尽管介绍先进的 CFD 技术的细节已经超出本书的范围，但我们还是在第 8 章中对其中的基本概念作了一般性的介绍，希望对那些将 CFD 进一步应用于科学和工程新领域中的读者有所帮助．

Jiyuan Tu
Guan Heng Yeoh
Chaoqun Liu

原著致谢

本书呈现的材料部分源于著者在澳大利亚墨尔本皇家理工（RMIT）大学航空、机械与制造学院为高年级本科生开设的“计算流体力学基础”课程的教学积累．我们要感谢那些学习本门课程的学生们，他们提供的很多反馈意见有助于更好地设计课程内容以及对本门课程的理解．

著者还要感谢很多研究生和同事们，他们为本书的完成在诸多方面给予了大量的帮助．我们特别要感谢 Kiao Inthavong，Zhaofeng Tian，Krishna Mohanarangam，Weng Chan，Patrick Li，Gokul Rajamani，Huafeng Li，Sherman Cheung 以及 Mark Ho，他们为本书终稿的复习题和外观设计等进行了精心准备．

Elsevier Science & Technology 出版社的高级编辑 Mr Jonathan Simpson 以及他的同事们在本书的出版过程中，以他们的科学素养和职业技能给我们以极大的帮助．

我们的感谢特别要送给美国 Rochester 技术学院的 Dr Risa Robinson 副教授，他在非常短的时间内对全书进行了评述，给予我们极有价值的建议并且在本书中得到了体现．

Tu 博士要对妻子 Xue 和儿子 Tian 表达深深的谢意，在准备和撰写本书的过程中，他们给予坚定的支持．

Yeoh 博士也要感谢妻子 Natalie 以及女儿 Genevieve 和 Ellana 的长期支持，感谢她们对本书长期准备和撰写过程中给予的理解和鼓励．

衷心感谢对本书作出贡献的所有人员．

目　　录

译者序

原著前言

原著致谢

1　绪　论 …… 1

1.1　计算流体力学的概念 …… 1

1.2　计算流体力学的优点 …… 3

1.3　计算流体力学的应用 …… 4

1.3.1　研究工具 …… 4

1.3.2　基础热流体科学的教学工具 …… 5

1.3.3　设计工具 …… 6

1.3.4　航　空 …… 6

1.3.5　汽车工程 …… 7

1.3.6　生物科学与工程 …… 8

1.3.7　化学和采矿业 …… 10

1.3.8　民用和环境工程 …… 12

1.3.9　能　源 …… 13

1.3.10　体　育 …… 15

1.4　计算流体力学展望 …… 17

1.5　小　结 …… 18

复习题 …… 18

2　CFD 求解入门 …… 20

2.1　概　述 …… 20

2.1.1　CFD 共享软件 …… 21

2.1.2　商业 CFD 软件 …… 21

2.2　问题的确定：前处理 …… 23

2.2.1　第一步：几何模型创建 …… 23

2.2.2　第二步：网格生成 …… 25

2.2.3　第三步：物理特性和流体特性选择 …… 26

2.2.4 第四步：边界条件设定 …… 28
2.3 数值求解：CFD 求解器 …… 32
2.3.1 第五步：初值设定和求解控制 …… 32
2.3.2 第六步：收敛监视 …… 34
2.4 计算结果报告及其可视化：后处理 …… 37
2.4.1 X-Y 直角坐标图 …… 38
2.4.2 矢量图 …… 39
2.4.3 云　图 …… 39
2.4.4 其他图形 …… 42
2.4.5 数据报告及输出 …… 43
2.4.6 动　画 …… 43
2.5 小　结 …… 44
复习题 …… 45

3 CFD 基本控制方程 …… 46

3.1 概　述 …… 46
3.2 连续性方程 …… 46
3.2.1 质量守恒 …… 46
3.2.2 物理意义 …… 49
3.2.3 说　明 …… 52
3.3 动量方程 …… 53
3.3.1 力的平衡 …… 53
3.3.2 物理意义 …… 56
3.3.3 说　明 …… 64
3.4 能量方程 …… 64
3.4.1 能量守恒 …… 64
3.4.2 物理意义 …… 66
3.4.3 说　明 …… 71
3.5 湍流附加方程 …… 72
3.5.1 何谓湍流 …… 72
3.5.2 k-ε 两方程湍流模型 …… 73
3.5.3 说　明 …… 78
3.6 CFD 控制方程的通式 …… 80
3.7 控制方程的物理边界条件 …… 85
3.8 小　结 …… 87

复习题 …… 88

4　CFD 求解技术基础 …… 92

4.1　概　述 …… 92

4.2　控制方程的离散 …… 93

4.2.1　有限差分法 …… 93

4.2.2　有限体积法 …… 97

4.2.3　控制方程向代数方程的转化 …… 100

4.3　代数方程的数值解法 …… 109

4.3.1　直接方法 …… 109

4.3.2　迭代方法 …… 112

4.3.3　压力-速度耦合：SIMPLE 算法 …… 116

4.4　小　结 …… 125

复习题 …… 125

5　CFD 计算结果分析基础 …… 129

5.1　概　述 …… 129

5.2　相容性 …… 129

5.3　稳定性 …… 132

5.4　收　敛 …… 137

5.4.1　何谓收敛 …… 137

5.4.2　残差和收敛条件 …… 138

5.4.3　收敛难点和欠松弛的使用 …… 139

5.4.4　加速收敛 …… 141

5.5　计算精度 …… 142

5.5.1　计算误差源 …… 143

5.5.2　计算误差的控制 …… 147

5.5.3　数值求解的检查和验证 …… 148

5.6　求解效率 …… 149

5.7　实例研究 …… 150

5.7.1　例 1：管道内流动 …… 151

5.7.2　例 2：90°弯管内的流动 …… 153

5.8　小　结 …… 157

复习题 …… 157

6　CFD 模拟与分析实用技巧 …… 159

6.1　概　述 …… 159

6.2 网格生成 …… 160
6.2.1 网格生成概述 …… 160
6.2.2 网格品质与网格设计 …… 166
6.2.3 局部网格细化和自适应性求解 …… 168
6.3 边界条件 …… 171
6.3.1 边界条件设置概述 …… 171
6.3.2 入口边界条件 …… 173
6.3.3 出口边界条件 …… 174
6.3.4 壁面边界条件 …… 175
6.3.5 对称和周期性边界条件 …… 176
6.4 湍流模型 …… 177
6.4.1 湍流建模方法回顾 …… 177
6.4.2 湍流模型选择策略 …… 179
6.4.3 近壁面处理 …… 184
6.4.4 边界条件设置 …… 187
6.4.5 算例：翼面流动中的两方程湍流建模 …… 189
6.5 小 结 …… 193
复习题 …… 194
7 CFD 应用实例 …… 197
7.1 概 述 …… 197
7.2 设计过程中的辅助设计工具 …… 197
7.3 作为研究的工具：增进对物理现象的理解 …… 203
7.4 其他一些重要应用 …… 210
7.4.1 与流体流动耦合的热量传递 …… 210
7.4.2 浮力作用下的自由火焰 …… 223
7.4.3 车队中的空气流动 …… 229
7.4.4 人鼻腔内的空气/颗粒流动 …… 234
7.4.5 高速流动 …… 238
7.5 小 结 …… 256
复习题 …… 257
8 CFD 中的某些前沿课题和探究方法 …… 262
8.1 概 述 …… 262
8.2 最新数值方法和技术 …… 262
8.2.1 不可压缩流动 …… 262

8.2.2 可压缩流动 …… 265
8.2.3 移动网格 …… 269
8.2.4 多重网格 …… 272
8.2.5 并行计算 …… 274
8.2.6 浸入边界方法 …… 275
8.3 最新计算模型 …… 277
8.3.1 直接数值模拟（DNS） …… 277
8.3.2 大涡模拟（LES） …… 279
8.3.3 湍流流动的 RANS-LES 耦合 …… 281
8.3.4 多相流 …… 283
8.3.5 燃　烧 …… 284
8.3.6 流-固耦合 …… 286
8.3.7 生物流体动力学 …… 287
8.4 CFD 中的其他数值方法 …… 289
8.4.1 格子 Boltzmann 方法 …… 289
8.4.2 Monte Carlo 方法 …… 290
8.4.3 粒子方法 …… 292
8.5 小　结 …… 293
复习题 …… 294
附录 A　守恒方程的推导 …… 296
附录 B　迎风格式 …… 300
附录 C　显式及隐式方法 …… 301
附录 D　学习进程和学时安排 …… 303
附录 E　CFD 作业及 CFD 课程设计指导 …… 305
参考文献 …… 316
建议进一步阅读的书籍 …… 330

1 绪 论

1.1 计算流体力学的概念

计算流体力学(Computational fluid dynamics，简称 CFD)已经进入了工业应用和科学研究的时代．计算流体力学的字头缩写为 CFD，尽管其最初的研究仅在航空、航天等高技术工程领域，但 CFD 已经迅速成为现代工程应用中用于解决复杂问题的一种常用方法．CFD 起源于流体动力学和传热学的一些领域，但在其他一些重要领域，特别是在加工、化工、民用和环境工程中，也得到了应用．通过计算机模拟进行的新结构设计和现有设备的改进以及系统优化，可以提高效率和降低成本．出于对全球变暖和日益增加的世界污染的关注，能源工业的工程师们越来越依赖于 CFD 的帮助来降低设备的研发和维修成本．最新的计算研究成果将被用于解决与清洁和可再生能源相关的技术问题，以满足政府对排放和环境污染的严格限制．

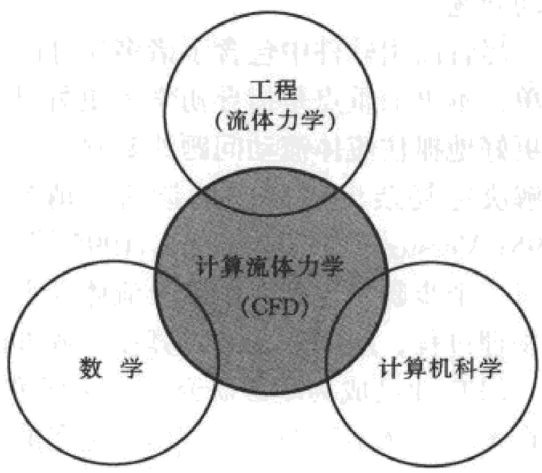


图 1.1 计算流体力学包含的不同学科关系

什么是计算流体力学？计算流体力学不仅是流体力学和数学的新分支，正如图 1.1 所示，它已经成为流体力学、数学与计算机科学交叉的一个全新的重要学科．我们可以简单讨论一下上述各学科．流体力学主要研究流体的流动(流体动力学)或静止问题(流体静力学)．CFD 只研究流体力学中的前一部分，即流体动力学部分，研究流体流动对包含热量传递以及燃烧流动中可能的化学反应等过程的影响．这直接反映了 CFD 技术中“流体动力学”的相关内容．此外，流体流动的物理特性通常用数学方程，一般以偏微分方程的形式加以描述，而这些方程控制着流动过程，所以常常被称为“CFD 的控制方程”(详见第 3 章)．为了求解这些数学方程，计算机科学家应用高级计算机程序语言，将其转换为计算机程序或软件包．“计算”部分代表通过数值模拟对流体流动的研究，包括应用计算程序或软件包，在高速计算机上获得数值计算结果．问题是：是否需要流体工程、数学和计算机科学的专业人员一起开发 CFD 程序或进行 CFD 模拟．答

案显然是否定的．CFD更需要的是对上述每一学科知识都有一定了解的人．

CFD已经成为如图1.2所示的解决流体力学和热量传递问题的三种基本方法之一．每一种方法并非完全独立，它们之间存在着密切的内在联系．过去，实验测试和理论分析方法曾被用于研究流体动力学的各个方面，并协助工程师进行设备设计以及含有流体流动和热量传递的工业流程设计．随着计算机的出现，数值计算已经成为另一种有用的方法．在工业设计中，尽管理论分析方法仍在大量使用，实验方法继续发挥着重要的作用，但发展趋势明显趋于数值方法，特别是在非常复杂的流动情况下更是如此．

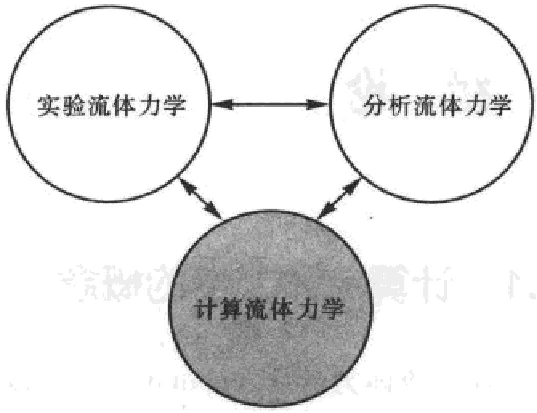


图1.2　解决流体动力学和热量传递问题的三种方法

过去，初学者学习CFD或许要投入大量时间用于自己编写计算程序．而今，工业界甚至科学领域中希望在非常短的时间内获得CFD知识的需求在不断增长，人们不再有兴趣自己编写计算程序，而是更乐于使用商业软件包．多功能CFD程序正在逐步得到认可，随着流动物理学模型的更趋成熟，这些软件包已经得到广泛认可．由于世界上有不同的软件公司已经开发和测试了CFD程序，当今的CFD使用者避免了编程和测试的麻烦，可以直接应用这样的程序去求解大量的流体流动问题．

尽管商用软件中包含了诸多先进的计算方法，但CFD并不是仅仅熟练运用软件那么简单．本书的重点是指导初学者更好地使用CFD，同时增加对基本概念的理解，以及如何更好地抓住流体流动问题的要领．想继续深入学习CFD以及希望发展新的数学模型用于解决更复杂流动问题的读者，请参考其他CFD书籍(如Fletcher，1991；Anderson，1995；Versteeg，Malalasekera，1995等)，以及本书作者的后续著作．我们将描述求解问题的每一个步骤，包括对新涉及流体动力学问题的物理理解，开发新的数学模型来描述流动的物理过程，应用适当的计算技术或方法验证这些模型等．

CFD业已成为基础研究、应用研究和工业应用中强大的计算工具．计算机模拟和分析在很多流体工程领域中有越来越多的应用，包括飞机(航空工程)、汽车(汽车工程)、呼吸和血液流动(生物工程)、流体在泵和管道中的流动(化学工程)、河流及污染物(民用和环境工程)、涡轮和工业炉(能源工程)以及游泳和高尔夫球(体育)等．通过应用CFD，人们可以获得更多的关于系统预期运行的知识，进而可以进行设计改进和优化研究．在项目改进设计付诸实施之前，CFD通常允许使用者问诸如“如果……会怎样”之类的问题．当人们考察我们生活的地球时，会发现几乎每一种事物都为流体所包围或者在流体中运动．

最近，CFD通过复杂流体流动的可视化技术，正在给高等教育中流体力学和热力学的

教学带来一场革命. 一些基于 CFD 的教学软件，如 ANSYS-FLUENT 公司的 FlowLab 的“虚拟流体实验室”，可以帮助学生巩固流体流动和热量传递的概念. 该软件还可以由教师创建他们自己的教学算例或者改变软件内已有的算例. 学生通过使用精心构建的实例，可以学会正确使用 CFD 去求解流体流动问题的方法，并建立对流动物理特性的直观感受. 下一节中，我们将讨论 CFD 的一些主要优点，并进一步说明 CFD 的发展历程以及实际应用.

1.2 计算流体力学的优点

随着计算机技术的飞速发展，CFD 已经居于流体动力学和热传递科学研究的前沿. 此外，CFD 作为现代工程实践中的一种实用工具，已经引起更多的关注.

计算流体力学有很多优点. 首先，计算科学的理论发展集中在控制方程的构建和求解以及对方程的各种近似解法的研究上. CFD 提供了研究特定条件下控制方程某些特定项细节问题的绝好机会. 人们认识到理论发展之路不可能离开数值分析方法. 其次，作为实验研究和理论分析的一个补充和替代，CFD 可以高效、低成本地模拟真实流体的流动. 特别是与实验方法相比，CFD 大幅度地减少了研制时间、降低了设计成本，并且可能解决理论分析无法处理的复杂流动问题. 这些优点随计算机硬件性能的增强和硬件成本的降低得以实现. 第三，CFD 可以模拟通常在地球物理学和生物流体动力学实验中无法再现的流动条件，如假想的核事故，或实验无法仿制的庞大或细小的假想事件(如 2004 年发生在印度尼西亚的海啸). 第四，与理论和实验流体动力学相比，CFD 可以提供更细致、可视、全面的信息.

在实际应用中，CFD 允许包括雷诺(Reynolds)数、马赫(Mach)数、瑞利(Rayleigh)数等无量纲参数在一定范围内变化，借此来评估不同的设计. 这种方法在流体系统设计的初始阶段通常是非常有效的. 与不断上升的试验运行成本相比，CFD 也是非常廉价的. 在流体流动细节十分重要的场合下，CFD 可以提供细节信息，帮助了解将要获得的流动过程，比如是否发生流动分离或者壁面温度是否超过极限值等. 随着技术进步和技术竞争，需要优化设计以及对流动行为进行精确预测，由于实验研究的成本太高，CFD 就成为合理的选择.

尽管如此，但这并不意味着 CFD 作为获得设计信息的手段将很快取代实验测试，而是说明 CFD 是一种可行的选择. 例如，风洞试验作为典型的按比例建造的实验装置，仍然为模拟真实流动提供重要的信息. 对于工程零件设计，特别是在主要依靠流动特性的飞机零件设计中，缩小尺寸的风洞试验与整机测试相比是经济可行的. 风洞可以非常有效地获得整机机体升力和阻力及其在关键位置处的表面分布信息. 在其他复杂流动过程中，特别是包括多相流、沸腾或浓缩等过程中，CFD 仍然处于初始应用阶段，实验方法仍然是获得信息的基本来源.

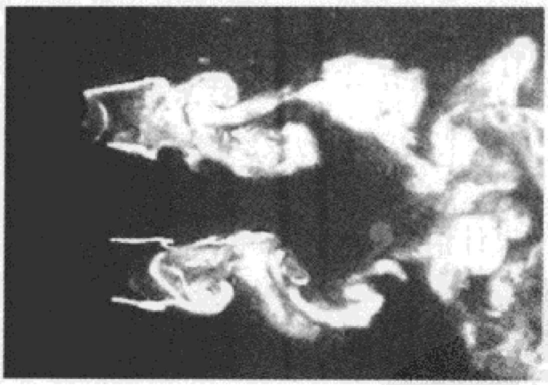
尽管对 CFD 有如此多的乐观评价，读者必须充分认识到 CFD 固有的局限性．计算误差使得计算结果与实际存在差别．用矢量图、云图或非稳态流动的动画对计算结果的可视化，是目前为止描述巨量数值计算数据最有效的方法．然而，要注意存在的风险，即错误的计算结果可能看起来很好，但可能并不代表真正的流动状态！本书作者曾经多次遇到过对流动特性的不正确数值模拟，它们曾被认为是合理的物理现象．漂亮多彩的图片可能给人以真正流动的印象，如果计算结果不正确则毫无意义．计算结果在被确认之前，必须要经过仔细验证．因此，读者需要学习如何正确分析和判断计算结果．这是本书的一个重要目的．

1.3 计算流体力学的应用

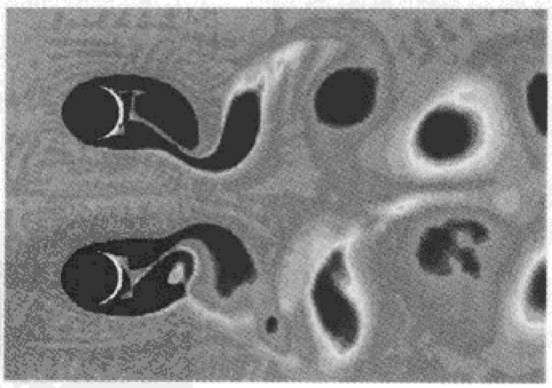
1.3.1 研究工具

使用 CFD 的目的之一是为了理解发生在特定目标周围和内部流体流动的机理或过程．这些事件与耗散、扩散、对流、边界层以及湍流等现象的作用及相互作用密切相关．无论是可压缩或不可压缩流动，其控制方程最重要的特征是非线性的，因此常常没有解析解．这就推动了寻求对偏微分方程的数值解法，并且似乎经典数值方法中的线性代数已不再适用．然而，我们的经验已经证明并非如此．

同风洞相似，CFD 可以用做研究工具进行“数值试验”．以我们 2004 年的研究成果为例来说明 CFD 是一种可行的研究工具，从而使读者对这一结论能有所理解．图 1.3(a)为给定时刻非稳态流体流经两相邻圆柱时的实验照片．图 1.3(b)为基于大涡模拟模型得到的数值计算结果，从中可见 CFD 对于复杂流动特性的建模是可行的．这个例子清楚地表明，使用 CFD 如同真实实验一样，可以更好地了解流动结构和流场中的一些重要物理



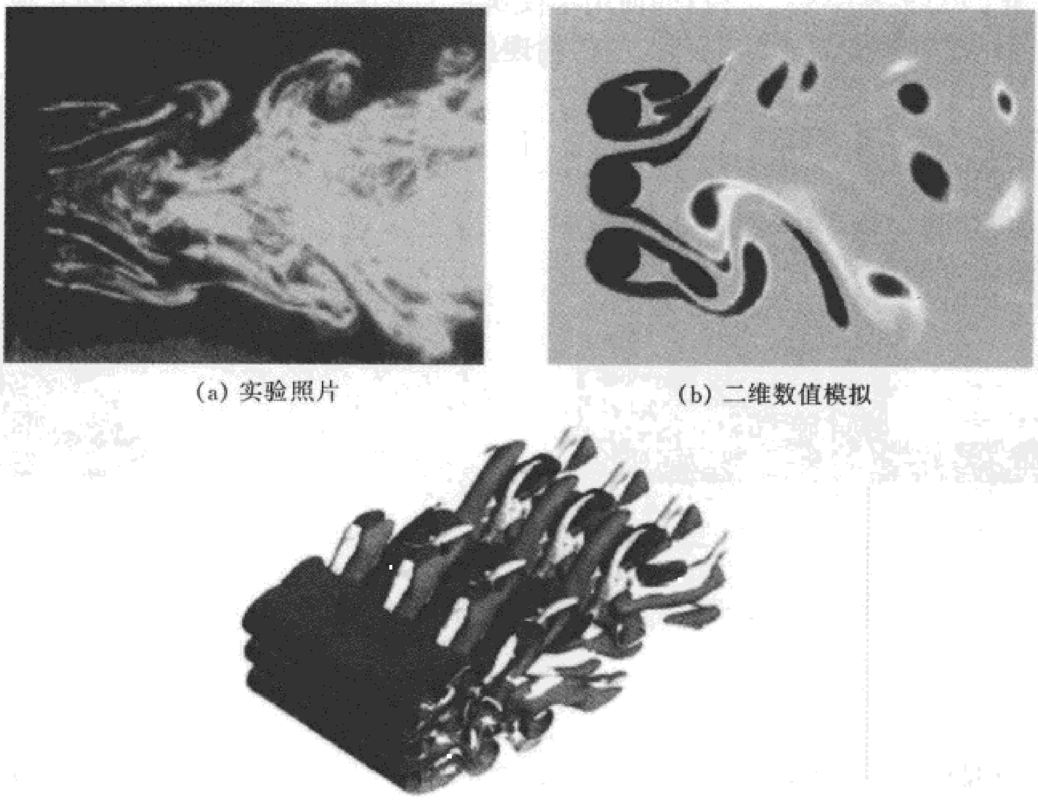
(a) 实验照片



(b) 数值模拟

图 1.3 CFD 数值实验举例：流体流经两相邻圆柱

现象．流体流经三个相邻圆柱的情况如图 1.4 所示，是 CFD 模拟与实验相吻合的又一个例子．CFD 不仅可与实验定性比较，而且还可以用来解释根据实验条件得来的一些基础现象．如图 1.4(c)所示，与实验室实验相比，数值实验能够提供三维可视化的更为全面的信息和流动细节，这更肯定了基于 CFD 数值实验的价值．



(a) 实验照片　(b) 二维数值模拟　(c) 三维数值模拟

图 1.4　数值实验实例：流体流经三相邻圆柱

1.3.2　基础热流体科学的教学工具

当 CFD 成为研究生课程之后，简单易用、功能强大的商业 CFD 软件就可作为教学工具引入到大学本科课堂．笔者以为大学生接触 CFD 有两大好处．首先，本书采用系列练习方法，通过 CFD 流动可视，可提高学生对流动状态的直观感受，更好地理解流体流动和热传递的概念，深化学生对流动现象的理解．其次，CFD 方法使学生不再受经典流体力学对流动求解的束缚，为学生开启了求解更复杂问题的大门．

作为工程性课程，学生无须经历长时间的培训就能轻松地用 CFD 教学软件来求解流动体力学问题．CFD 教学软件的作用是使学生接受 CFD 基本概念，拓展解决实际应用问题的能力，这种技能在当今就业市场中越来越重要．CFD 数学软件采用为学生特制的界面友好的用户界面，指导学生进行几何建模，网格生成，计算机模拟，计算结果的矢量、

等值线显示或动画显示等操作，使 CFD 教学具有从未有过的视觉愉悦而备受欢迎！图 1.5 为 ANSYS-FLUENT 公司 FlowLab 的典型用户界面．左图为流体在突变膨胀管内流动的矢量图和等值线图，右图为流体流经翼面的矢量图和等值线图．用户界面中的曲线图可以跟踪计算收敛历程或监视表面力分布(如用升力系数表示的升力在表面上的分布)，来帮助用户分析 CFD 模拟结果．CFD 的使用不仅唤起了学生学习流体动力学的兴趣，而且激发了他们进一步扩展对其他实际存在的传输现象的学习热情．

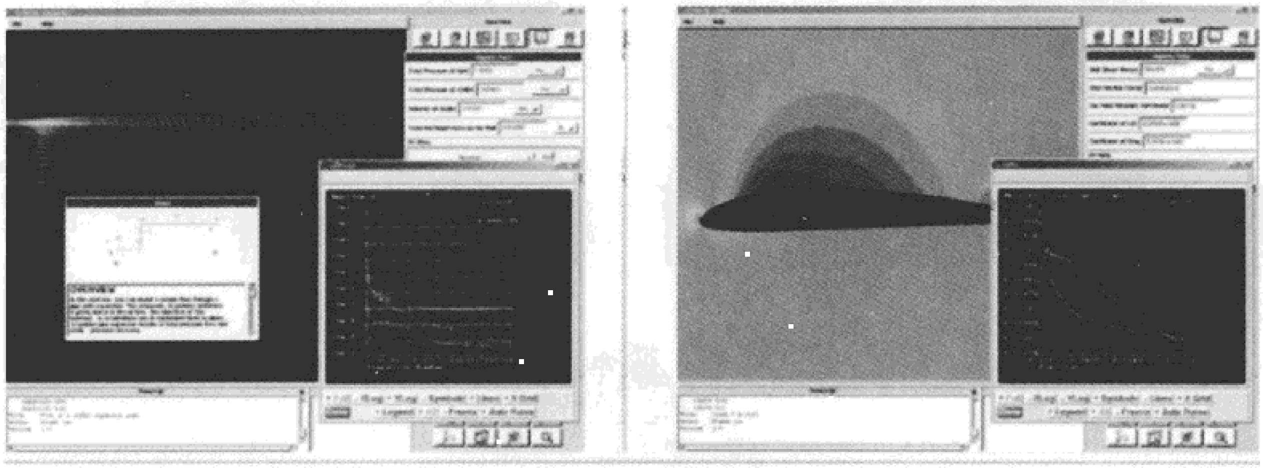


图 1.5　基于教学工具的 CFD 实例（选自 ANSYS-FLUENT）

1.3.3　设计工具

CFD 既是研究工具和教学工具，同时也已成为重要工业领域中工程设计分析的重要手段．越来越多的公司通过使用 CFD 来寻求产品开发和加工的优化，甚至在生产之前就对新设计进行模拟运行．现在，CFD 软件可以用在普通台式计算机上求解有关流动问题，并提供数值分析．CFD 作为有用的设计工具，通过对设备和流程内部的流动特性提供重要的、实质的分析，已经在增加产量、延长寿命和减少浪费等方面给人们提供了帮助．不断增长的计算机处理能力为现有和新兴工业中 CFD 的使用带来了革命．本书后面章节将进一步介绍 CFD 在工业领域中的广泛应用．

1.3.4　航　空

CFD 在航空和国防工业中的应用经历了一个长期的发展过程，取得了令人瞩目的成绩．在激烈的竞争环境中，CFD 在改进飞行设计中起到了关键性的作用．实际上，很多工程师已将 CFD 和空气动力学结合起来用于诸如飞机机翼升力的计算．随着 CFD 计算技术和计算机能力的提高，其使用更为简便，人们在计算升力之外，其应用范围已经得到很大拓展．今天，CFD 正用于求解很多困难的实际问题，而这些问题用过去的计算工具是难以分析或求解的．

对 F18 喷气飞机机身附近的流体流线模拟如图 1.6 左图所示，10°攻角时超声速导弹系统周围压力系数云图预测如图 1.6 右图所示．这些例子只是 CFD 用于气体动力学设计和军事中的一小部分．飞机设计中大量复杂问题的解决已经采用了 CFD 技术，如，飞机在跑道上连续起降时，尾涡对安全操作影响的研究，改进机舱通风、空调来提高乘客和空乘人员舒适程度的研究等．CFD 在军事领域中的应用不断增加，例如，应用 CFD 可以更好地了解和抑制重炮产生的噪声，确定军用直升飞机机身或尾部螺旋桨受到导弹攻击时的安全操作等．CFD 作为功能强大、可靠的计算工具，满足了大量物理建模的需求，用以研究航空和国防设计中的有关复杂现象．毫无疑问，由于上述领域中普遍存在通过降低开发成本、加快投放市场速度、改进系统总体性能来节省时间和资金的要求，因此使得 CFD 正在成为常用的模拟工具．

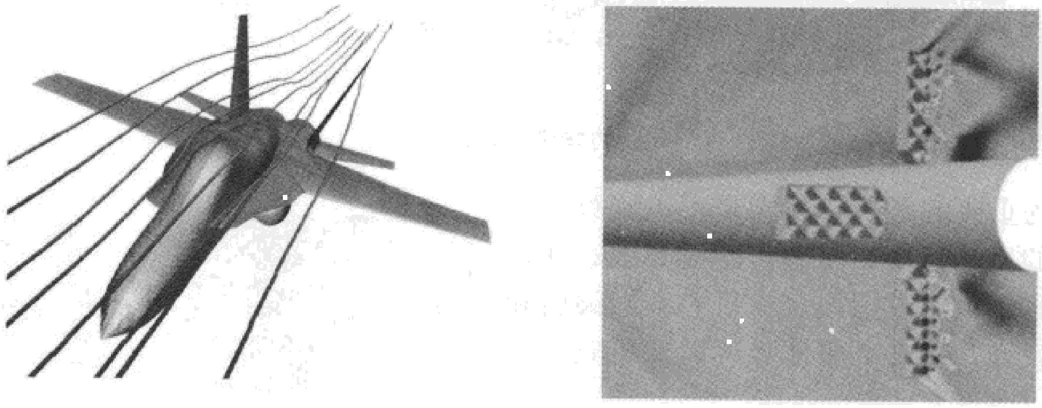


图 1.6 CFD 在航空和国防工业中的应用实例（选自 ANSYS-FLUENT）

1.3.5 汽车工程

现在，汽车工程师们正在依靠更多的模拟技术将提出的新车设计概念付诸实施．计算机辅助工程已经处于革新汽车内部系统的技术前沿，可以更好地全面提升驾驶体验，改善驾驶员和乘客的舒适感和安全性，并且进一步降低油耗．计算流体力学长期以来一直是汽车设计和制造中的一个基本要素．除了航空航天工业外，汽车工业在研究制造中也大量使用了 CFD 技术．因此，作为工程模拟工具，即使面对最困难的挑战，CFD 仍然在许多工业领域中得到很好的应用．

在汽车工程中使用 CFD 有很多优点．该技术具有缩短开发周期、优化已有零部件和系统以提高燃烧效率、满足严格的排放标准、改善车内环境以及对外型气力动力学研究（如图 1.7 所示）的能力．特别是在通过对传动系统、发动机分析来降低尾气排放、提高燃烧效率，通过空气动力学研究来提高汽车使用寿命和性能、提高刹车件可靠性等方面，CFD 已经显示出显著的效果．与在航空中的应用相类似，CFD 已经用来分析汽车外形对空气动力的影响，并且能直接对不同的设计进行比较．这就减少了对既耗时又费钱的模型

制作和风洞试验的依赖，可以进行快速设计.

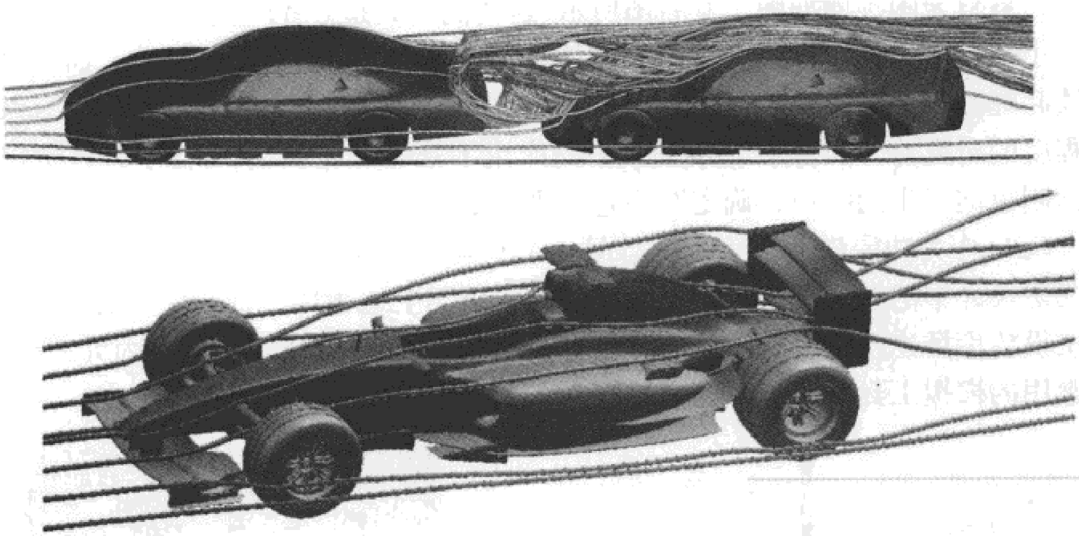


图 1.7　CFD 在汽车动力学中应用的实例(选自 ANSYS-FLUENT)

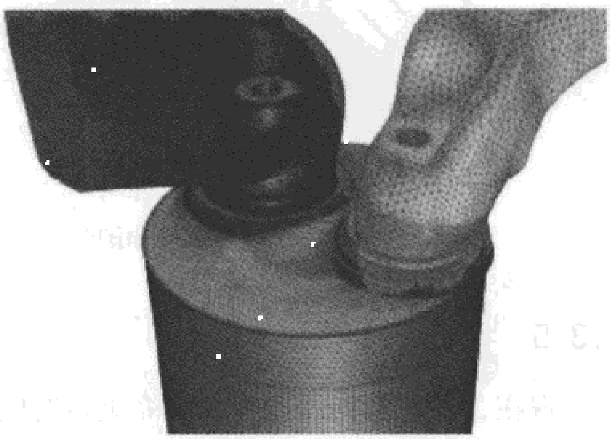


图 1.8　CFD 在柴油内燃机中的应用实例(选自 ANSYS-FLUENT)

更为重要的是，CFD 模拟可以观察到汽缸内部的流动特性，而做实验极其困难并且费用昂贵. 数值模拟很容易研究不同阀门和阀口的设计，使之更好地吸气以及更充分地排气，以改进发动机的性能.

在汽缸内部，运动和变形的网格可以模拟活塞和阀的运动，图 1.8 是对柴油内燃发动机的模拟情况. 吸气口在左侧，排气口在右侧. CFD 能使工程师明了阀口和燃烧室设计对发动机容积效率或引起涡旋流动等特性的影响. 活塞在燃烧室内从最上端运动到最下端，而后再回到起始位置的整个循环过程中，通过 CFD 流动物理特性的描述，工程师可以考查瞬时流动的细节. 像这样的冷态流动模拟，可以回答汽车工业中工程师们面对的很多富于挑战性的问题. 通过动力学适应网格的应用，CFD 对内燃发动机中流动的模拟更加便捷和方便，满足了汽车工业不断竞争的需要.

1.3.6　生物科学与工程

医学研究者现在依靠模拟工具帮助预测人体中血液循环流动状态. 数值模拟能够提供实验难以得到的有价值的信息，而且 CFD 还可以对很多流体动力学参数进行研究. 图 1.9 显示

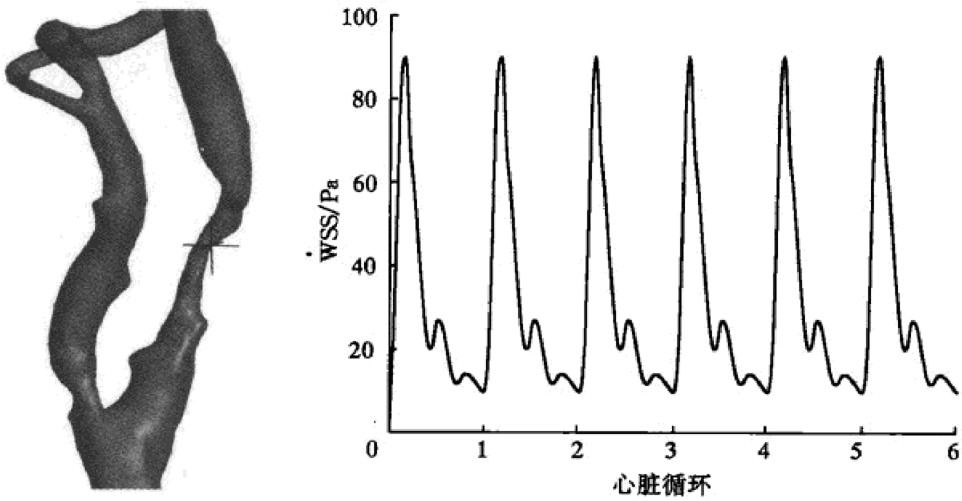


图 1.9 CFD 预测血液在动脉最窄处的壁面剪应力(WSS)波动

了 CFD 在生物医学领域中应用的一个例子：预测血液在异常动脉中的流动．随着物理模型的改进、流-固耦合研究的进展、粒子跟踪、湍流模型以及网格划分工具的使用，CFD 越来越多地用于人类循环系统内部流动现象的研究和分析．循环功能的医学模拟具有很多好处：可以减低术后出现并发症的机会，协助制订更好的外科手术方案，提高对生物学过程以及高效低损伤医疗设备(如抽血泵)的理解．CFD 越来越多地通过虚拟原型来推荐最好的外科再创手术方案，如颈动脉内膜切除手术(计算网格见图 1.10)，以及通过虚拟原型来更好地了解血液流过腹部动脉肿瘤的情况．

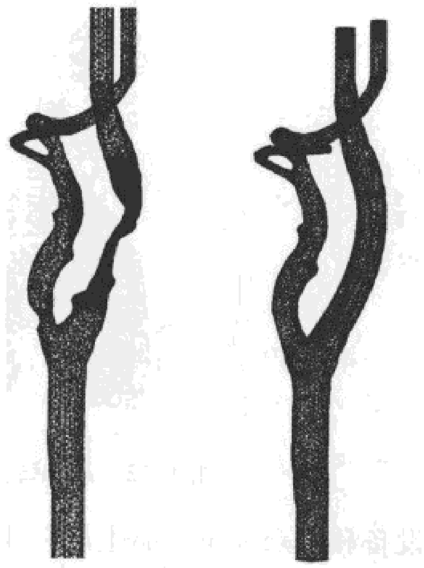


图 1.10 颈动脉分支中的计算网格

CFD 在制药工业也有广泛的应用．污染的加剧会引起呼吸道疾病和哮喘病的发作，现在比以往更迫切需要对呼吸系统疗效的预测和改进．通过 CFD 模拟，可以全面观察颗粒气雾剂和气态药物从仪器端口经过呼吸道到肺部的整个传输过程．通过复杂的多相流模型，可以预测气雾剂液滴和药物颗粒在呼吸道内的传递/沉积特性，用以确定药物在肺部的聚积情况．图 1.11 是鼻腔喷雾器喷射粒子在鼻腔内传输/沉积模拟的例子．为了更好地模拟真实流体在呼吸系统支气管内的流动，将 CT 和核磁共振(MRI)得到的医学照片转化成如图 1.12 的几何模型，用于先进的 CFD 流动模拟．通过 CFD 模拟，可以针对特定的目标颗粒药物、喷药装置、特定疾病甚至具体的病人，制订颗粒的沉积和漂浮规划．

由于对新的更有益于健康的药品的需求不断增加，医药公司需要进行更多的研究，开发有前景的新产品．对于众多卫生保健机构，包括生物医学和药品公司以及其他相关医疗

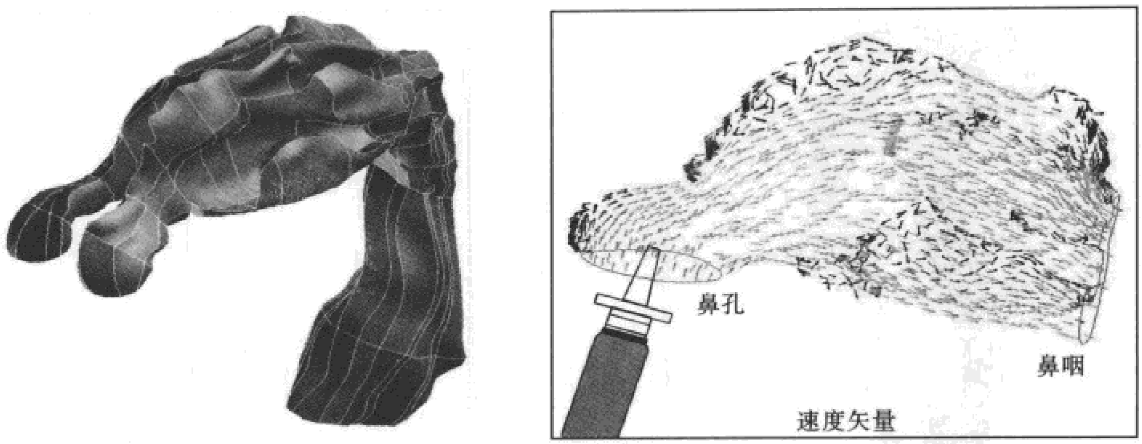


图 1.11　鼻腔喷雾器喷射粒子在鼻腔中传输和沉积的 CFD 分析

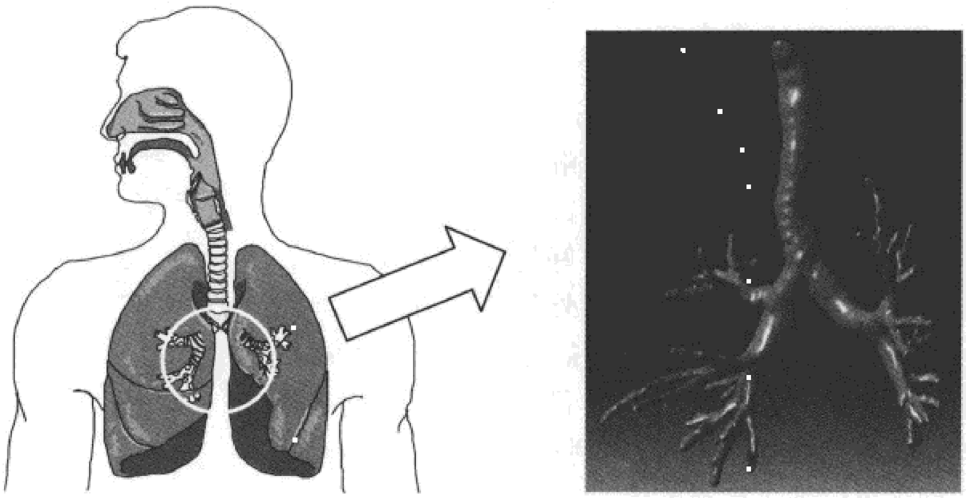


图 1.12　从核磁共振数据得到的用于 CFD 模拟的支气管几何模型实例

设备和大众健康产品生产企业，CFD 正成为他们新产品开发的重要工具，以满足由于人口老龄化到来而迅速扩大的市场需求.

1.3.7　化学和采矿业

很多世界必需品源于化学工业和采矿业. 这些工业通过物理或化学方法加工原材料，消耗大量的热能和电能，为食品、保健品以及先进的计算技术设备和生物技术设备提供初级产品. 面对不断加剧的竞争，这些工业面临的主要挑战是既要满足当前世界性的需求，同时对未来发展又不造成损害. 这就要求生产过程更高效、更安全以及更少污染物的排放.

气体喷射搅拌釜反应器性能的改进即是一个例子，这在化学工业中极为重要. 图 1.13 表示搅拌釜中不同气泡尺寸分布的云图，在一个旋转桨片周围，用速度矢量显示局部流动状态. 通过使用 CFD 和总量平衡方法(Population Balance Approach)得到的液体和

气体传输的细节信息，可以确保工程师拥有最好的可用数据，来改善流动、增加产量，进而降低成本、提高系统效率.

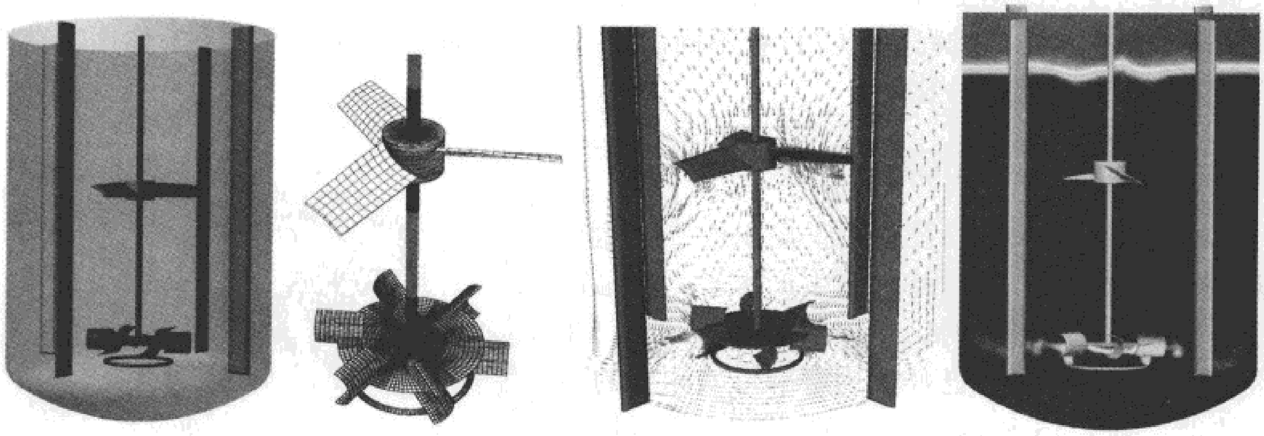


图 1.13 CFD 在气体喷射搅拌釜反应器模拟中的应用(选自 ANSYS-FLUENT)

此外，还没有哪个领域比矿业更为重要，对于澳大利亚尤为如此. 采矿过程涉及多个工艺过程，很多过程中包含恶劣环境下的复杂流体流动、传热和传质现象. 通过对分级、分离、筛选等工艺过程的建模、优化和改进，CFD 处于高效设计和批量生产的前沿. 图 1.14 显示了采矿过程中使用的气体旋风和水力旋流分离装置. 气体旋风器是一种广泛使用的利用重力和离心力从气流中分离固体颗粒的设备. 水力旋流器与气体旋风器相似，工作流体不是气体而是液体，这种设备的离心力更大，大到足以使固体从液体中分离出来，分离出来的固体在重力作用下沉积到置于水力旋流器下部的收集皿中. 通过先进的湍流模型，在旋流几何空间内进行 CFD 模拟，探讨不同的流动物理学特性，正确地预测流体流动. 然后，采用欧拉(Eulerian)或拉格朗日(Lagrangian)多相流方法，应用合适的颗粒传输模型模拟颗粒的行为.

(a) 气体旋风器　　(b) 水力旋流器

图 1.14 CFD 在气体旋风器和水力旋流器模拟中的应用(选自 ANSYS-CFX)

上述这些例子只是CFD在过程工业众多应用中的一小部分．先进的CFD在其他重要工业领域，如冶金、石油、石化和天然气等领域也有大量应用．CFD在建模方面的最新发展已经为复杂的化工和过程工业的技术飞跃提供了很多机会．从实验室到小规模中试再到大规模生产的推广过程中，CFD在不同的工艺组合方面起到了至关重要的作用，在原有条件下提高了工厂的效率．

1.3.8 民用和环境工程

政府、研究机构以及企业正在积极寻求途径满足环境保护法，在维持一定生产水平、满足市场不断增加需求的同时，保证减少环境污染．在很多时候，CFD模拟已经成为解决环境问题的核心技术．图1.15显示了CFD预测从冷却塔排出污染物在风作用下的飘散情况，并确定周围建筑物是否受到飘散物温度的影响．

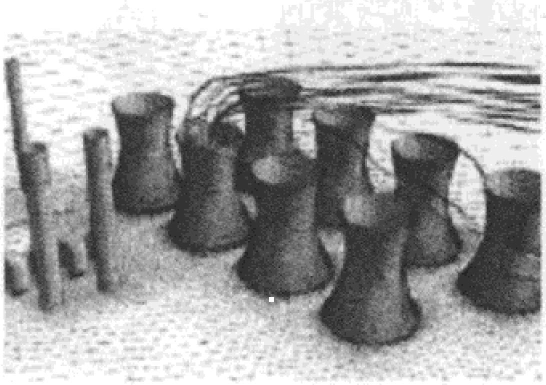


图1.15 CFD应用于冷却塔排放物扩散预测
(选自ANSYS-FLUENT)

此外，CFD能辅助建筑设计，尤其是在建筑设计的初始阶段，以确保满足严格的设计规程．图1.16为水处理工厂中新建22m宽储水池的前期建设图．虽然建设成本会有数百万美元之巨，但是虚拟的计算机辅助模型能以较短的时间、较低的成本，在实际施工之前对设计的各个方面进行全面的分析．为分析该建设项目的可行性，在不可能建立实际物理模型的前提下，就需要建立如图1.16所示的流动模型，通过数值模拟来完成对立项储水池内的流动状态的研究．从CFD模拟得到的信息加深了对设计项目的了解，使设计方案更有把握性，从而避免了为提高安全性而加大设计裕度带来的建设成本的增加．

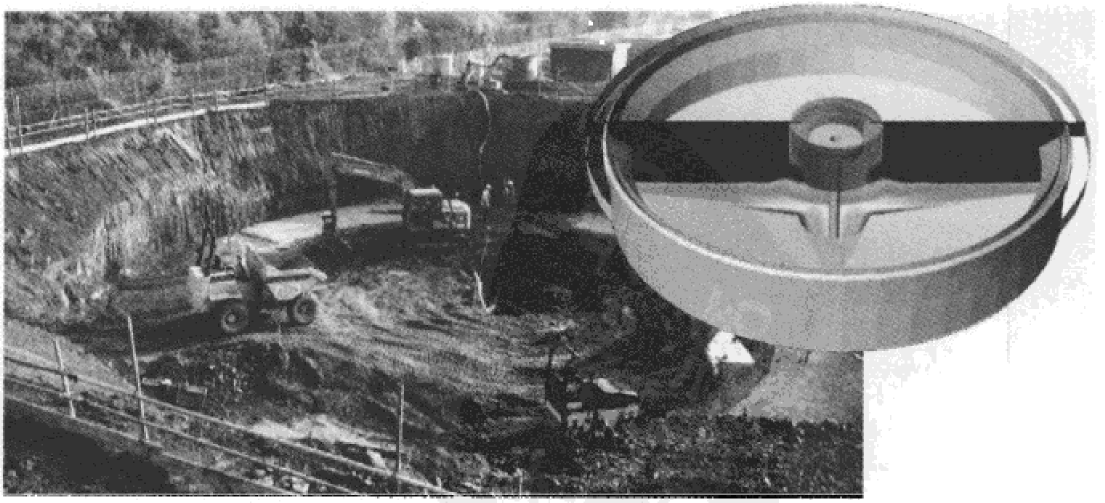


图1.16 CFD在水处理厂新储水池建筑中的应用
(右上角表示对建设位置上安装水池的CFD模拟结果)(选自MMI工程)

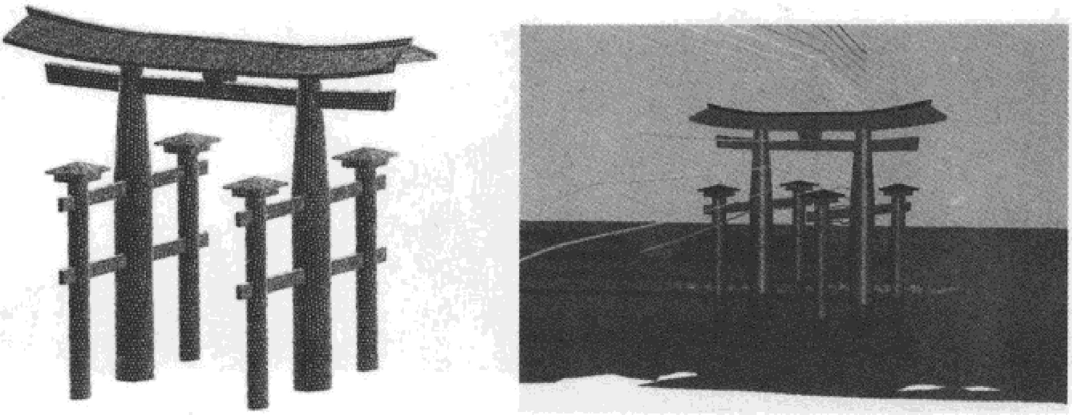


图 1.17 CFD 对位于日本广岛 Itsukushima 牌坊周围空气和水流动的模拟
(选自 ANSYS-FLUENT)

最近，人们对位于日本广岛海域 17m 高的木制 Itsukushima 牌坊周围的空气和海水流动进行了 CFD 研究. 采用动网格模型产生周期性的移动壁面来造浪，采用 VOF 模型跟踪空气-海水交界面变化来模仿海浪，实现了对该建筑周围流动特性的观察. 这种捕捉以及更好理解流动过程的能力可使环境工程师更好地评估环境对现有建筑物的影响.

1.3.9 能 源

在不断竞争的能源市场中，设备制造商们转向 CFD 寻求技术支持，以便更好地了解和提升能源工业中的设备和工艺. 尽管传统的发电方式仍在广泛使用，但已经出现了具有潜力的可再生能源，如风力发电. 为使投资得到最大回报，CFD 已经被用于风力发电涡轮叶片的优化设计当中，使之在不同的来风条件下能产生恒定的功率. 图 1.18 显示了应用流体动力学三维流动模拟弗朗西斯(Francis)涡轮周围的流场. CFD 也是唯一被证实能精确模拟风力资源分布的技术，特别是对如图 1.18 所示的具有一定陡峭坡度的复杂地形的模拟. 更为重要的是，CFD 能够提供风轮在特定区域内的分布方案，可以更有效地利用风能并尽量减少尾迹的相互作用. 通过 CFD 的风能资源评估，工程师可以更好地研究风力发电站的经济性，正确的模拟结果可以减少投资风险.

世界上很多地方，如澳大利亚，拥有丰富的煤炭资源，在能源工业中使用煤炭作燃料已经很久了. 大型锅炉燃烧煤炭，大量排放对环境有害和危险的污染物，如 CO，NO_x，SO_x 和 Hg 等. 为符合(澳大利亚)州政府和国家法规以及国际公约对排放的严格规定，CFD 已经用于帮助工程师们发现设计中的缺陷(见图 1.19). 找到低效运行的原因，就可以减少污染物的排放. 有了这些信息，就可以改进设计或运行策略，使灰烬中的残余碳量维持在满意的水平之上，工厂运行也更具灵活性. 例如，通过减少燃料消耗、降低污染物排放、减少残余炉渣、延缓管路老化、延长部件使用寿命，以减少检修时间等来实现锅炉运行的优化. 作为清洁能源技术的燃料汽化，可望提高发电效率并降低废气排放. 运用

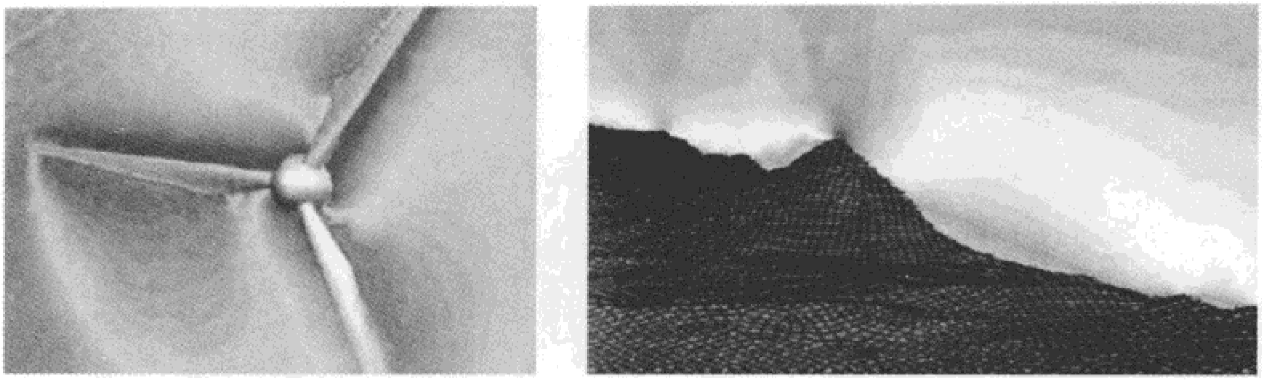


图 1.18 CFD 在预测风轮速度场和风力发电周围风场的应用实例
(选自 TüV Nord e. V., CENER)

CFD 模拟能够满足该技术建模的需要. 图 1.20 显示了 CFD 对典型燃烧流化床及其相关部件操作过程的模拟. 结合对整个系统的模拟以及对组成元件进行三维详细分析, 工程师就可以作出更好的设计, 以较低的制造成本生产出高质量的最终产品.

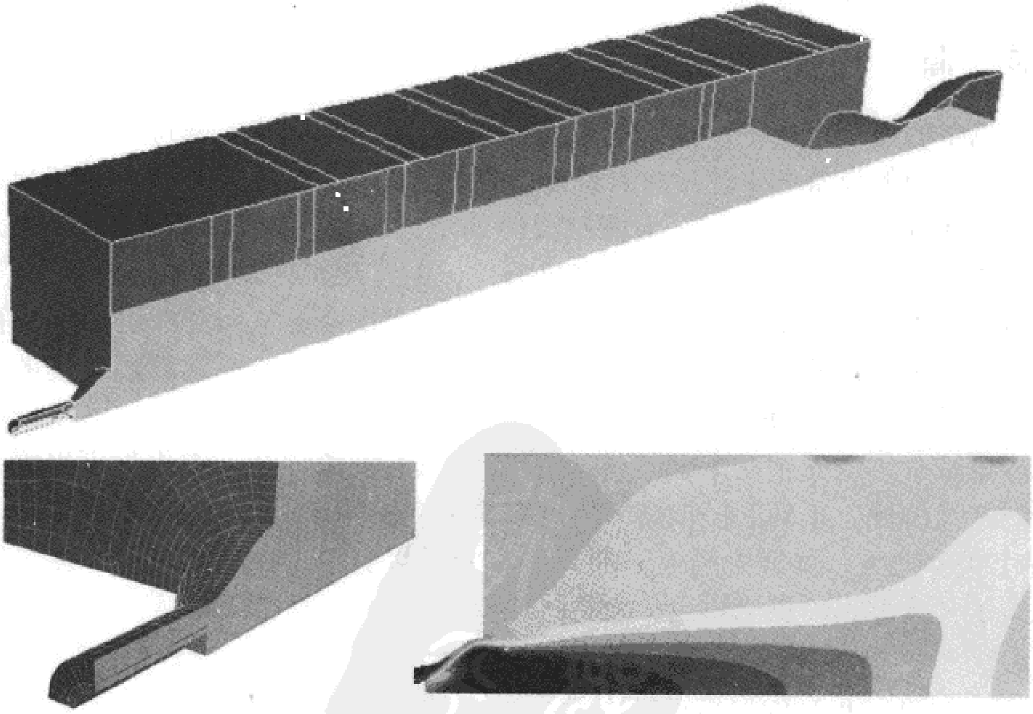


图 1.19 CFD 模拟在工业煤粉炉中的应用(选自 ANSYS-FLUENT)

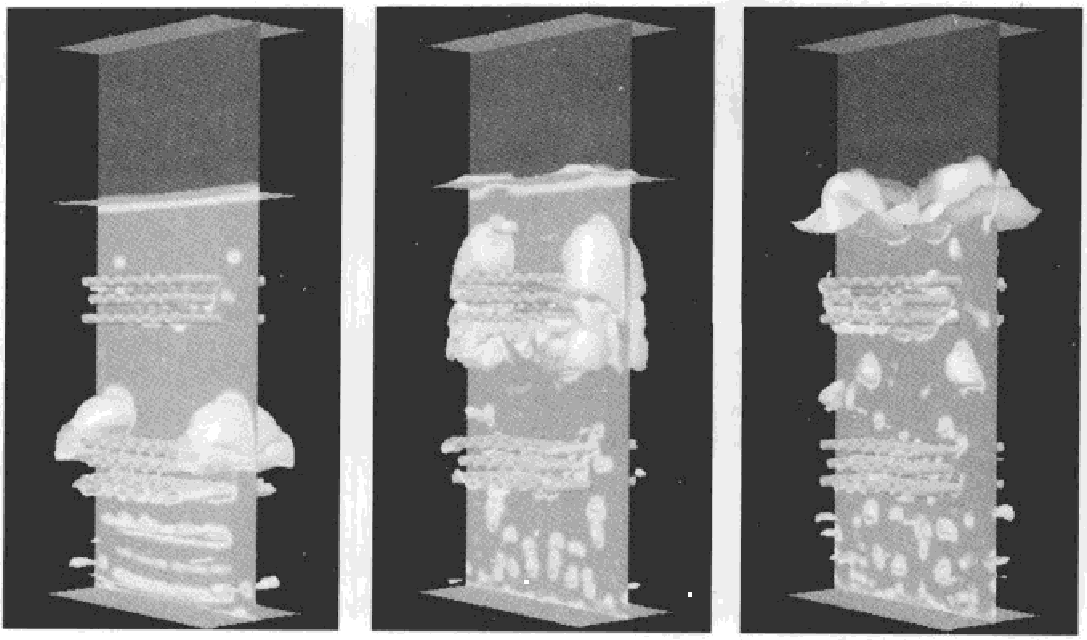


图 1.20 CFD 模拟气泡在流化床中的应用(选自 ANSYS-FLUENT)

1.3.10 体 育

最近，CFD 在竞技体育中一项最具创新性的应用，就是如图 1.21 所示的为游泳好手设计合适的划水姿态，以获得最佳的推进力．美国国家竞技游泳机构致力于取得最领先的地位，应用 CFD 来评估自由泳和蝶泳运动员划水时手和手臂周围的水流动状况．通过使用 CFD 成熟的湍流模型和适应性网格，确定运动员手和手臂获得的稳态浮力和曳力．在这个例子中，对不同水湍流状态下划水角度从 15°到 195°的力系数进行了评估，计算结果与风洞、拖箱、水槽试验得到的力系数有很好的一致性．模拟结果与实验数据的对比，成功地验证了 CFD 模型的正确性．

在与游泳相关的文献中，手常被看做一个翼型，然而 CFD 分析显示，手的划水效率比相似展弦比翼型的水动效率要低得多．在竞技比赛中游泳运动员所能获得的划水速度条件下，CFD 获得的水流线预测结果表明，流线存在明显的三维特性并伴有边界层分离，手侧面的下游形成大的分离旋涡，小的旋涡脱离指尖，其情形与飞机机翼或涡轮叶片的流动形态相似．CFD 还能进一步分析游泳运动员手和手臂的加速和减速对推进力的影响．

自行车是 CFD 发挥重要作用的另一个竞技运动领域．CFD 可以设计出最好的自行车，使运动成绩提高关键的几毫秒．Sheffield 大学体育工程研究小组(SERG)与英国自行车队密切协作，已经为该队提供了建造世界上最快的“合法”自行车的方法．在 2004 年雅典奥运会上，英国自行车队共获得 4 块奖牌，其中金牌 2 块，银牌 1 块，铜牌 1 块，这是英国自行车队的一个奇迹．车队制胜的法宝归于 SERG 对自行车的气体动力学优化设

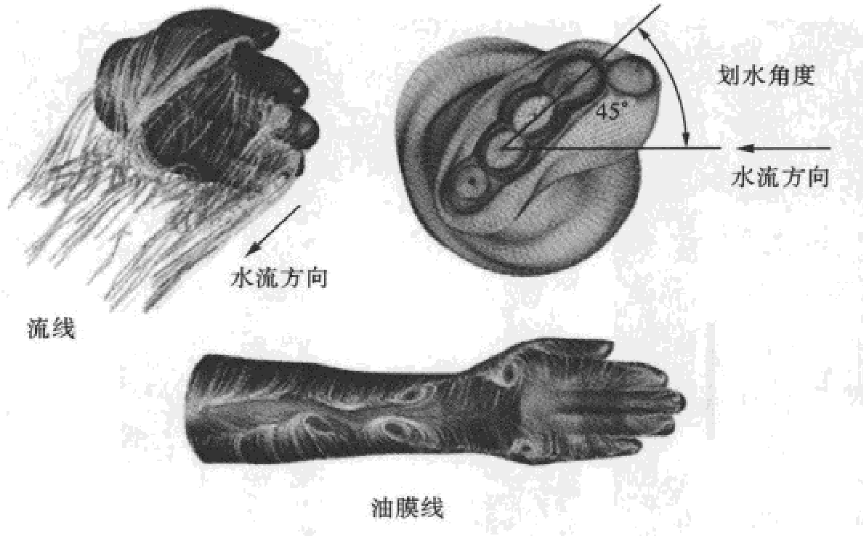


图 1.21 CFD 在优化划水设计中的应用实例
(选自 Honeywell Engines and Systems 以及 ANSYS-FLUENT)

计. 应用 CFD，SERG 重新设计了雅典奥运会参赛自行车前叉并重新布置了车把. 如图 1.22 所示，CFD 还用于帮助车队选择具有流线型设计的气体动力学头盔. 通过更好地了解流经气体动力学头盔的流线，为不同头部姿态的运动员设计和制造了一系列头盔，最终获得了成功. SERG 的建议确保了英国自行车队在夺金之路上具有的竞争优势.

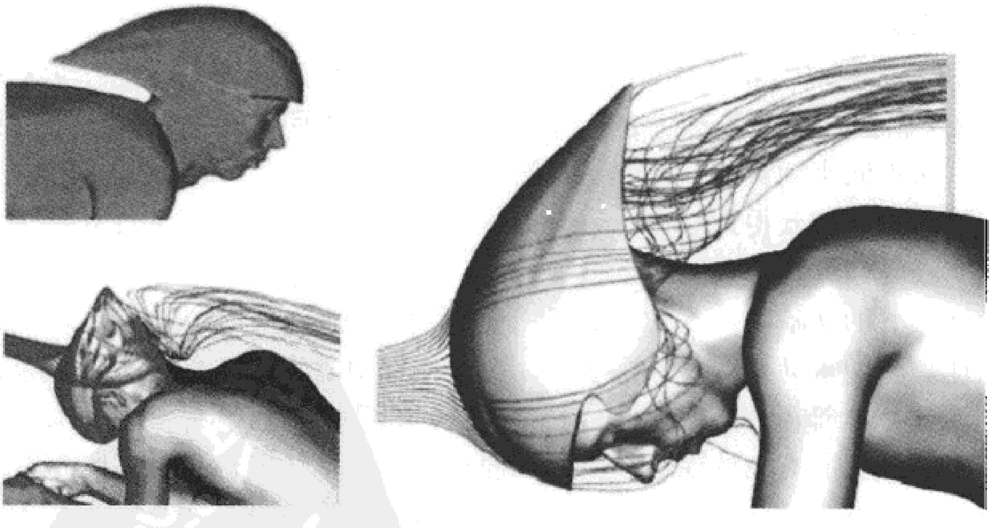


图 1.22 CFD 模拟在空气动力学头盔设计中的应用
(选自 Sheffield 大学 SERG 及 ANSYS-FLUENT)

1.4 计算流体力学展望

近期，我们目睹了计算机模拟技术在很多工业应用中的兴起．这种不断发展变化的现象，部分得益于CFD技术和模型的快速发展．目前，最先进的、用来模拟复杂流体动力学问题的模型，如喷射火焰、浮升燃烧、多相和(或)多元流动的模型，通过多功能商用CFD软件，正在被越来越多地应用．这些程序在工业中的不断使用清楚地说明了CFD正用于分析那些非常迫切需要解决的实际问题．随着硬件价格的下降和计算时间的缩短，正如前几节相关例子描述的那样，工程师更加依赖可靠、易于使用的CFD工具获得正确的分析结果．

此外，CFD虚拟技术和数值报告使得工程师能够对于给定的工程设计进行实时观察和模拟结果查询，并进行必要的评估和判断．在工业中，CFD将在设计过程中逐渐占据主体，新产品开发将逐渐趋于“零原型工程”．这种设计理念不再是一种幻想，并且会在不久的将来变为现实，在汽车工业中更是如此．展望未来，包含汽车外形及其气体动力学在内的整车CFD模型将在几小时内组装成一部整车模型，并解答和分析汽车设计中的问题，而现在这个过程则需要几天的时间．CFD将经常用来模拟和分析设计中涉及的非定常流动问题．与CFD相关的另一领域是将汽车整体结构及其空气声学联合建模，进行“联合模拟”．通过对设计方案的即时模拟与评估，选择最优的汽车设计．

在研究领域中，随着计算资源的发展，大涡模拟(Large Eddy Simulation，LES)逐渐成为研究流体动力学中诸多基础湍流问题的首选．由于所有的真实流动都是非定常流，在基础学术研究中，大涡模拟提供的求解方法将逐渐取代传统的两方程湍流模型(two-equation turbulence models)．对LES建模的需求正在稳步增长，特别是在单相流动之中，LES已经有了巨大进展．在燃烧研究中，因为LES能描述非定常的大尺度湍流结构对燃烧的影响，揭示复杂的火焰结构，因而获得了巨大的成功．尽管人们致力于开发更具鲁棒性(robust)的CFD模型，用以预测包括气-液、气-固、液-固或者气-液-固流动的复杂多相流的物理特性，但LES对求解这些流动问题的应用才刚刚开始．相反，处理包括上述流动在内的湍流计算，两方程湍流模型仍然是非常流行的．或许LES是未来处理多相湍流的首选模型，但就目前而言，更需要进一步发展更成熟的两方程湍流模型来求解上述流动问题．

基于目前的计算能力，LES涉及大量网格节点的数值计算，这将是相当费时的．然而，随着计算速度的不断提高，在不久的将来，LES将被普遍采用．而且，随着LES逐渐从学术研究领域转移到工业领域，LES毫无疑问将逐渐成为解决很多实际工业流动机理问题的一般方法．探索CFD在工业和科研中的应用将面临许多挑战．或许我们能预期有一天不用任何湍流模型就能直接求解所有的湍流流动问题．将直接数值模拟(Direct Numerical Simulation，DNS)应用于学术研究以及某些工业领域中的湍流流动分析将成为可

能.

1.5 小 结

本章给出的一系列实例清晰地展现了计算流体力学数十年的发展及在数值技术中取得重大成就的历程. 尽管计算流体力学在学术领域作为研究工具已经长期使用，但在很多工业领域中的应用才刚刚兴起，方兴未艾. CFD 的空前应用，部分原因是由于多功能商业计算软件实用性能和操作性能的增强. 这些软件在一定程度上助长了工业 CFD 应用需求的膨胀. CFD 研究正处在进一步使用的十字路口处. 不断增强的计算能力已经有可能综合诸多成熟模型来更好地求解更加复杂的流动传递现象. 多功能商用计算软件在很多教育机构中已经相当普及，这正在改变 CFD 的教学方式. 最近，基于这些程序的更为简便的版本正在开发之中，使之成为专门的 CFD 教学工具. 新用户不必再自己编写和调试程序了，这给他们学习 CFD 带来了极大的帮助.

CFD 计算通常希望获得一组数据来近似描述真实流动系统. 然而，CFD 练习的主要结果是使读者提高对研究系统内流体流动状态的认识. 研究 CFD 的主要目的在于获得经验，全面了解流动的物理过程、数值方法以及数值模型. 此外，还特别需要对软件操作进行更好的指导以提高软件的使用效能. 本书主要论述上面提到的问题，传授读者对商用软件及其成功操作所必需的基础知识.

下一章我们开始介绍应用 CFD 软件进行 CFD 分析的整个过程. 由于本书的重点放在 CFD 的使用上，因此，将突出 CFD 分析的实际步骤和实例. 基本目标是向读者介绍现有商业和共享软件的诸多操作. 随着对 CFD 求解流体相关问题需求的激增，恰当地选择和应用这些方法显得非常重要.

复习题

1.1 CFD 首先出现在哪一工业领域?

1.2 CFD 源于哪三个学科?

1.3 传统上，CFD 一直被用于解决飞机和汽车工程中的实际问题，如飞机和汽车的牵引力和升力等. CFD 现在应用到其他流体工程中的实例还有哪些?

1.4 CFD 的优点有哪些?

1.5 CFD 的局限性和缺点是什么?

1.6 怎样评价 CFD 在客机安全性和舒适性辅助设计中的作用?

1.7 在学术领域，如热流体学中，CFD 是如何被用做研究、设计和教学工具的?

1.8 如何应用 CFD 来改进汽车工业中的成本-效率设计过程?

1.9 生物医学科学领域正借助于 CFD 求解人类呼吸系统和循环系统内的流动问题. 与实验相比，CFD 在获得的大量计算结果方面有什么优点?

1.10 在采矿业中，CFD对水力旋流器的模拟通常可以得到什么细节？

1.11 CFD在民用和环境工业中是如何应用的？

1.12 CFD用于能源工业的两个实例是什么？模拟能够得到什么数据以及这些数据在提高发电厂效率方面的作用是什么？

1.13 CFD如何改进游泳运动员的划水方式？

1.14 CFD能够给予自行车队竞争优势的是什么？

1.15 在未来，CFD在制造业产品研发过程中将有何作为？

1.16 CFD的未来会如何？

2 CFD求解入门

2.1 概 述

随着商业软件以及自编计算程序越来越容易得到、使用越来越多，当今的CFD使用者与以往的使用者不同，他们更需要具有必要的CFD的知识和技能．在很多科学领域、工业部门和大型研究机构中，CFD软件的使用已经非常普遍．因此毫不奇怪，现在的初学者更愿意通过现有的软件来学习CFD．商业软件的发展当然也反映了这种需要，其用户界面更为友好．

应用现有的CFD软件有一定的优势．初学者开始可以将软件看成是一个“黑箱”，使用软件时只关注软件的重要特性即可．没有任何前期CFD基础知识的使用者，首次可以进行包括建立流动问题、问题的数值求解、计算结果的图形显示等必要的操作．尽管可以认为这一过程非常机械并且费力，但是对于首次使用CFD的人来说则是一次很好的实践经历．感兴趣的使用者一般会很好奇“黑箱”中包含的内容，并且通常由此推动使用者渴望进一步了解“黑箱”中的内容．

让CFD使用者不断地培养对CFD的敏感和热忱是使他们逐渐成为CFD使用专家的重要因素．经过训练获得了专门技术，就具有了分析和解释数值解物理意义和数值精度的知识和能力．过去，使用CFD的人常常被流体流动的数学方程和数值方法所困扰，从而让使用者对学习CFD的前景感到沮丧．然而，CFD是理解流动过程基本原理和分析数值解的核心．因此，在学习CFD时，要将理论知识与实际经验相结合．CFD实践知识同CFD理论知识同样重要，通过CFD软件的实际使用可以激发使用者的积极性，更好地处理和解决流体流动问题．

本书试图调和CFD学习中这两种相互对立的方法．我们开始为第一次接触CFD的读者介绍大多数商业CFD软件以及某些CFD共享软件的特征．这些软件通常由具有成熟的处理流体流动问题的数值算法构建而成．为了便于评估软件的求解能力，现在几乎所有的CFD商业软件以及某些CFD共享软件都包含用户界面，友好的用户图形界面(GUI)环境用来输入问题的参数以及检验计算结果．因此，这些软件提供了完整的CFD分析所包含的三大要素：

- 前处理
- 求解器

• 后处理

本章试图以实际步骤为例来揭示 CFD 共享软件以及商业软件中上述三大要素的基本操作．图 2.1 表示了 CFD 分析中三要素之间内在联系的框图．本章将对这三大要素的功能进行详细介绍．

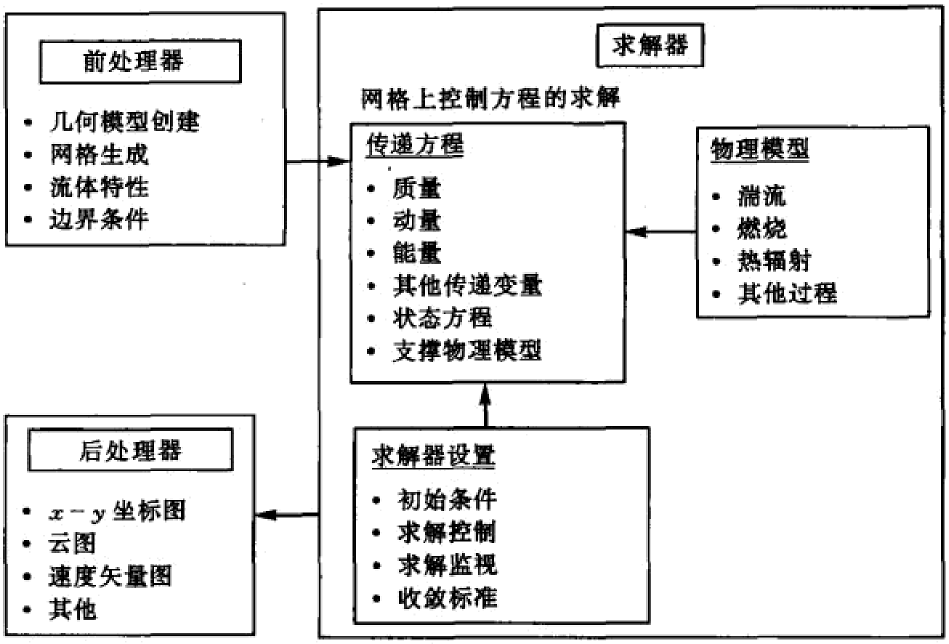


图 2.1 CFD 分析框架内三大组成部分之间的内在关系

2.1.1 CFD 共享软件

现今的 CFD 使用者可以从互联网上下载大量可用的 CFD 共享软件或免费软件．读者可以从 http://www.cfd-online.com/Resources/Soft.html#cfd/或 http://www.berkeley.ansys.com /cfd/CFD_codes.html/等网址选择"共享软件""免费软件"链接，得到 CFD 共享软件产品．

当然，首次使用 CFD 的使用者也许应该通过互联网访问 http://www.cfdnet.com/，获得即时开通的交互式 CFD 程序．为了自由进入交互式 CFD 程序，使用者首先需要注册．该网站为 CFD 的首次使用者提供需要求解的简单 CFD 流动问题，并且对计算结果可以用彩图显示．高级用户可以访问 http://www.cfd-online.com/，从该网站能够获得 CFD 所需的内容．

2.1.2 商业 CFD 软件

在 http://www-berkeley.ansys.com/cfd/ CFD_codes.html/链接下的软件目录中，通过"商业软件"选项可以了解当前市场上可以得到的商业软件的列表．表 2.1 显示了互联

网链接的流行商业 CFD 软件包，当然，该表所列可能有所遗漏．为开发用户友好的图形界面，商业 CFD 软件开发商已经投入了大量的时间、人力和财力，使得 CFD 易于处理非常复杂的流体流动问题．我们为首次使用 CFD 的读者展示了表 2.1 中 CFD 软件使用过程中的一些典型图形界面．图 2.2 和图 2.3 为 ANSYS-CFX 和 ANSYS-FLUENT 开发的用户界面．这些界面只是作为用户界面的实例展示给读者，并不作特别的解释．表 2.1 中的其他商业软件与上述商业软件具有非常相似的用户界面等外在形式和特征．使用这些软件时，读者将通过这些界面完成流动问题的设置和求解等诸多基本步骤，并获得 CFD 计算结果．下节将对这些步骤进行描述和讨论．

表 2.1　　某些流行商业 CFD 软件包网址

开发商	软　件	网　址
ANSYS	CFX	http://www.ansys.com/
ANSYS	FLUENT	http://www.fluent.com/
CD-Adapco	STAR-CD	http://www.cd-adapco.com/
CFD Research Corporation	CFD-ACE	http://www.cfdrc.com/
CHAM	PHOENICS	http://www.cham.co.uk/
Flow Science	FLOW-3D	http://www.flow3d.com/

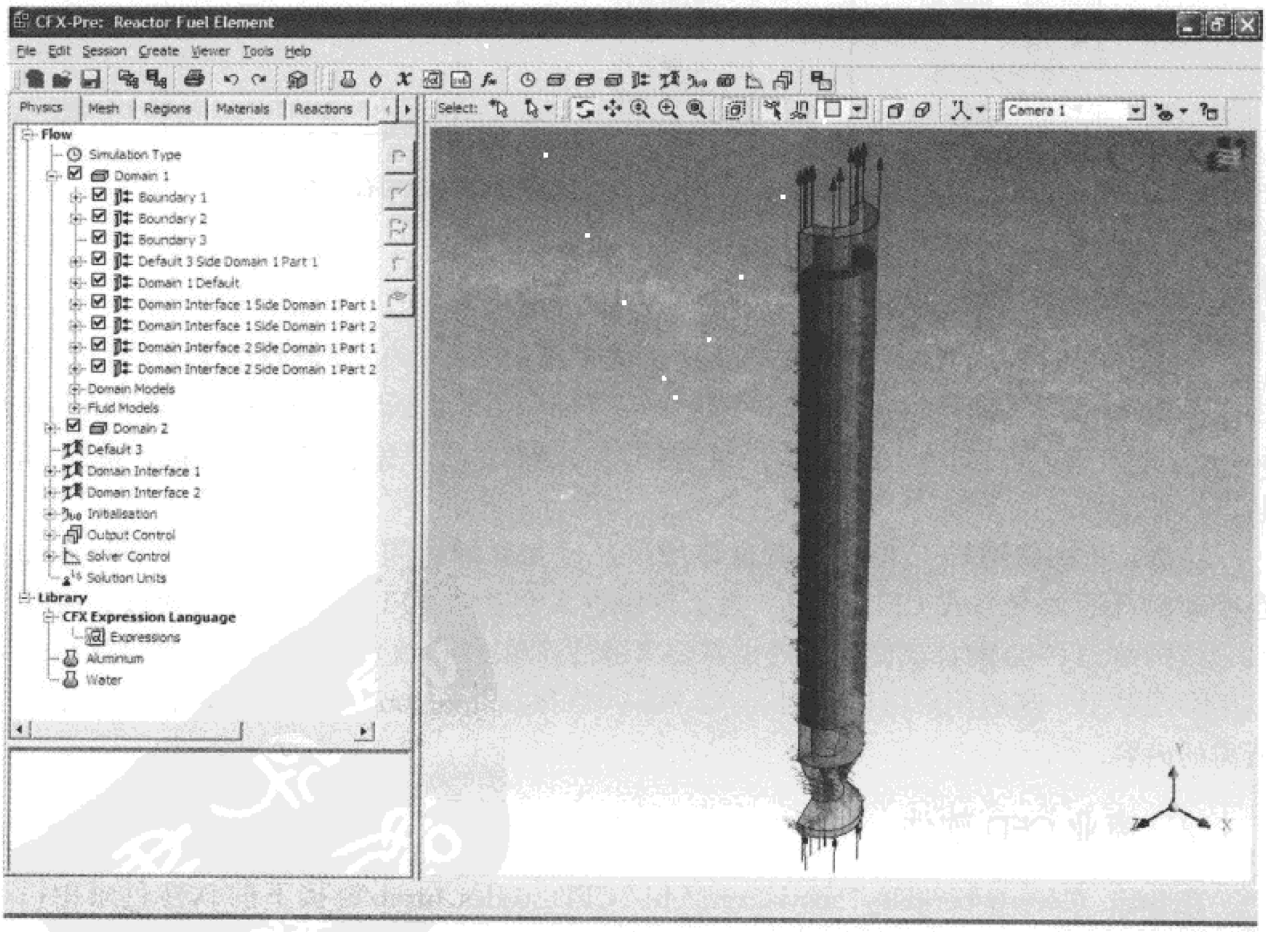


图 2.2　典型 ANSYS-CFX 图形化用户界面

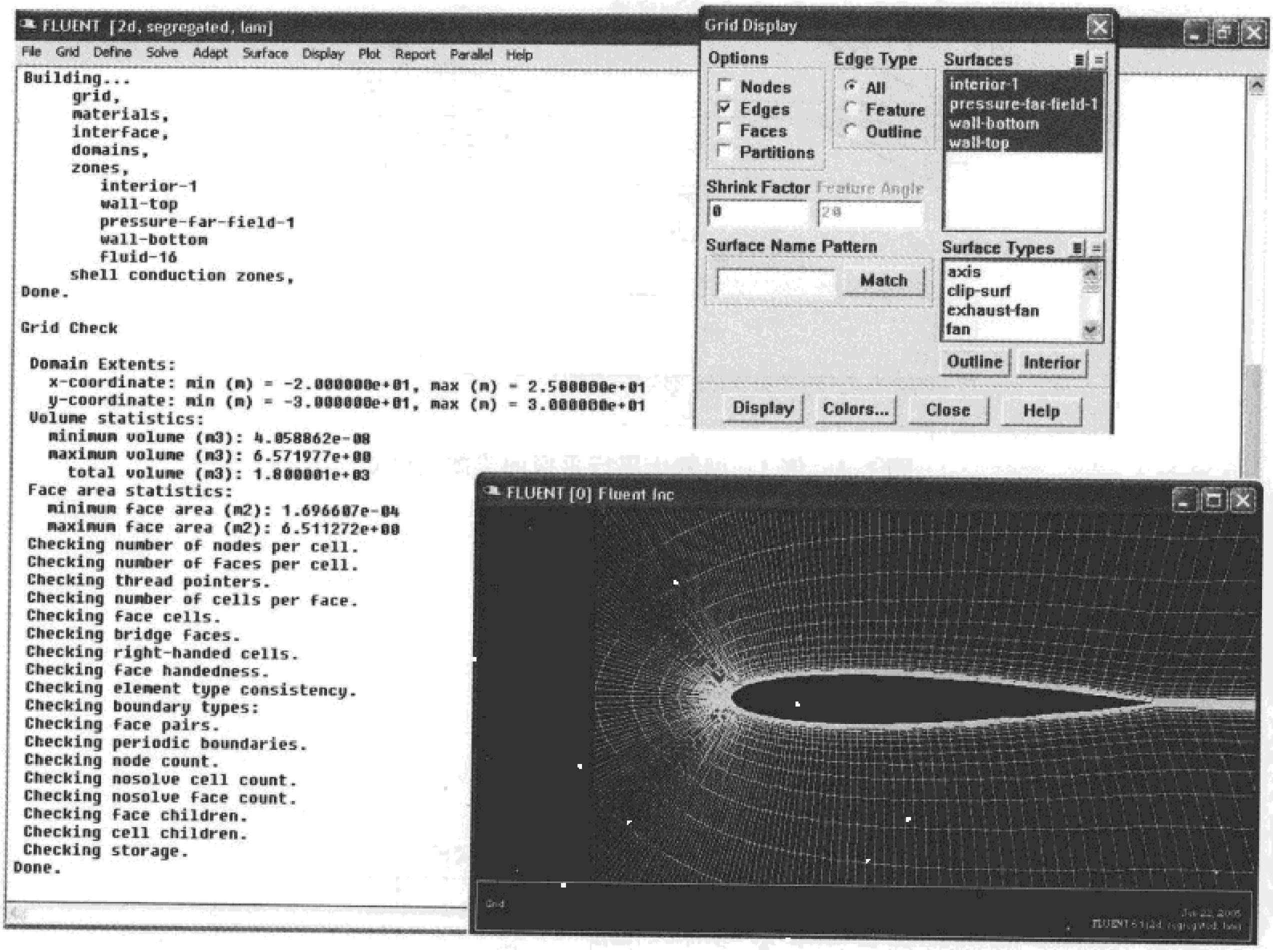


图 2.3 典型 ANSYS-FLUENT 图形化用户界面

2.2 问题的确定：前处理

2.2.1 第一步：几何模型创建

在任何 CFD 分析中，第一步都是对流动区域(即 CFD 的计算域)的几何形状进行定义和构建．考虑两种流动情况：流体在两静止平行平板间的流动(例 1)以及流体流经开放空间内的两个圆筒的流动(例 2)．我们用图例表示例 1 和例 2．图 2.4 及图 2.5 分别显示了求解问题的真实物理流动的“物理区域”．我们假设例 2 中两个圆筒的长度与整个区域的宽度 W 相等．为了使流动沿横向保持不变，我们还假设两实例三维物理区域内流动宽度 W 足够大．因此，例 1 和 2 可以简化为二维 CFD 计算区域．这两个流动实例将在前处理、求解以及后处理阶段的各个基本步骤中被反复用到．

这两个流动问题具有截然不同的特性．例 1 为内流问题，而例 2 为典型外流问题．在这两个问题中，流体都是从计算域的左侧边界流入，从其右侧边界流出．两种流动之间

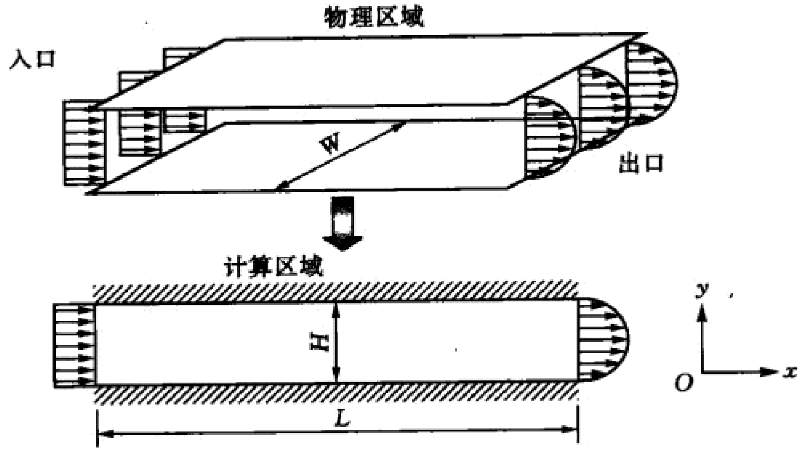


图 2.4 例 1：两静止平行平板间流体的流动

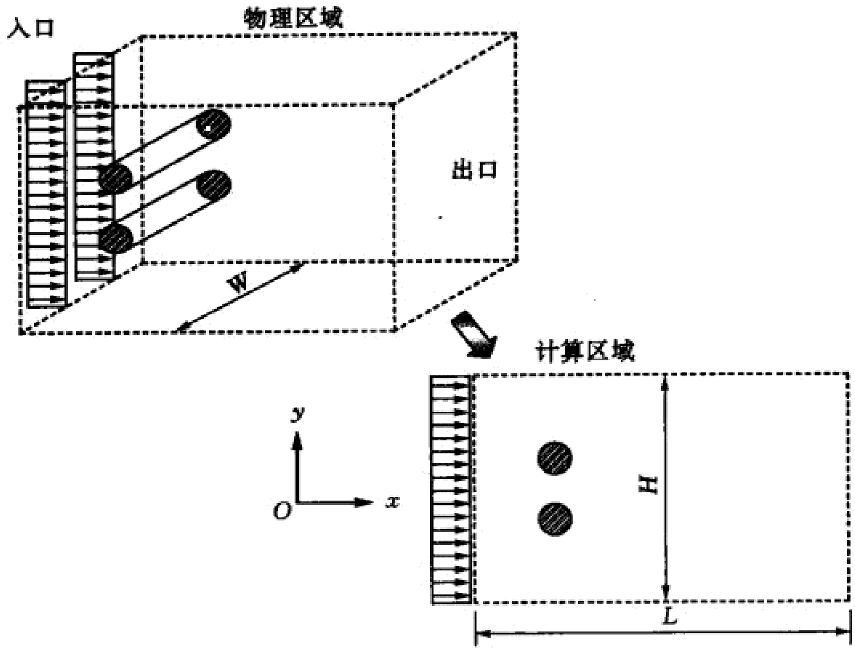


图 2.5 例 2：开放空间中两圆筒间的流动

的主要区别是上部边界和底部边界，这两种边界在内流和外流中有明显的差别．例 1 中，流体流动被限定在两个静止的刚性水平平板间的区域内．例 2 中，在上部边界和底部边界处，流体可以采用流入或流出边界条件．

用于 CFD 计算的几何模型中，读者应注意的一个重要方面是计算域长度 L 内流体流动应充分发展．对于例 1，我们要求流体在流动区域内“充分发展”．“充分发展”的概念将在第 3 章中进行详细的解释．对于例 2，我们要求流体流过圆筒在其后面产生的复杂尾迹得到“充分发展”．这种现象与流体流过两个圆筒时通常会产生的旋涡及其脱离现象相似．在例 2 中，上部和底部边界可能会对流经两圆筒的流动产生影响，计算域高度 H 的选取既要有一定的距离以充分消除这些边界对流体流过两圆筒的影响，同时又要避免

CFD 计算量过大．关于该问题的实际处理方法，详见第 6 章．

2.2.2 第二步：网格生成

在前处理阶段，定义完计算区域的几何尺寸之后，第二步是最重要的网格生成．CFD 需要将计算域划分为大量的更小的、无重叠的子区域，用这些子区域来求解已经创建的几何区域内的流动现象，即在计算几何区域内生成单元网格，并覆盖整个计算区域．通常要对描述流体基本流动行为的各个单元进行数值求解，这样就可以确定速度、压力、温度以及其他感兴趣的反映流体流动特性的传递变量的离散值．这就是 CFD 对流动问题的求解过程．CFD 解的精度由计算域内网格单元的数目决定．一般说来，足够多的单元数量能够获得要求的计算精度．然而，求解精度受到计算成本和计算周期的严重制约．关于数值计算精度和计算效率，将在第 5 章中进行探讨．

工业 CFD 项目通常会将绝大部分时间用在计算区域的网格生成上．大多数商业 CFD 软件都具有各自专门的 CAD 界面，可以与固体模型软件包，如 PARASOLID，PRO/ENGINEER，SOLID EDGE，SOLID WORKS 以及 UNIGRAPHICS 等进行数据通讯，这样易于几何模型的创建，大大提高几何建模的创建效率．内置于这些程序中功能强大的网格生成器可以在创建的几何形状中生成网格．当然，读者应该清楚，CFD 使用者需要在计算精度和求解成本两者之间作出适当的折中，这就需要技巧．CFD 计算中，合适网格的生成将在第 6 章中作进一步的讨论．

例 1 和例 2 的网格生成步骤如图 2.6 和图 2.7 所示．对于相对简单的几何形状，如例 1，其几何区域的创建通常可以采用规则矩形单元等结构化网格覆盖整个计算区域．图 2.6 显示了例 1 中几何图形内 20(长)×20(高)共计 400 个网格单元的分布．对于更复杂的几何形状，可以采用三角形单元网格，以满足复杂边界形状的需求．图 2.7 显示了例 2 中计算域内典型的三角形单元分布，在整个流动区域内的网格总数为 16637 个．

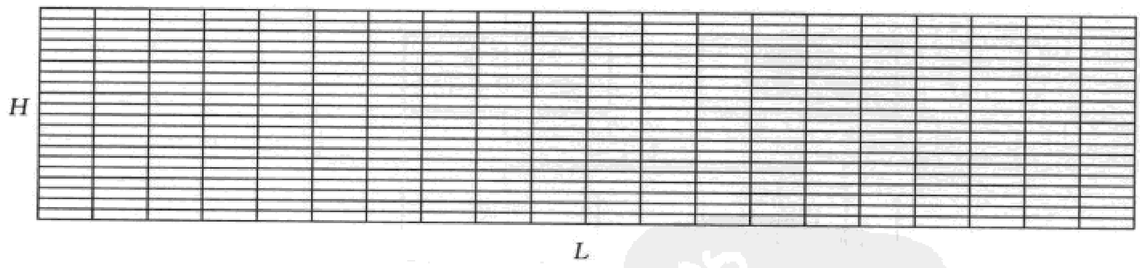


图 2.6 两平行平板间流体流动的结构化网格

例 1 和例 2 中，计算域内的网格形式只是为了阐明网格生成的步骤，其采用的网格结构并不是一成不变的．例 1 中可以用非结构化网格代替结构化网格，反之，在例 2 中也可以用结构化网格代替非结构化网格．对于某些包括复杂几何形状的实际流动问题，常常需要将结构化网格和非结构化网格结合起来使用．网格生成的更多实际指导详见第 6 章．

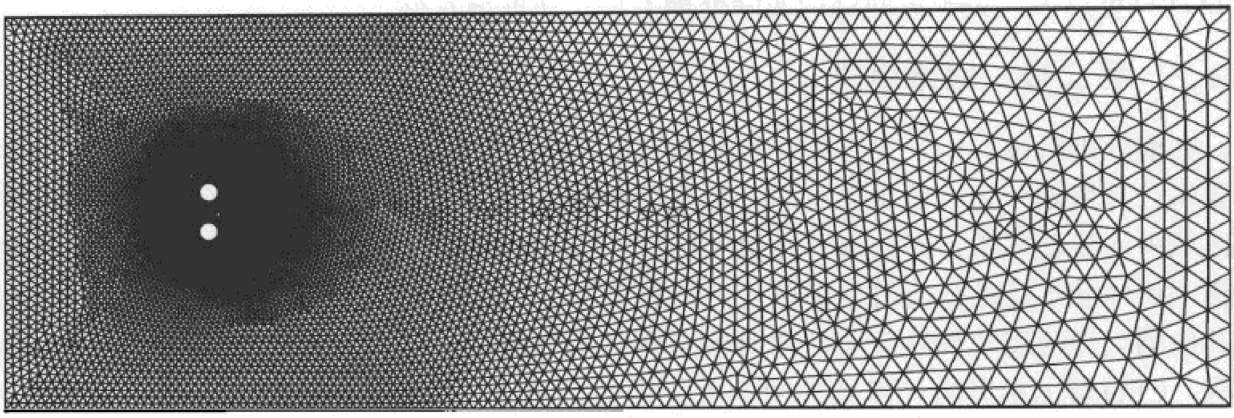


图 2.7 开放空间中流体流经两圆筒的非结构化网格

2.2.3 第三步：物理特性和流体特性选择

很多工业 CFD 流动问题可能需要求解非常复杂的物理流动过程，比如燃烧流体流动中的复杂化学反应．CFD 计算中的燃烧以及辐射模型通常是成功模拟该类流动的关键．燃烧和辐射过程对局部和整体传热将产生重要影响，进而影响到整个流域的流体动力学特性．因此，CFD 使用者需要仔细确认特定流体流动系统中的流动物理特性．

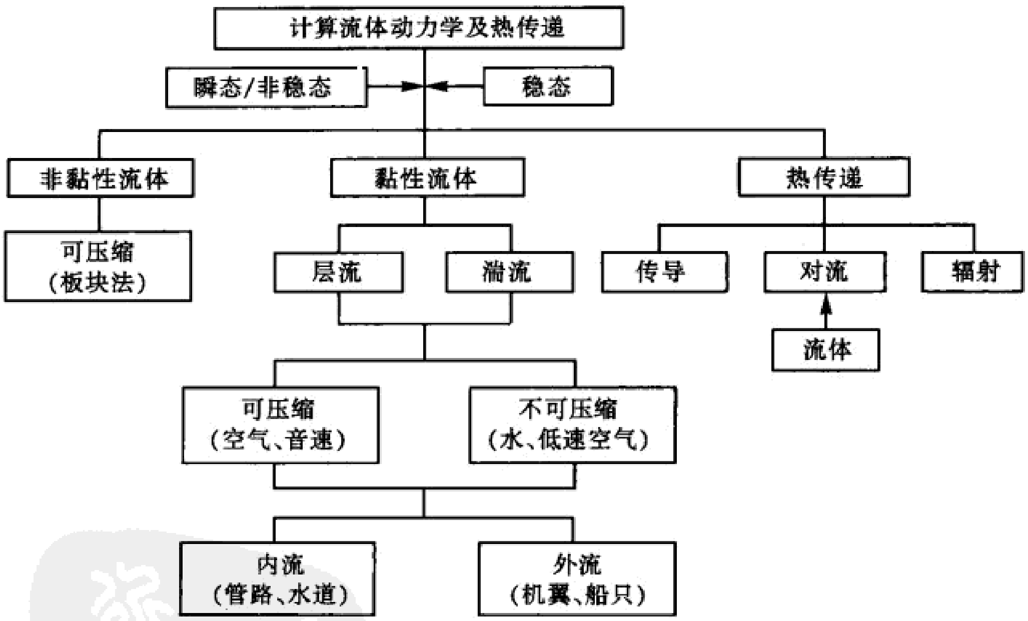


图 2.8 CFD 中不同的流动物理现象简图

图 2.8 给出了 CFD 中可能遇到的各种流动物理特性和传热过程简图．在流体动力学和热传递计算中，CFD 使用者在计算之初，首先要确定所模拟流动系统的流动状态是瞬态的还是稳态的，然后定义流动流体的类别是非黏性流体还是黏性流体．非黏性流体流动一般是可压缩的，其流动压缩的物理特性通常可以通过板块法(Panel Method)方法加以处

理．而黏性流体流动存在层流和湍流两种状态．在这两种流动状态当中，需要事先知道流体是可压缩的还是不可压缩的．黏性流体要区分内流和外流，以便使用者恰当处理不同类型的流动问题，其实我们在 2.2.1 节中已经对此进行了讨论．此外，热传递可能对流体流动过程产生重要影响．热传递包括传导、对流和辐射三种形式．对流是对流流体驱动下热量传递的主要形式．然而，某些时候热辐射和热对流同时存在，并在热传递中起到主要作用，火焰的膨胀便是如此．

下面回顾上述前处理过程中的各个基本步骤．在第一步中，我们对例 1 和例 2 创建了二维计算区域．第二步，以例 1 结构化网格、例 2 不同尺寸非结构化网格为例说明了网格生成．第三步，包括流动问题物理现象的确定和表达．如上所述，为了正确模拟流体流动的特征，CFD 使用者必须选择合适的流动物理特性．例 1 和例 2 简化为稳态黏性层流、不可压缩以及等温(无热交换)流动．确定流动域内流体的种类对设置流动物理特性是相当重要的．例如，空气或水具有独特的流体特性和传热特性．因此，在前处理步骤中，需要对流体特性进行适当的赋值以正确描述特定流体．在很多商业 CFD 软件中，流体的特性，如密度和动力黏度，一般可以通过软件的图形界面进行赋值．图 2.9 表示了 ANSYS-CFX

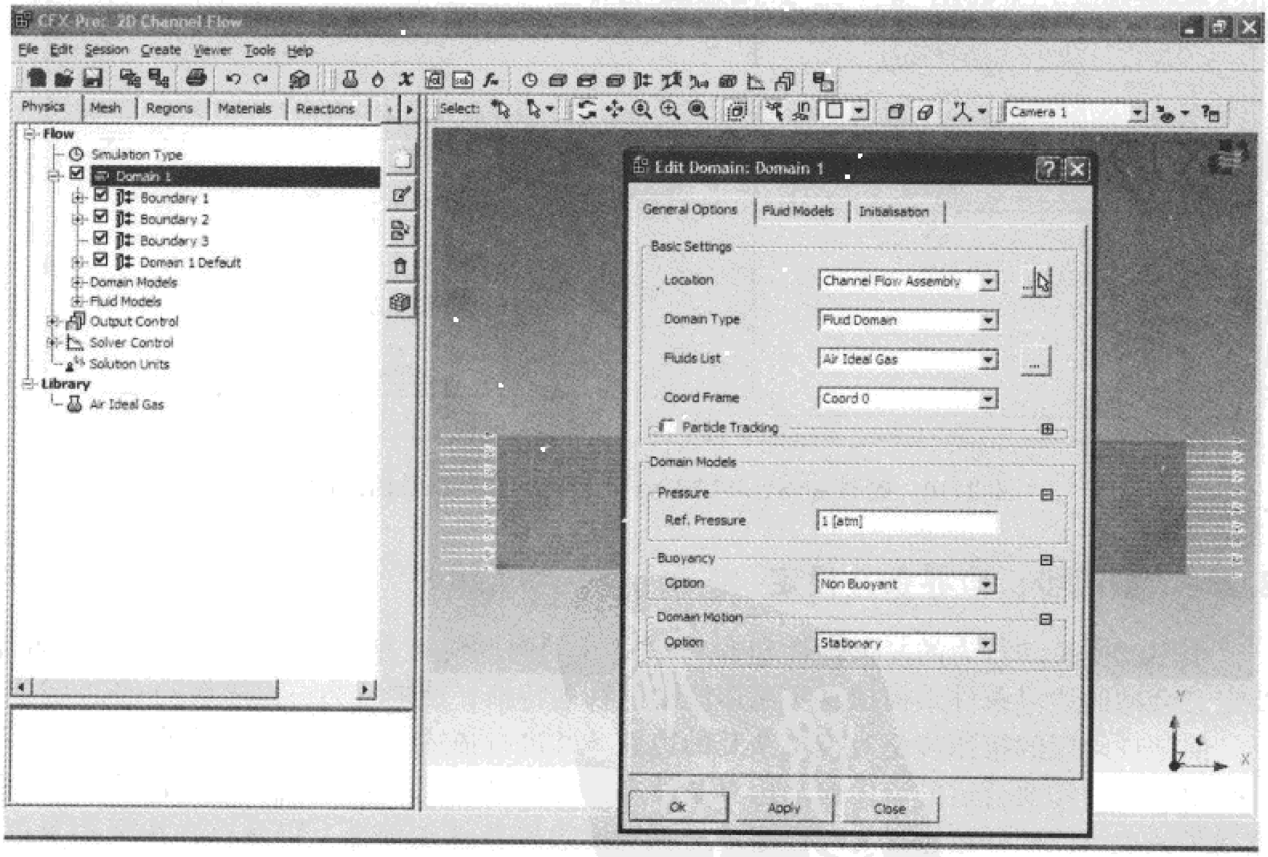


图 2.9 典型 ANSYS-CFX 选择流体流动特性的图形界面

的用户图形界面，用户可以在右面窗体环境的“流体列表”中选择流动问题中的流体，或

者通过位于顶部的“Materials”选项中选定流体．图 2.10 为 ANSYS-FLUENT 用户图形界面，使用者可以通过“Materials”窗体表述流体的密度和黏性值．软件中默认的流体为空气，使用者还可以打开软件的内部数据库，通过“Database Materials”选择其他流体，从而改变流体的种类．对于具有热传递的流动问题，还需要添加如导热系数、比热容等热特性，这些在 ANSYS-CFX 和 ANSYS-FLUENT 的用户图形界面中很容易实现．

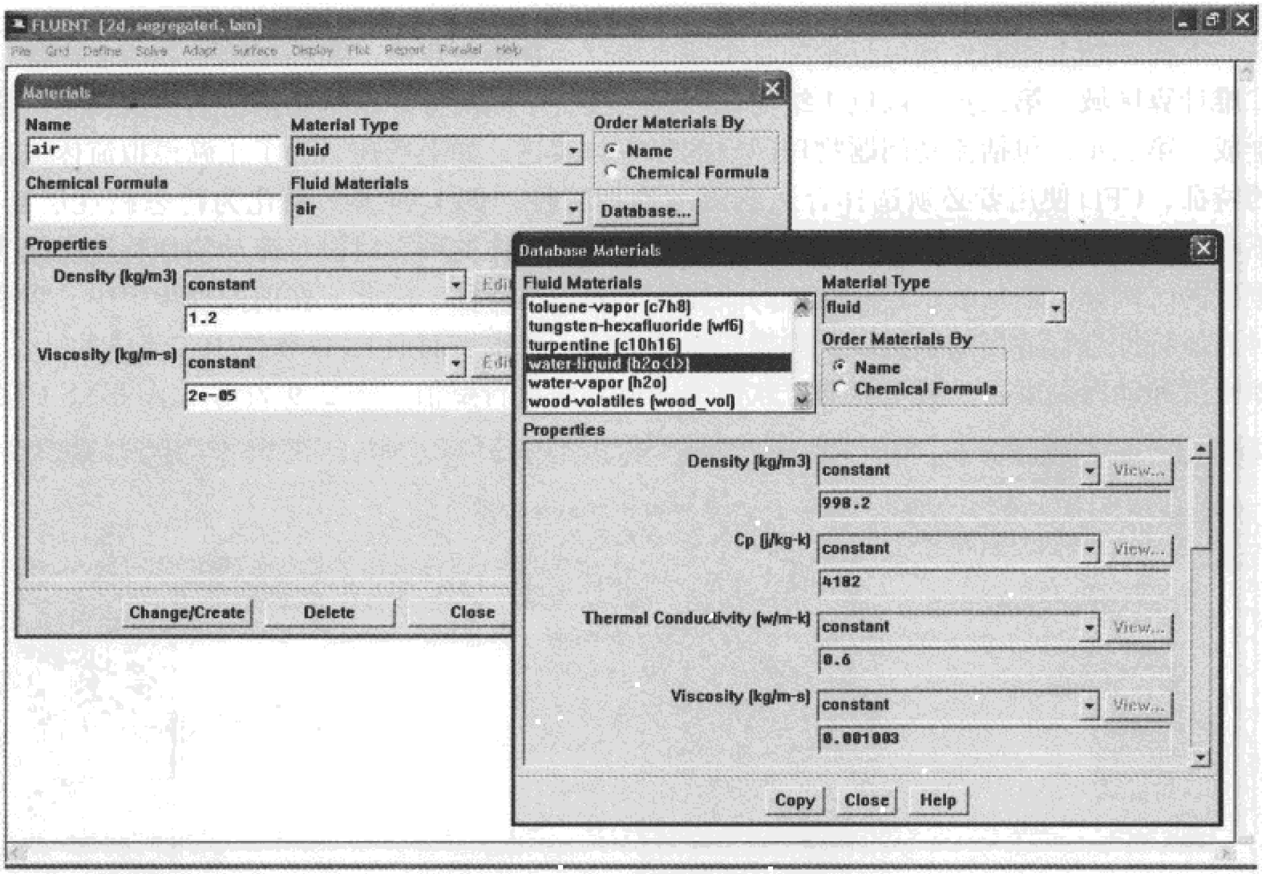


图 2.10　典型 ANSYS-FLUENT 选择流体流动特性的图形界面

2.2.4　第四步：边界条件设定

很多流体流动行为的复杂特性包含在表述流动问题的边界条件之中．CFD 使用者需要定义合适的边界条件来模拟真实流体流动的物理特性，使之成为可以求解的 CFD 问题．

前处理阶段的第四步是对模拟涉及的边界条件进行描述．显然，在流动域内存在流入和流出边界，需要合适的流体流动边界条件来描述流体进入和离开流动区域的流体特性．流动区域也可以用开放边界加以设定．尽管开放边界条件在理论上仍然存在很大的争议，但与 CFD 中其他理论上可选边界条件相比，开放边界条件的描述最为简便．对于形成流动几何形状的静止固体壁面，以及流动区域内障碍物的周边壁面，也需要赋予恰当的边界条件．

我们以例 1 和例 2 为例说明 CFD 计算中边界条件的应用．例 1 和例 2 的边界条件如图 2.11 和图 2.12 所示．

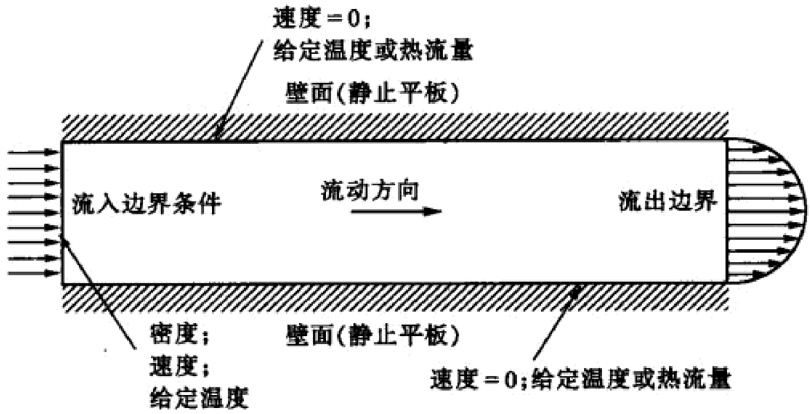


图 2.11 例 1：内流问题的边界条件

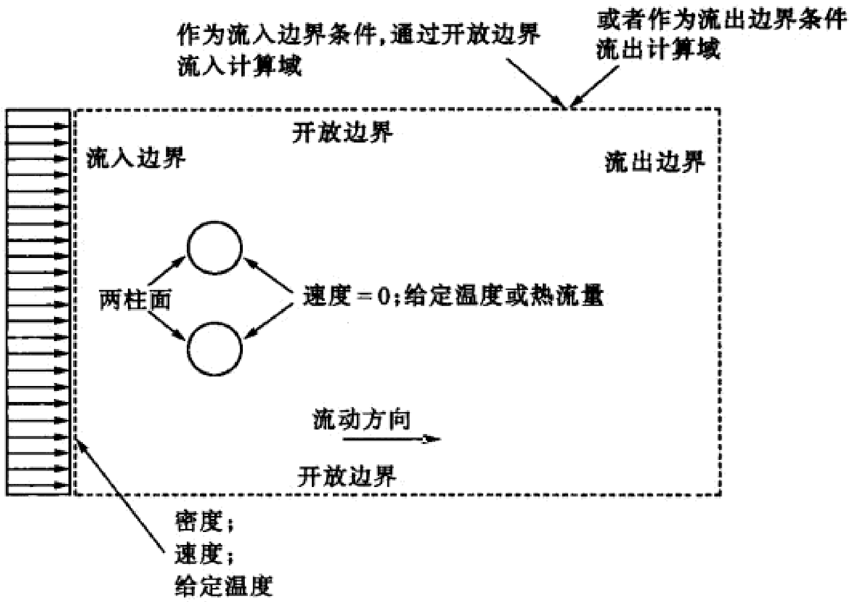


图 2.12 例 2：外流问题的边界条件

在 2.2.3 节中，例 1 和例 2 假设为黏性流体、层流、不可压缩以及等温流动，只需对计算域内所有壁面上的流体速度进行描述．例 1 中，流动区域的外部静止固体边界上的速度定为 0(见图 2.11)；例 2 中，两个静止圆筒固体壁面上的速度定为 0(见图 2.12)．对于流入边界条件，需要确定入口流体速度，以便限定进入计算区域的流体．表示流体离开计算域的出口边界条件只有一个，一般采用相对压力．对于开放式边界，流入或流出边界条件都可以采用“远场”(far-field)流动边界条件．只有将开放边界设定在距离我们感兴趣的区域足够远时，才能获得有物理意义的结果．因此，对开放边界的处理需要认真练习．

为了说明第四步，图 2.13 和图 2.14 分别给出了 ANSYS-CFX 和 ANSYS-FLUENT 对例 1 定义边界条件的典型用户图形界面. 在商业软件中，固体壁面边界条件通常为默认边界条件，因此无须操作者另行设定. 启用如图 2.13 所示的 ANSYS-CFX 窗体环境，使用者首先要通过“边界类型”(Boundary Type)对每一个边界进行逐一定义. 左边界(边界 1)选择为入口边界(inlet)，右边界(边界 2)选择为出口边界(outlet)，在“边界参数”(Boundary Details)中设置入口速度值和出口平均静压力. 如图 2.13 所示，对例 1 选择边界条件时，ANSYS-CFX 和 ANSYS-FLUENT 用户图形界面具有相似的窗体环境. 在“区域”(Zone)内定义流动区域的边界，例如，左侧边界选为“入口”，右侧边界选择为“出口”. 在子窗体“类型”(Type)的边界类型列表中，通过“区域名称”(Zone Name)界面“入口”和“出口”，用户可以用“速度入口”(velocity-inlet)对左侧边界设置速度值，通过“压力出口”(pressure-outlet)对右侧边界设置压力(表压)值. 例 2 对流入和流出边界的定义步骤同例 1 相同，但例 2 需要增加一个步骤，即对开放边界进行说明. 在 ANSYS-CFX 中可以首先定义一个附加边界，称为“边界 3”；在 ANSYS-FLUENT 中可以首先定义一个区域，称为“开放区”. 然后通过用户图形界面选择适当的边界，这样很容易获得开放边界.

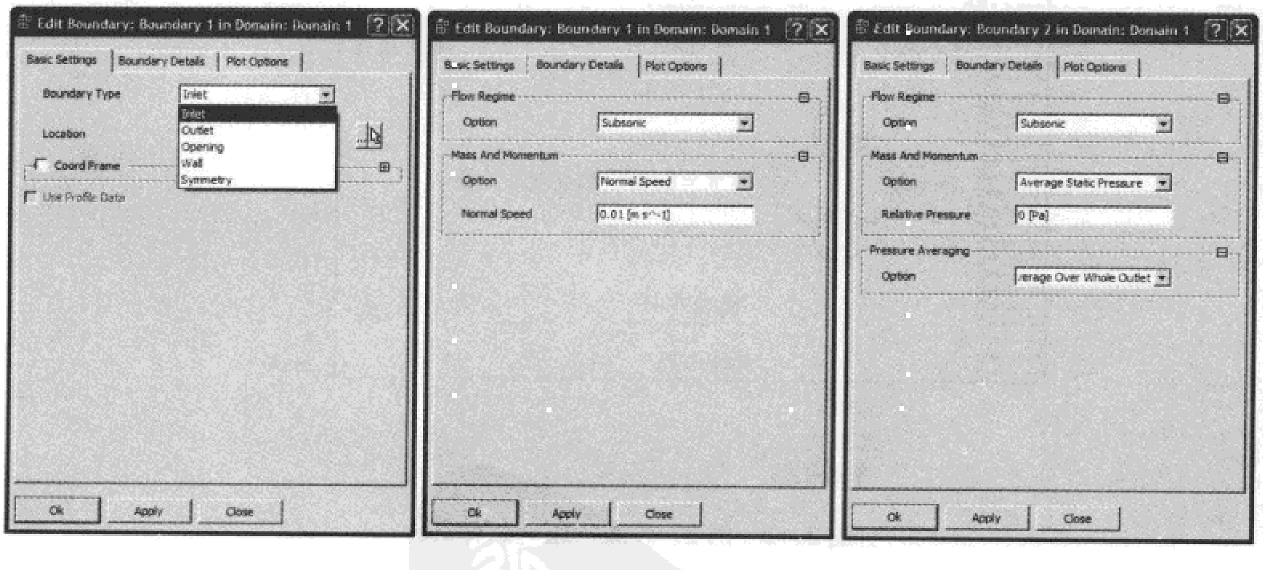


图 2.13 通过典型 ANSYS-CFX 窗体环境设置边界条件

当例 1 和例 2 涉及传热占主导地位的流体流动问题时，如图 2.11 和图 2.12 所示，还需要对流动区域的表面边界和障碍物进行描述：给定温度或热流量分布. 在浮力驱动下的可压缩流动以及燃烧流动中，流体的密度随温度变化很大，需要求解流动区域内各处流体的密度. 在流入边界处，需要对流入计算区域的、与特定流动相关的密度进行设定，通常由温度和压力直接确定. 在流出边界处不需要密度边界条件，这是因为流体密度是流出出口边界的流体特性. 对于例 2 中的开放边界，流体密度可由流入边界条件或流出边界条件

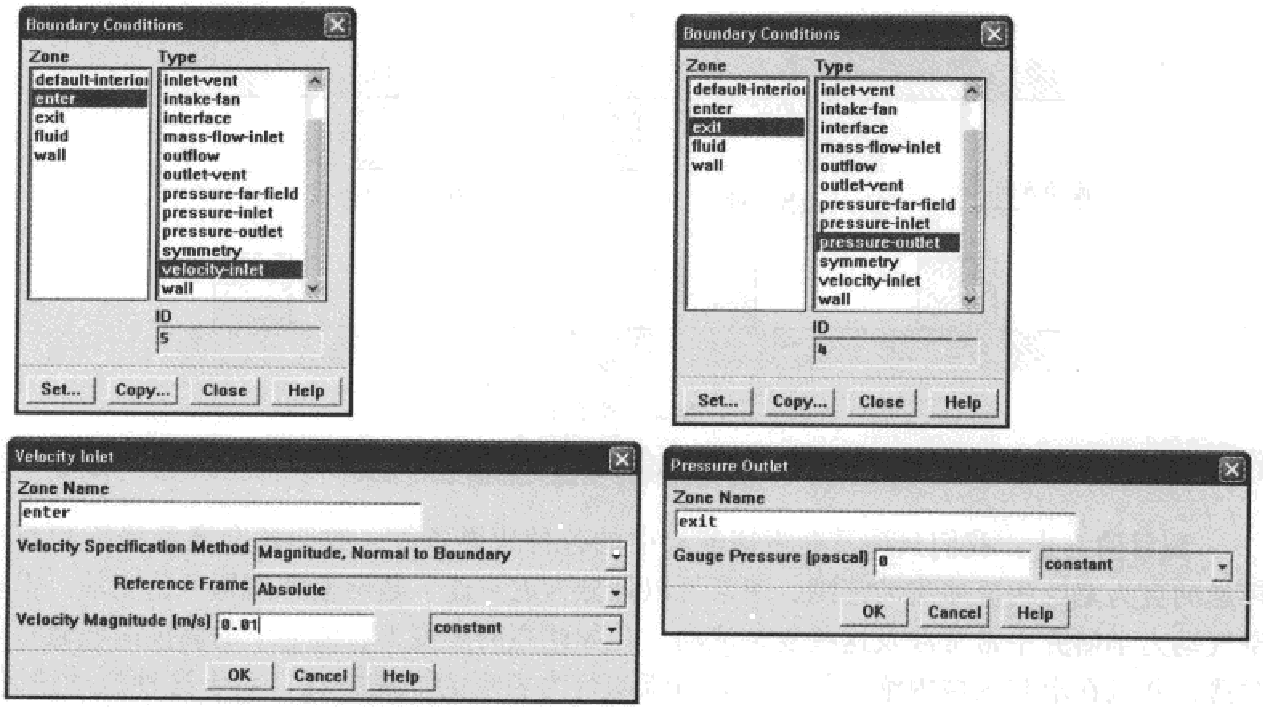


图 2.14　通过典型 ANSYS-FLUENT 窗体环境设置边界条件

描述.

CFD 软件通常允许指定入口压力和出口压力或质量流量边界条件. 通过在边界上设置固定的压力值，取代边界上的流量变化，以确保计算域流体内正确的质量流入与流出. 也可以直接给定边界上的质量变化，用质量流量代替压力以保持流动域内总质量的平衡. 利用求解区域特殊的几何形状，可以采用对称和周期边界条件来提高计算效率，并且可以在简化的几何形状上增加网格单元的数量来提高计算精度. 图 2.15 显示了例 1 的几何形状，可以采用对称边界条件；图 2.16 显示的几何形状，则可以采用周期边界条件. 本节描述的流体流动系统的各种边界条件的物理意义将在第 3 章中详细阐述.

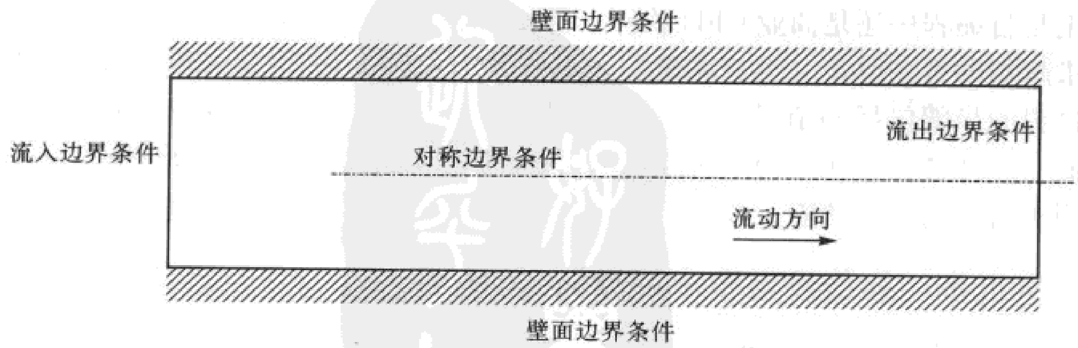


图 2.15　定义例 1 的几何边界条件

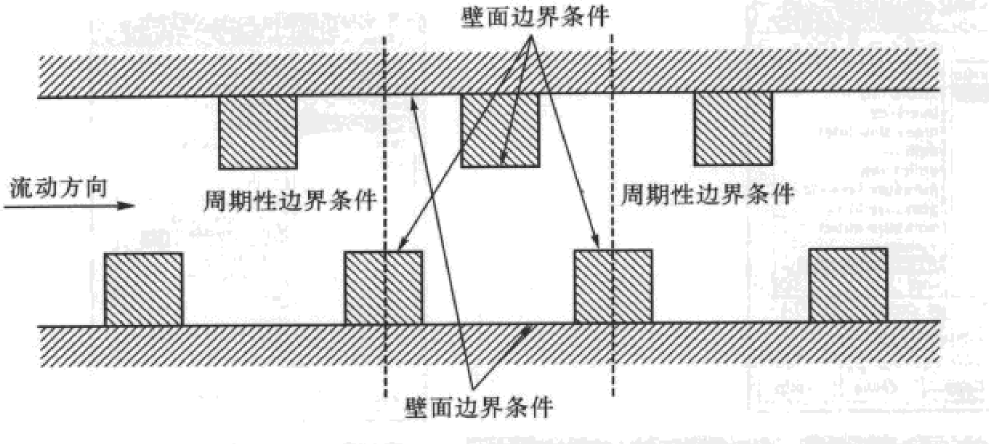


图 2.16 对特定几何形状定义周期边界条件

到目前为止，我们只涉及亚声速流动中的各种边界条件．我们还会遇到接近和超过声速的更为宽泛的流体流动范围，通常可以划分为近声速、超声速和高超声速流动．很多空气动力学研究中常常涉及这些复杂流动．在如此高的速度下，流动中的黏性区域通常非常薄，并且在求解区域内绝大部分流体的流动行为表现为非黏特性．对于这种流动情况，如果缺乏流动特性的基础知识，就不可能对各种边界条件进行正确的描述．将以黏性流动为主体的边界条件应用到非黏性控制体流动中时，对激波在流动域内传播的描述可能不符合物理规律．对于超声速流动，如何应用合适的边界条件，我们将在第 7 章中介绍．对近声速和高超声速流动中边界条件的更为细节的讨论和研究，感兴趣的读者可参见 Fletcher (1991)和 Anderson(1995)等人的文献．尽管大多数商业软件都声称具有求解所有流体流动区域——亚声速、近声速和/或超声速——的能力，然而，这些软件通常只是对亚声速的求解非常有效．

2.3 数值求解：CFD 求解器

无论是自编程序还是商业 CFD 软件，都要明了 CFD 求解器内部的数值计算方法．本节涉及求解器的各个要素．CFD 求解器可由如图 2.17 所示的求解过程流程加以描述．数值求解过程的步骤包括初值设定、求解控制、求解跟踪、CFD 计算以及收敛检查．自编或使用商业 CFD 软件的使用者都必须对 CFD 求解过程及相关知识有所了解，这样才能很好地使用求解器的多种功能，并且更好地驾驭这些程序在“黑匣子”中的运行．

2.3.1 第五步：初值设定和求解控制

CFD 分析的第五步包括 CFD 求解中的两个重要步骤：初值设定和求解控制．

首先，需要将真实流体流动中隐含的物理现象(一般是复杂的非线性流动)转化为通过迭代方法可以求解的主要物理现象．迭代过程一般包括所有的流动特性，如速度、压力、

温度以及其他感兴趣的传递参数的离散值．在求解计算开始之前要对参数初始化．理论上，初始条件可以任意给出．然而在实际计算时，采用适当的初始条件有很多好处．初始条件对迭代过程至关重要，作为CFD使用者，选择合适初始条件的原因有如下两个方面。

• 如果初始条件接近最终稳态解，那么将加速迭代过程的收敛，节省计算求解时间．

• 如果初始条件远离真实解，那么将延长获得期望收敛解的计算时间；而且，不适当的初始条件可能会使迭代过程出现错误而产生迭代发散．

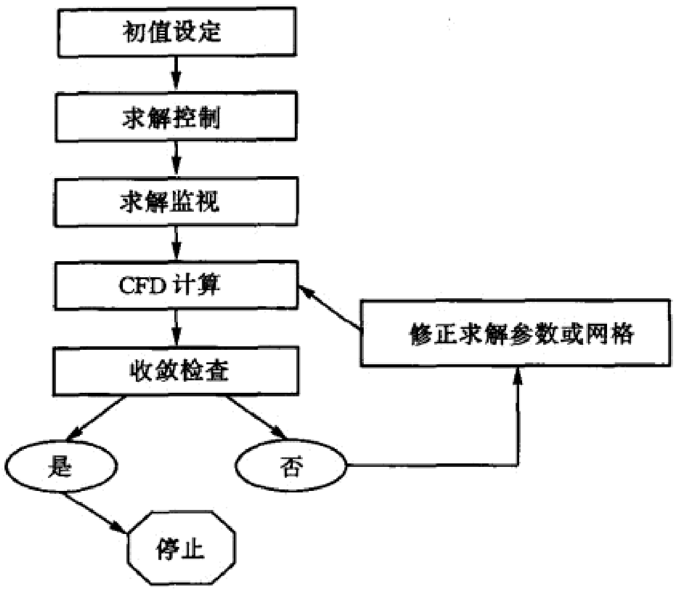


图 2.17 求解过程框图

第二，在“求解控制”(solution control)中设定合适的参数，一般包括合适的插值格式(discretisation (interpolation) schemes)和适当的迭代求解器(iterative solvers)．

几乎所有的商业软件都采用有限体积法(见第 4 章)作为标准数值求解方法．软件中，流体流动的控制方程在空间有限体积单元上的代数形式通常用有限差分形式来近似．单元体积的每一个表面处，需要求解的传递变量的表面通量可以通过不同的插值格式来实现．常用的插值格式有一阶迎风格式、二阶迎风格式、二阶中心差分格式以及 QUICK (Quadratic Upstream Interpolation Convective Kinetics)格式．由于中心差分格式不能判别流动方向，因此与流体流动上游相关的差分格式，如迎风格式和 QUICK 格式等，成为主要的差分方法，这样就可以解决流动方向问题．选择高阶插值方法可以在单元表面处获得期望的计算精度．在很多商业软件中，常常采用 SIMPLE，SIMPLEC 或 PISO 等算法进行求解，以确保压力与速度之间的正确联系以及流动域内的质量守恒．此外，我们关注的不是 CFD 程序中的诸多内在数值特性，而是按照很多 CFD 软件中提供的标准选项简单地选择插值格式和压力-速度耦合方法．图 2.18 显示了 ANSYS-FLUENT 用户图形界面列表，以及从中可选的压力-速度耦合方法和插值格式．在进行 CFD 计算之前，关于如何从选项中作出恰当选择的背景知识至关重要．关于插值格式和压力-速度耦合方法的数值问题，将在第 4 章以及第 6 章中进行更多的讨论并给出实用指导．

迭代求解器即所谓数值计算的“数字破碎机”，在数值计算中用于求解代数方程．比较成熟的求解器，如代数多重格子(Algebraic Multi Grid (AMG))方法、共轭梯度(conjugate gradient)方法等，已经成为很多商用软件中的标准方法．其他常用求解器，如 Stone 方法的强隐方法(Strongly Implicit Procedure (SIP))以及 TDMA 逐线迭代方法(line-by-line procedure)也已经被 CFD 圈内很多人广泛采用．第 4 章中对求解器将作更进一步的描述．

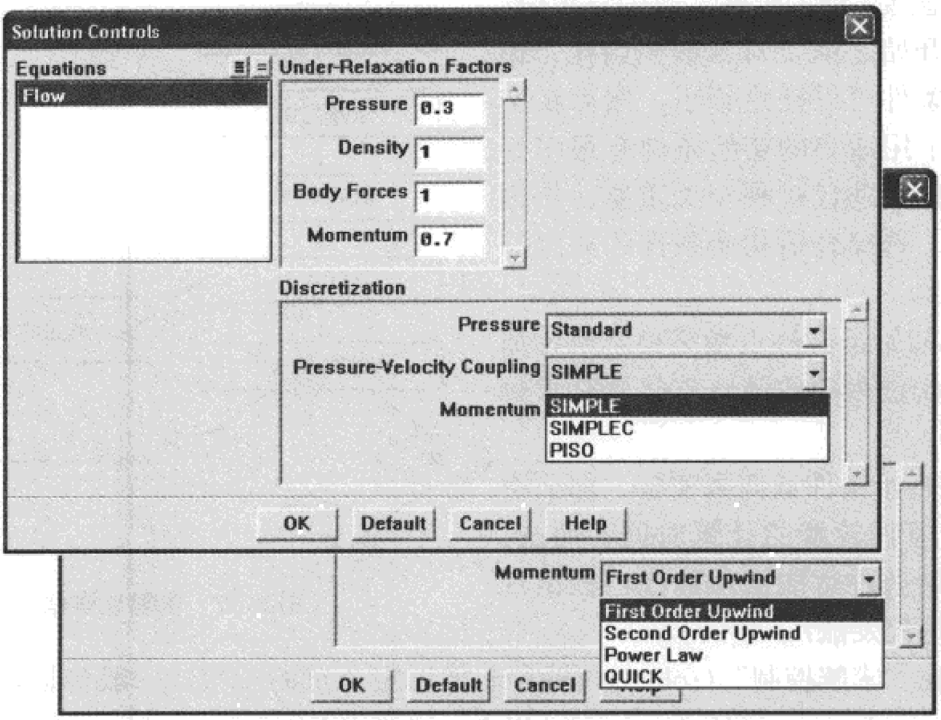


图 2.18 典型 ANSYS-FLUENT 选择不同压力-速度耦合方法和插值格式的图形界面

在商业软件中，为提高矩阵运算效率，对求解器内的求解器控制参数进行了优化设置．通过软件中默认设置一般可以获得理想的运算结果．

至此，第五步完成了 CFD 问题中与流体流动过程相关的各种物理特性的描述．在下一步中，将以 2.2.1 节中例 1 和例 2 所描述的流体流动问题为例，通过 ANSYS-CFX 和 ANSYS-FLUENT 典型用户界面说明图 2.17 中 CFD 计算迭代求解过程．为说明数值计算的重要特性，我们采用默认插值方法和压力-速度耦合方法，并保持控制迭代求解器的最佳控制参数．

2.3.2 第六步：收敛监视

CFD 求解的第六步包括相互联系的三个重要操作过程：求解监视，CFD 计算和收敛检查．CFD 计算求解成功的标志是迭代收敛(具体见第 5 章)和网格独立性(具体见第 5 章、第 6 章)．

迭代收敛性可以通过跟踪每一次迭代前后代数方程数值解之差[通常称为残差(residuals，具体见第 4 章、第 5 章)]来评估．在商业软件的用户界面上能观察到迭代过程中残差的变化．迭代过程中的残差可以衡量流动特性的整体守恒性．图 2.19 和图 2.20 分别显示了 ANSYS-CFX 和 ANSYS-FLUENT 对例 1 进行迭代时残差变化的用户图形界面．残差持续下降清晰地表明迭代过程将收敛而不是发散．求解控制参数事先设置于迭代求解器中，

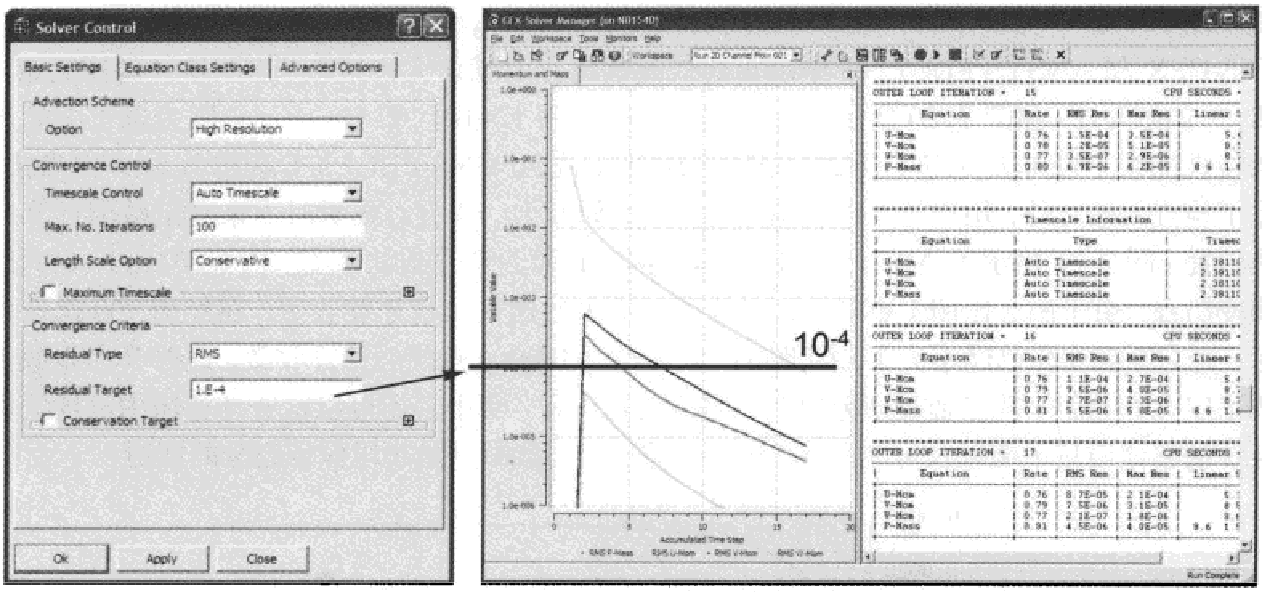


图 2.19 典型 ANSYS-CFX 收敛监视以及对应收敛条件的图形界面

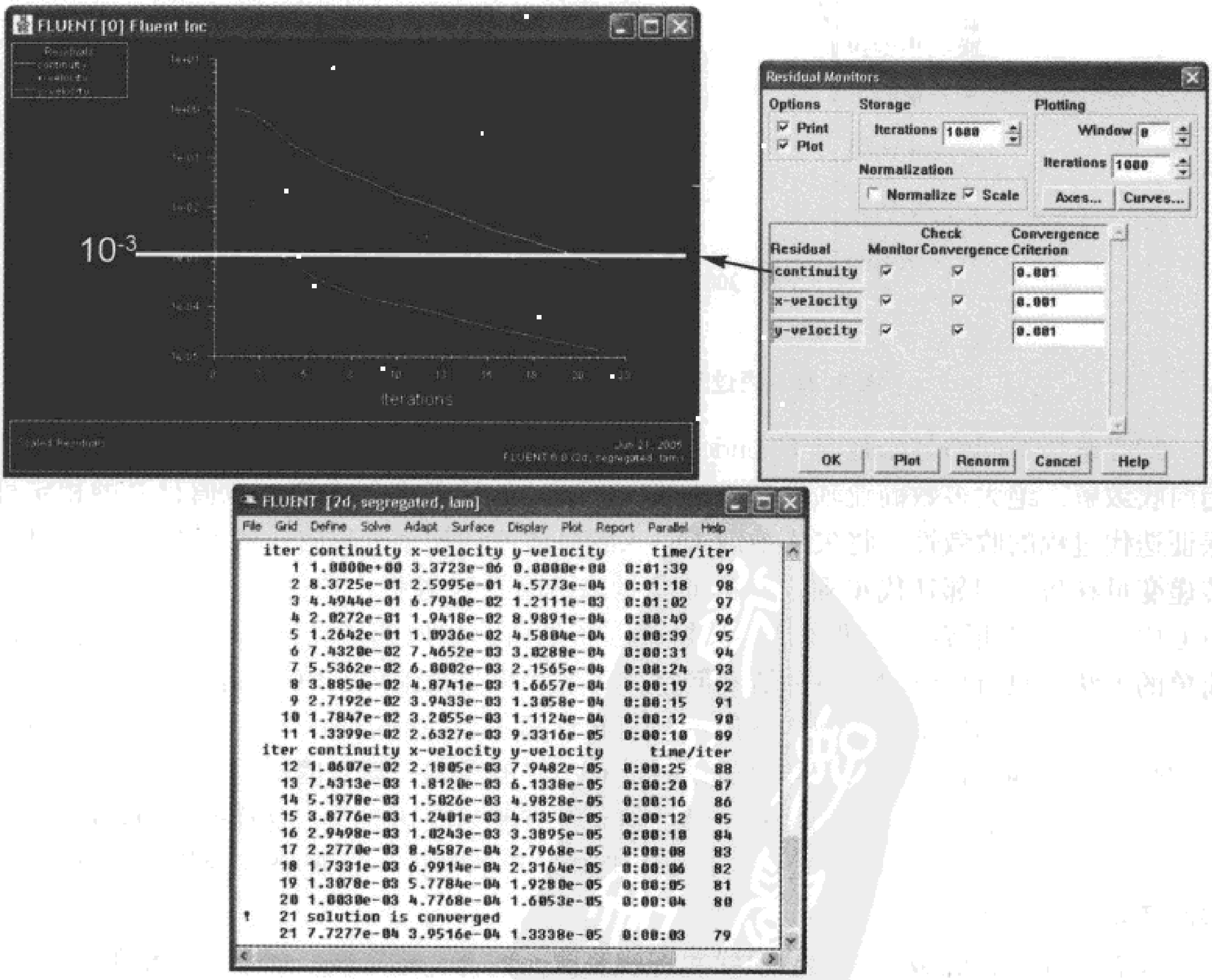


图 2.20 典型 ANSYS-FLUENT 收敛监视以及对应收敛条件的图形界面

当残差小于某一收敛标准或允许残差(具体见第5章)时，即获得收敛解．应该指出，ANSYS-CFX 和 ANSYS-FLUENT 中决定迭代过程终止的默认允许残差有所不同(具体见第5章)，如图2.19和图2.20所示，允许残差值分别为1×10^{-4}和1×10^{-3}．因为例1中的流动特性曲线下降非常迅速，因此，ANSYS-CFX 或 ANSYS-FLUENT 获得收敛解相当快．除了检查残差之外，用户还可以监视其他变量，如升力、牵引力或瞬时力来确定数值计算的收敛性．图2.21显示了ANSYS-FLUENT对例2计算过程中升力系数[lift coefficient (Cl)]的演变历程．由于例2比例1更复杂，因此需要更多的迭代次数才能收敛．在经历700次迭代后，升力系数变化已经不大了，因此可以认为经过1000次迭代后计算收敛，此时升力系数大约稳定在0.0035．除了监视残差以及变量的变化历程，使用者还可以检查计算域内流体流动系统的整体质量平衡以及可能的热平衡．残差应尽可能减到最小以保证充分的守恒．

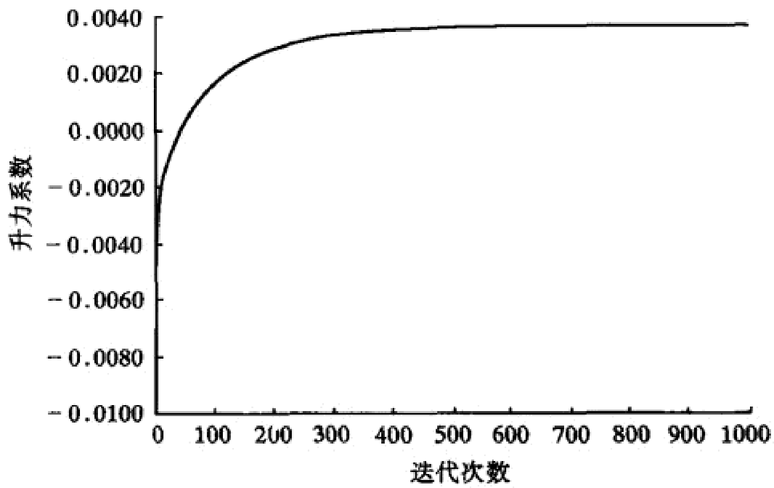


图 2.21 通过升力系数的变化监视求解的收敛

细心选择不同的欠松弛因子(under-relaxation factors)(具体见第5章)有助于迭代过程趋向收敛解．绝大多数商业软件都采用某种形式的欠松弛因子来提高数值计算的稳定性，保证迭代过程的收敛性．将欠松弛因子引入到流体流动控制方程的代数形式中，通过限制传递变量在每一相邻迭代步骤之间的变化量来减缓迭代过程．图2.18中显示了ANSYS-FLUENT用户图形界面上描述某些欠松弛因子的值．如何选择欠松弛因子，目前还没有简单的方法．只有广泛研究各种流动问题，才能积累欠松弛因子值选择的经验．

对一般流动问题中由于网格设计不当引起计算误差(errors)的评估(具体见第5章)相当困难．好的网格设计通常需要对流动特性有很好的预判．涉及网格粗糙度时，唯一的方法是不断细划初始网格，直到某些关键的结果没有明显变化为止，这样就可以消除网格设计带来的误差．这个过程是图2.17中所示求解过程的延伸．系统研究网格独立性可以获得高质量的CFD解．

读者应注意，收敛、收敛标准或允许残差值、残差、稳定性、误差、欠松弛因子以及

网格独立性是 CFD 数值模拟问题中需要着重考虑的问题．此处要彻底了解这些概念和术语可能相当困难．不过，在后面的章节中将对这些基础知识作进一步的讨论．

2.4 计算结果报告及其可视化：后处理

CFD 可以生成生动的图形结果，并且其极好的彩色输出效果能使图形的生动性得到强化，这种有效的数值结果显示功能使 CFD 成为一种非凡的设计工具．本节中，我们集中介绍一些常用的显示 CFD 数据的计算机图形技术．CFD 计算结果用图形加以强化的主要方式可分为不同的种类．为了帮助 CFD 使用者更好地分析和显示流体流动问题中相关的物理特性，下面将讨论每一种图形显示方式．

ANSYS-CFX，ANSYS-FLUENT，STAR-CD 以及其他商业 CFD 软件，其友好的用户图形界面常常包含功能强大的可视化工具，使用者可以在计算模拟之后将 CFD 计算结果用图形显示出来．当然，还有很多优秀的独立使用的计算机图形软件，读者也可以选择这些软件来处理自己的 CFD 应用问题．表 2.2 列出了一些现有的图形软件．尽管有些软件开始时是在 UNIX 系统下应用的，但现在大部分图形软件都可以在多种计算机平台上运行．有些商业软件，如 FIELDVIEW，TECPLOT，ENSIGHT，就是为 CFD 计算结果后处理过程专门开发的，其他普适可视化软件同样可以应用到 CFD 之中．为了简化图形表示，很多 CFD 研究者喜欢使用开放源代码的绘图软件，如 GNUPLOT 等，其源代码可以从 http://www.gnuplot.info/上免费获得．

表 2.2　　流行的计算机图形软件的相关网址

开发商	软　件	网　址
Advanced Visual Systems	AVS，Gsharp，Toolmaster	http://www.avs.com/
Amtec Engineering	Tecplot	http://www.amtec.com/
CEI	EnSight	http://www.ceintl.com/
IBM (free，apparently)	OpenDx	http://www.opendx.org/
Intelligent Light	Fieldview	http://www.ilight.com
Numerical Algorithms Group (NAG)	Iris Explorer	http://www.nag.co.uk/
Visual Numerics	PV-Wave	http://www.vni.com/

在本节余下的部分中，我们通过流行的计算机图形软件即 TECPLOT，来演示 CFD 结果的不同图形表示方法．下面将用这些图形表示方法对前面定义的流动实例，即例 1（两静止平行平板间流体的流动）和例 2（开放空间内流体在两圆筒间的流动）获得的计算结果进行表示．对这些方法的观察，有助于读者更好地了解应用商业软件进行模拟之后，如何对获得的结果进行处理和可视化描述．

我们用 TECPLOT 对 CFD 结果的图形化描述并不意味着对该软件的特别认可．我们的目的只是想为读者提供标准图形软件处理的实例．随着图形新技术的快速发展，其他软件对 CFD 问题中流动行为的观察可能会更好．因此，读者完全可以选择自己熟悉的图形

软件来处理CFD 结果．

2.4.1 X-Y 直角坐标图

用二维图形可以表示传递变量随另一自变量变化的情况．这种图形一般可以手工绘制或者用很多绘图软件方便地实现．X-Y 直角坐标图是最精确和定量描述数值数据的方法．实验室数据常常是按线性变化来收集的．因此，这种图表是直接比较数值数据与实测结果的流行方式．对数刻度还可以分析发生在固体边界附近等处的重要流动效应．这种图形广泛应用于对截面速度分布以及压力、表面摩擦系数等表面量的描述．这种图形一般非常容易分析，读者也乐于看这样的图形或者进行代数插值．

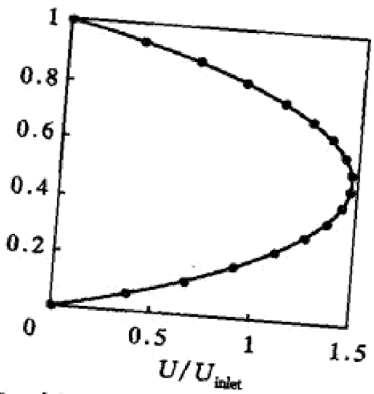


图 2.22　例 1 中充分发展区域内直角坐标系下层流速度抛物线分布图

图 2.22 为例 1 中充分发展区域内截面速度分布的 X-Y 直角坐标图．抛物线分布表现了平行平板通道中流体流动所经历的典型流动物理特性．另一种流体流动的可视化方式是采用连续二维分布图，图 2.23 所示为例 1 的速度分布图．在流动从入口边界(左侧)流向出口边界(右侧)的过程当中，流动速度从等值分布逐渐向抛物线分布变化．在第 3 章中将对这种简单流动的物理特性作进一步的讨论和说明．对更为复杂的流动例 2，如图 2.24 所示，用沿计算域长度方向上的无量纲水平速度分布表述中间位置上的流动行为，很好地说明了流体流经两圆筒时的减速和加速特性．随后，流体流动扩散开来，并在出口边界(右侧)部分地恢复到自由来流状态．在第 3 章中将对这种特定的流动物理特性作进一步的研究．

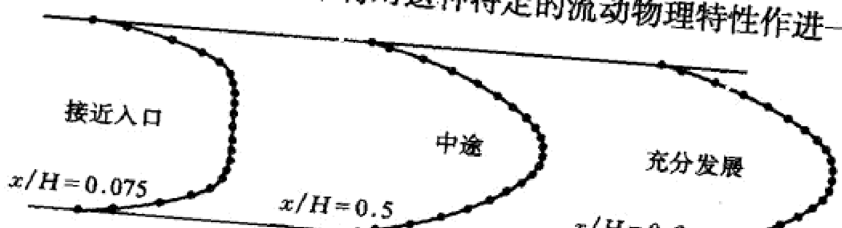


图 2.23　例 1 中流动发展过程二维速度分布图

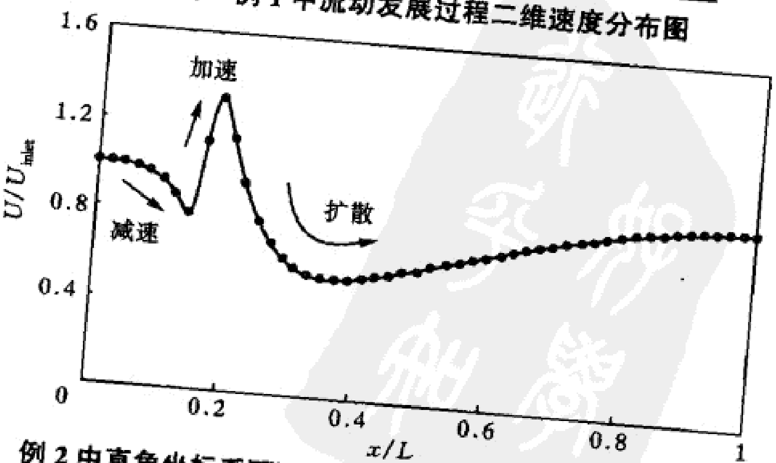


图 2.24　例 2 中直角坐标系下两圆柱中间沿长度 L 的无量纲水平速度分布

2.4.2 矢量图

矢量图为离散点(通常为速度)提供了矢量表示方法，箭头表示方向，长度表示大小。矢量图一般用来表示二维流动．在三维流动域中，在不同方位上生成的二维截面含有不同方向的矢量，可以更好地考查整体流动现象．如果网格密度相当高，CFD使用者可以选择部分输出矢量或减少输出矢量数量，防止箭头聚集在一起“掩盖”了整个图形．

图2.25表示了流体沿平行平板通道流动的速度矢量图．相对于图2.23描述的发展中的流动，矢量图给出了另一种观察．矢量图中不同的颜色代表与速度矢量耦合的其他传递变量的变化规律．对于该特定流动情况，我们选择了流动域中推动流体流动的动压力分布．图中颜色的变化表示流体流动过程内在的压力分布．当然，CFD使用者也可以自由选择其他传递变量，以便更好地强调流动现象中的重要物理特性．例如，在重要的热传递场合下，速度矢量应该与温度分布相耦合，来描述流动区域内热流体的流动．

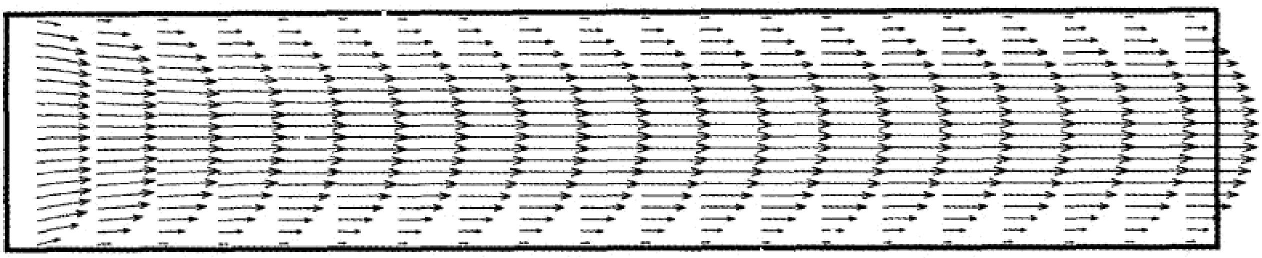


图2.25 例1中显示沿着平行平板通道流动发展的速度矢量图

对于例2的复杂尾迹发展流动(wake-developing flow)，图2.26所示的速度矢量强调了流体流过两圆筒以及圆筒后部存在的局部旋涡．从中可以观察到两圆筒中间位置上流向圆筒的上游流动、两圆筒中间的过渡流动以及离开圆筒的下游流动速度矢量的变化，明显反映出与图2.24具有同样的减速、加速和扩散三种流动特性．与例1相似，此处颜色图谱也是表示空间动压力的分布．

2.4.3 云 图

云图是另一种有用和有效的图形技术，经常用于观察CFD计算结果．自从计算机出现以来，云图得到了超乎想象的发展．在CFD中，云图是一种最常见的数据图形显示方法．等高线(也称为等值线)用以表示空间中某一特性的等值曲线．三维中则用等值面来表示．与X-Y直角坐标图相比，云图同矢量图一样，能在一个视图中对流体整体流动进行描述．通常，传递变量云图中一条等值线与相邻等值线之间的差值是相等的．使用云图的目的通常不是要精确评估等高线之间的数值．尽管可以在等值线之间进行数值插值，但不是一种非常精确的处理方法．有时，用等值面对流动的整体描述比实际数值更为重要．云图常常采用线性刻度．然而，为了更好地捕捉流场内某些小区域中的内在细节，读者需要采用其他类型的刻度来揭示这些独立的流动行为．对于间隔相等的云图，等值线越聚集就

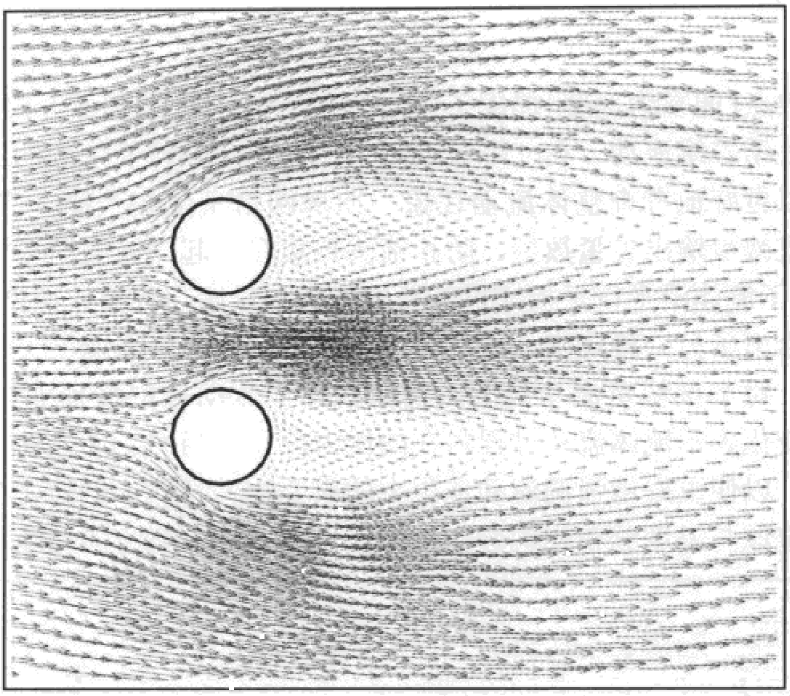


图 2.26 例 2 中两圆筒后部局部尾迹循环区域的速度矢量图

表示流动特性变化越剧烈．这种图形对激波和非连续流动的定位特别有用．

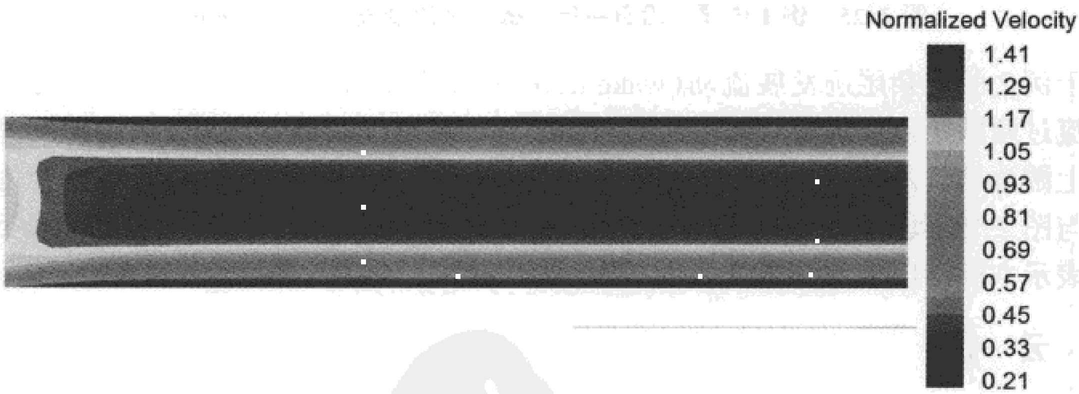


图 2.27 例 1 中无量纲速度的灰度标尺流动云图

图 2.27 和图 2.28 为例 1 的流动云图．其中，任何传递变量的流场特性可以用一定的颜色来表示．在这两个图中，用被称为“灰度标尺”(gray-scaled)图来表示无量纲速度(局部速度/入口速度)以及流动域内的动压力．图 2.27 中接近入口(左边界)处的云图变化进一步证实了前面 *X-Y* 坐标图(图 2.23)以及速度矢量图(图 2.25)中观察到的流动速度变化结果．而在接近出口(右边界)处，速度几乎没有变化．从图 2.28 中的云图可见，压力持续减小，这说明压力梯度驱动流体从左边界向平行平板通道的右边界流动．基于这一点，在图 2.25 中，我们推荐压力云图与速度矢量联合使用．

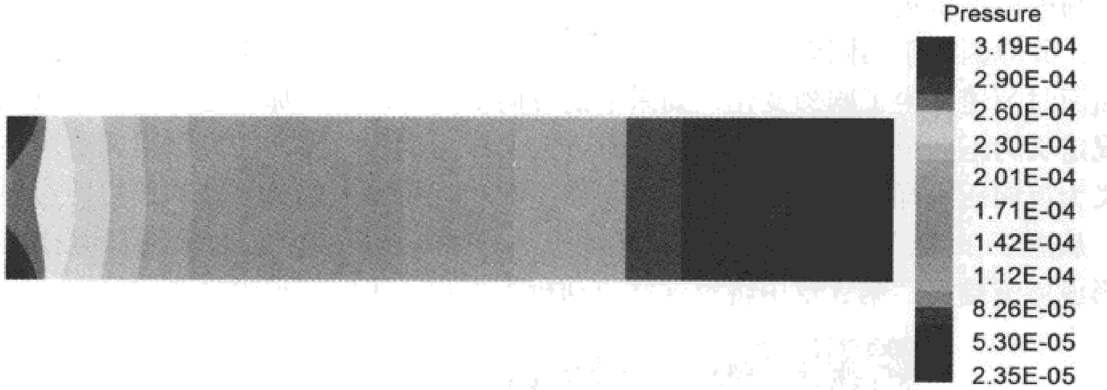


图 2.28　例 1 中动压力的灰度标尺分布云图

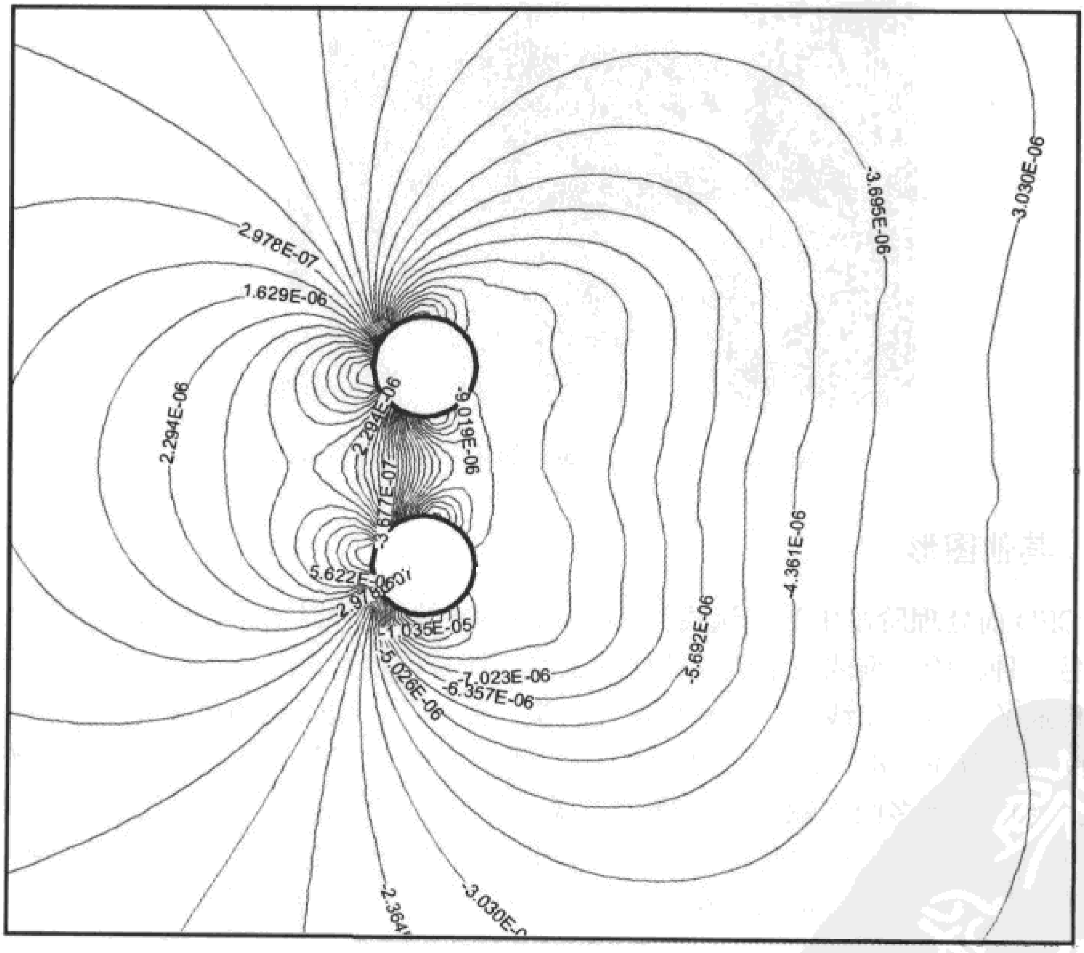


图 2.29　例 2 中压力系数的灰度标尺分布谱线图

图 2.29 和图 2.30 是例 2 流场状态的另一种云图表示方法．对于两圆筒，前者是用轮廓线表示其周围的压力系数，而后者是用灰度标尺来表示其周围的动压力分布．在两图

中，两圆筒周围密集的等值线清晰地表明：当流体流过圆筒上部和底部时出现了剧烈的流动行为．其原因在于两圆筒表面附近高、低不同的动压力产生了正、负压力系数，使流体经过曲面时流速发生了剧烈变化．如果下游方向上压力减小，那么边界层厚度就减薄，这种情况定义为正向压力梯度．如果在下游方向上压力增加，那么边界层迅速增厚，这种情况定义为反向压力梯度．反向压力梯度与作用在相当长度上的剪力共同作用使边界层保持不变．从图 2.26 速度矢量图中可见，存在明显的循环旋涡(尾迹)，流动从圆柱表面上脱离，形成逆流旋涡．第 3 章中将对这些流动行为作进一步的物理解释和讨论．

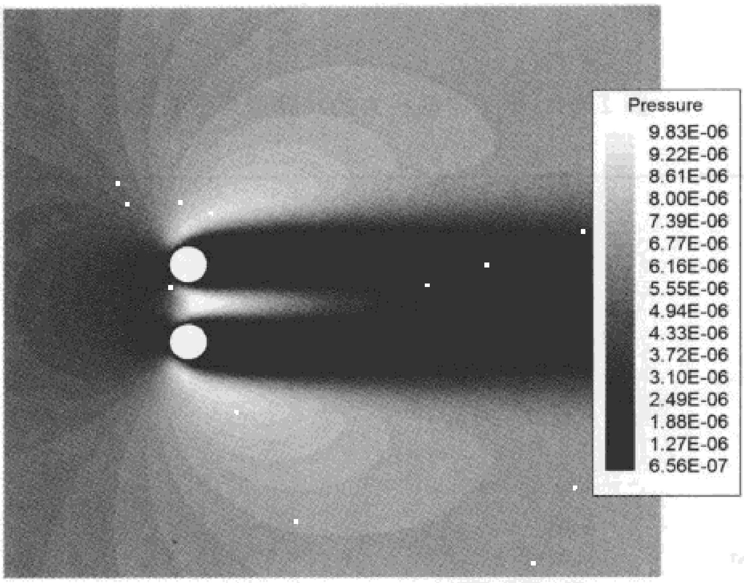


图 2.30 例 2 中动压力的灰度标尺分布云图

2.4.4 其他图形

在 CFD 前处理阶段中的“流线”(streamlines)图同样可以应用在流体动力学的各个方面，是另一种检验二维或三维流动特性的工具．流线图定义为：采用无质量颗粒跟踪流动形态时形成的流线，流线平行于平均速度矢量．流线图一般可以通过直角坐标系下表示的三个空间速度分量：$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=u$，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=v$，$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t=w$ 的合成来获得．读者能够从熟悉的、广泛使用的诸多图形软件中存在的有关“流线”同义词中得到启发．这些同义词有“流迹”图、“迹线”图或“轨迹”图等．对于更复杂的流动问题，如包含固体颗粒输运的多相流中，一定直径和质量的颗粒被注入到主流体中，其轨迹也属于流线图．从中可以得到颗粒存留时间、颗粒速度大小以及其他特性等重要信息．例如，图 2.31 中显示的流线图描述了两圆筒后部局部循环区域中的基本流动，而在图 2.26 中是用速度矢量图的形式加以描述的．这种工具常常可以用来揭示发生在某些独立流动区域内的重要流动特性，通过流线图可以对尾迹发展旋涡作出更为准确和清晰的描述．与速度矢量图一样，谱线颜色与空间动压力相对应．

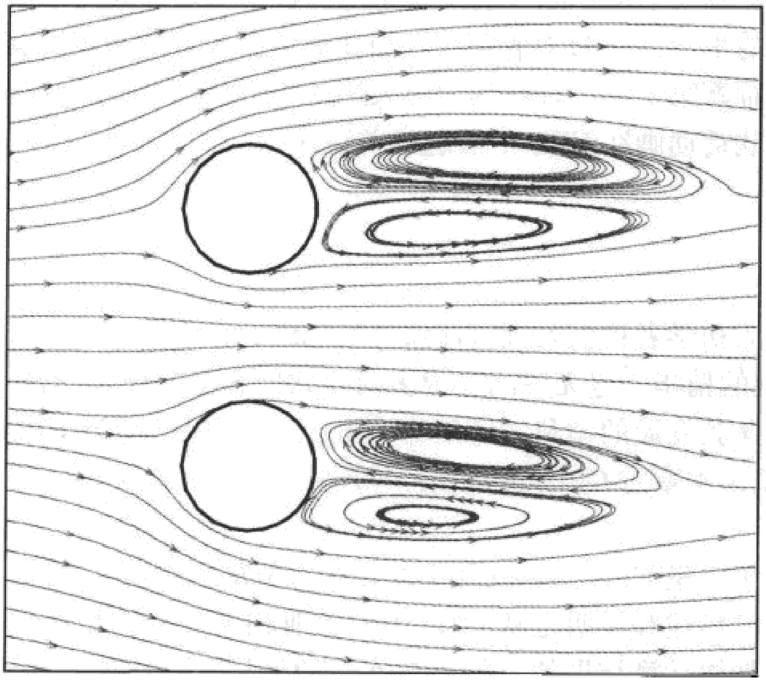


图 2.31 例 2 中两圆筒后部特定尾迹循环区域的流线图

2.4.5 数据报告及输出

除了在适当的可能小的“区域”网格上观察 CFD 模拟“真实数据”以外，要观察 CFD 模拟数据，特别是要观察在成千上万个网格节点上的数据，通常是不现实的. 因此，需要采用其他文字和数字报告方法，这样的报告对获得数值结果的质量核查以及对大量计算结果的后处理分析是有帮助的. 可以对包围计算域的每一边界上重要的变量，如表面流量、表面力及其积分等进行评估. 其中，我们非常感兴趣的是每一边界流入和流出的质量流量，这样就可以确定流动区域内的质量是否守恒，还有表面上各分力(如壁面剪应力)，这样可以揭示与重要流动物理特性相关的分离、附着和冲击等现象. 在某些流体动力学问题中，流动的瞬时/非稳态性质应该是重要的. 为了充分描述流动过程中流动随时间的发展，可以跟踪大量相关传递变量的计算数据，并存储到格式/非格式文件中.

2.4.6 动　画

通过 CFD 模拟得到的数据可以形成运动图像——动画. 同其他图形显示工具一样，动画不仅是大量计算结果的技术性表示，而且其本身就是一种艺术性工作. 用动画帮助提升流体流动过程的物理描述的例子有：多相流动中固体颗粒随流体的运动，混合釜内的混合运动以及高速流动中的激波传播等. 现在，我们能够在很多网站上找到很多表现 CFD 模拟结果的色彩鲜艳的视频短片. 毫无疑问，对于 CFD 模拟，动画是一种有效的可视化

教学和推销工具. 动画功能的不断发展确实是计算机图形研发人员不懈努力的结果，为流体流动带来了鲜活的生命. CFD 对直立火炬自由燃烧摇曳变化模拟结果的动画实例见第 7 章，读者可以提前翻看第 7 章，观看其中对火焰动力学燃烧行为以及其他物理现象的图形表现，可以更好地欣赏动画在 CFD 中所起的关键作用.

2.5 小 结

本章的目的是为初学者提供处理流体流动问题的一种有力的工具或技术. 我们有意包含了 CFD 学科发展的精华. 毫无疑问，很多商业软件和自编程序的普及已经证实 CFD 是一门充满活力的、蓬勃发展的学科. CFD 软件的广泛应用已经为学生或新用户提供了学习 CFD 的良好环境. 本章对 CFD 分析框架内的很多实际方面提供了适当的指导和可能的辅助知识.

尽管本章涉及了大量 CFD 商业软件中的内容，但却无意取代 CFD 软件用户手册. 很多基础性实用步骤的描述和说明是从 CFD 用户手册相关部分中精选出来的，主要是为了帮助读者达到获得最终计算结果的目的. 在本章的最后，即使读者还不具备任何 CFD 的前期基础知识，我们还是积极鼓励读者开始应用任何手头现有的 CFD 软件来熟悉 CFD 的各个方面. 完整的 CFD 分析包括前处理过程、求解过程以及后处理过程. 大致包含流动问题的建立、求解及求解监视以及模拟结束之后的 CFD 结果分析. 虽然操作“黑匣子”的过程相当机械，但在这三个过程中包含了很多基本原理. 希望读者认真复习本章中处理例 1 和例 2 时所采取的诸多实际操作步骤. 在进行复习的同时，列出如下一些问题帮助读者思考，这些问题或许会让读者更希望了解 CFD 中很多理论以及数值方法的内涵.

- 何为 CFD 问题的物理流动过程? (详见第 3 章)
- 如何用数学方程来描述流动的物理性质? (详见第 3 章)
- 流体流动和传热的控制方程有哪些? (详见第 3 章)
- 边界条件为何重要以及如何应用边界条件? (详见第 3 章)
- 边界条件的物理意义是什么? (详见第 3 章)
- 如何求解数学方程? (详见第 4 章)
- 为什么要将流动区域划分为很多小的无重叠子区域(即计算网格)? (详见第 4 章)
- 如何采用计算方法或技术? (详见第 4 章)
- 监视曲线的物理意义是什么? (详见第 5 章)
- 如何中止数值计算过程? (详见第 5 章)
- 何为求解误差? (详见第 5 章)
- 如何评估数值计算求解的正确性、精度以及物理意义? (详见第 5 章)
- 处理更为复杂的流动问题时，还有哪些方法/技术或实用经验或一般性指导方针能够帮助克服收敛困难? (详见第 6 章)

- 还有哪些使用 CFD 的实例，以及如何更好地进行求解分析？(详见第 7 章)
- CFD 的未来发展会如何？(详见第 8 章)

上述每一个问题后面给出的具体章节是使读者了解本书其他部分将要描述的 CFD 理论、数值方法和应用实例. 这些章节将回答本章涉及的以及上述所列的各种问题. 毫无疑问，在实践中，CFD 应用要与流体流动过程的基本控制方程相结合. 这些方程建立在守恒定律和理论基础之上. 在下一章中，我们将讨论这些方程的物理意义以及具体的表达式.

复习题

2.1 为何商业 CFD 软件能够使初学者容易进行 CFD 分析？

2.2 完整 CFD 分析中的要素都有哪些？

2.3 对于流体流动问题，举例说明正确定义计算域的重要性.

2.4 与粗糙网格(即单元数目少)相比，使用非常精细网格(即网格单元数目很大)会导致何种结果？

2.5 结构化网格和非结构化网格之间的主要差别有哪些，以及如何应用到物理领域中？

2.6 应用于计算域上的边界条件的种类有哪些？

2.7 可用何种边界条件来表示计算域上的开放物理边界？

2.8 采用对称边界条件和周期性边界条件有何优点，以及何时可以采用这些边界条件？

2.9 CFD 求解器的主要用途是什么？

2.10 提供合理初值的优点是什么？

2.11 何谓迭代过程？如何进行迭代？

2.12 判断收敛的标准是什么？

2.13 后处理阶段的主要目的是什么？

2.14 采用 X-Y 坐标图的优点是什么？举例说明 X-Y 坐标图可以捕获的 CFD 结果.

2.15 为什么说云图是显示变量分布的最好方法？

2.16 流线的意义有哪些？与其他图形相比，其优点何在？

3 CFD基本控制方程

3.1 概 述

从本质上讲，CFD是在流体动力学控制方程的基础上建立起来的．控制方程是物理学守恒定律的数学表达式．本章的目的就是向读者介绍这些方程的推导及相关讨论．控制方程遵守如下物理定律．

- 流体质量守恒．
- 牛顿第二定律：流体动量变化率等于流体受到的合力．
- 热力学第一定律：流体机械能的变化率等于流体吸收热量的变化率和流体做功变化率的总和．

对于学习CFD的读者来说，在一定程度上了解流体运动物理现象是很重要的，因为这些现象就是CFD要分析和预测的对象．由于CFD建立在这些方程的基础之上，所以我们必须首先理解流动过程的基本描述以及方程中每一项的含义．这些方程确定之后，将其描述成特别适合于CFD求解的方程形式．由于物理边界条件的数值形式与控制方程的数学形式以及所采用的数值算法密切相关，因此，还要根据流动的物理特性确定边界条件及其数学表达式．

通过本章，作者试图在某种程度上揭开基于计算机工具对流体运动预测的神秘面纱，使读者对流体力学的输运方程有一个深刻的了解．

3.2 连续性方程

3.2.1 质量守恒

流体流动的质量守恒定律，就是物质既不能被创造也不能被消灭．考虑如图3.1所示的以空间和时间为坐标的任一控制体体积 V．流体穿过控制体表面，流过控制体．根据质量守恒定律，控制体体积内的质量变化率等于穿过控制体 V 上表面 S 的质量流量．其积分形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V = -\int_S \rho \boldsymbol{V}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S. \tag{3.1}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 为单位法向矢量.

根据高斯散度定理，一个矢量散度的体积分应等于这个体积表面通量的面积分，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{div}\rho\boldsymbol{V}\mathrm{d}V = -\int_S \rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S. \tag{3.2}$$

应用以上定理，方程(3.1)中的面积分可用体积分代替，则方程变为

$$\iint_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})\right]\mathrm{d}V = 0. \tag{3.3}$$

式中，$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})\equiv\mathrm{div}\rho\boldsymbol{V}$.

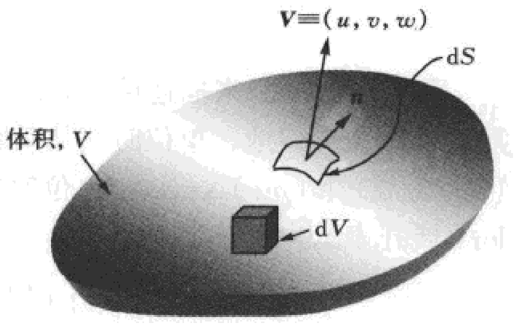


图 3.1　空间中的有限控制体体积

由于方程(3.3)适用于任意体积 V，这意味着

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}) = 0. \tag{3.4}$$

方程(3.4)为质量守恒方程. 在直角坐标系下可表示为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \tag{3.5}$$

式中，流场内任意点的流速 $\boldsymbol{V}$ 用局部速度分量 u，v 和 w 来描述. 一般而言，u，v 和 w 是空间位置(x，y，z)和时间(t)的函数.

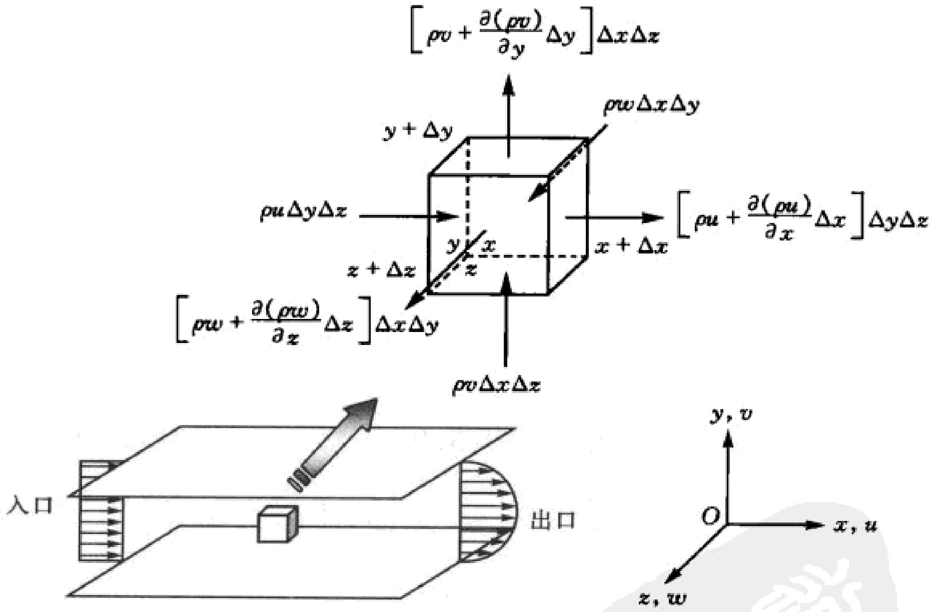


图 3.2　两静止平行平板间流体流动微小控制体的质量守恒

考查如图 3.2 所示的两静止平行平板间的流体流动. 用空间中一个无限小的控制体 $\Delta x\Delta y\Delta z$(放大图置于图右上侧)来分析流场(u，v，w)的质量守恒. 我们通常将这种输运称为对流. 对于非稳定流动，根据质量守恒定律，控制体中的质量增量等于通过控制体

的质量净增量(流入－流出)，即

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\sum_{\text{in}}\dot{m}-\sum_{\text{out}}\dot{m}. \tag{3.6}$$

用$(\rho u)\Delta y\Delta z$来描述单位时间从垂直于x轴的表面进入控制体的质量，其中ρ为流体局部密度. 类似地，单位时间从垂直于y，z轴的表面进入控制体的质量可以分别表示为$(\rho v)\Delta x\Delta z$和$(\rho w)\Delta x\Delta y$. 单位时间离开$x+\Delta x$处表面的质量流量可以通过泰勒(Taylor)展开表示为

$$\left[(\rho u)+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y\Delta z+o(\Delta x,\ \Delta V). \tag{3.7}$$

式中，$\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$.

类似地，单位时间离开$y+\Delta y$处表面和$z+\Delta z$处表面的质量流量也可以表示为

$$\left.\begin{aligned}&\left[(\rho v)+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta y\right]\Delta x\Delta z+o(\Delta y,\ \Delta V),\\&\left[(\rho w)+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\Delta z\right]\Delta x\Delta y+o(\Delta z,\ \Delta V).\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

因为控制体内流体质量m可以用$\rho\Delta x\Delta y\Delta z$表示，则方程(3.6)变为

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho\Delta x\Delta y\Delta z)}{\partial t}=&(\rho u)\Delta y\Delta z+(\rho v)\Delta x\Delta z+(\rho w)\Delta x\Delta y-\left[(\rho u)+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y\Delta z-\\&\left[(\rho v)+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta y\right]\Delta x\Delta z-\left[(\rho w)+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\Delta z\right]\Delta x\Delta y+\\&\Delta Vo(\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z).\end{aligned} \tag{3.9}$$

方程两边除以常数$\Delta x\Delta y\Delta z$，再取极限可得到

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0. \tag{3.10}$$

方程(3.10)与原始方程(3.5)具有完全相同的形式. 该方程就是连续性方程的偏微分形式. 从上述推导中可见，可以从方程(3.1)的积分形式得到其偏微分形式. 我们通常称此为守恒型的微分方程. 方程(3.1)和方程(3.10)都是守恒方程，这些变换并没有改变其性质.

通过链式微分方法(chain rule)展开方程(3.10)，就能很方便地得到所有密度项:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \tag{3.11}$$

或

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0. \tag{3.12}$$

式中，$\mathrm{D}/\mathrm{D}t$是直角坐标系下的随体导数(substantial derivative).

不管从物理意义上讲还是从数值角度来讲，时间导数$\mathrm{D}\rho/\mathrm{D}t$和$\partial\rho/\partial t$都是两个不同的量. 读者应注意，前者指的是运动流体微元随时间的变化率，而后者则是某一固定位置流体随时间的变化率.

在第 2 章中，我们对如图 3.2 所示的两静止平行平板间的流动进行了二维 CFD 分析．二维流动是假定在 z 坐标轴方向上平板的尺寸足够大，从而流动在 z 坐标轴方向上保持不变．由于假定流体是不可压缩的，因此密度 ρ 为常数，即与速度分量 u，v，w 相关的密度在空间与时间上的变化可以忽略不计．于是我们可以得到二维不可压缩流体的连续性方程：

$$\underbrace{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\cancelto{=0}{\frac{\partial\rho}{\partial x}}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)}_{\text{密度为常数}}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\cancelto{=0}{\frac{\partial w}{\partial z}}\right)=0$$

（z 方向上流动没有变化）

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{3.13}$$

3.2.2　物理意义

我们以两平行平板间流体流动二维无限小微元控制体为例，阐述连续性方程(3.13)的基本物理意义．考虑以下两种情况．

考虑的第一种情形是 $\partial u/\partial x>0$，则 $x+\Delta x$ 位置表面上的速度大于 x 位置表面的速度，也就是 $u(x+\Delta x)>u(x)$．因为从 x 方向上离开控制体的流体多于进入控制体的流体，因此，在 y 方向进入控制体的流体肯定多于离开控制体的流体．此时，$\partial v/\partial y<0$，而且面 $y+\Delta y$ 处的速度小于面 y 处的速度，即 $v(y+\Delta y)<v(y)$．

第二种情形是 $\partial u/\partial x<0$，则 $x+\Delta x$ 处表面上的速度小于 x 处表面的速度，也就是 $u(x+\Delta x)<u(x)$．因为从 x 方向上进入控制体的流体多于离开控制体的流体，因此，在 y 方向离开控制体的流体肯定多于进入控制体的流体．此时，$\partial v/\partial y>0$，而且面 $y+\Delta y$ 处的速度大于面 y 处的速度，即 $v(y+\Delta y)>v(y)$．

这两种情形都满足连续性方程：$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$(即质量守恒)．

例 3.1　考虑层流边界层，其速度型线近似为 $u(x)=U_\infty y/\delta$．式中，$\delta=cx^{1/2}$，c 为常数；U_∞为自由来流速度；δ 为边界层厚度．参考图 3.3 所示流经平板的二维流动，确定边界层内的速度 v(垂直分量)．

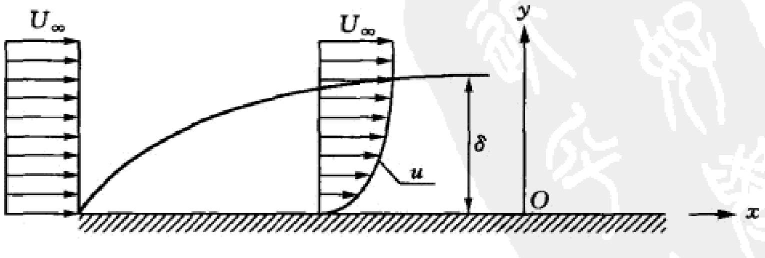


图 3.3　流经平板的二维流动

解：随着边界层向下游发展，由于黏性作用和平面表面的无滑移条件，水平速度 u 逐渐减小．为了满足连续性方程，垂直速度 v 必须为正，并且把流体从边界层内带出边界层外．

将速度型线 $u(x)$代入方程(3.13)，可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U_\infty y}{cx^{1/2}}\right]+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{U_\infty y}{2cx^{3/2}}=-\frac{\partial v}{\partial y}.$$

将 v 对 y 积分，方程变为

$$v=\frac{U_\infty y^2}{4cx^{3/2}}=\left[\frac{U_\infty y}{cx^{1/2}}\right]\left(\frac{y}{4x}\right)=\frac{uy}{4x}.$$

讨论：物理意义在于：对于特定的 x 位置，速度比 $v/u=y/(4x)$，随离开表面距离的增加而增加；对于固定的位置 y，速度比则随 x 的增加而减少．在边界层的边缘处，$y=\delta=cx^{1/2}$，速度比 v/u 等于 $c/(4x^{1/2})$．如果假定常数 c 为整数 1，则边界层厚度 δ 及速度比 v/u 都可以表示为水平距离 x(以驻点为起始点)的函数，如图 3.4 和图 3.5 所示．图 3.5 进一步说明了平板流动的速度比 v/u 在 x 方向上递减．到达下游某 x 处，水平速度 u 的变化非常小，此时，$\partial u/\partial x\to 0$，从而导致$\partial v/\partial y\to 0$，这也满足了连续性方程(3.13)．

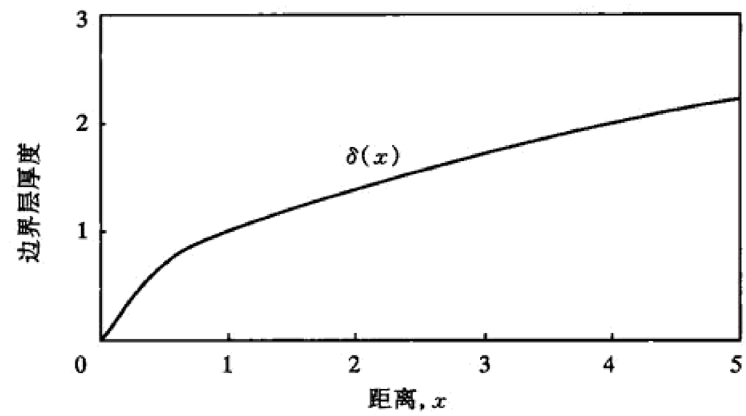


图 3.4　边界层厚度 δ 与水平距离 x 的函数关系

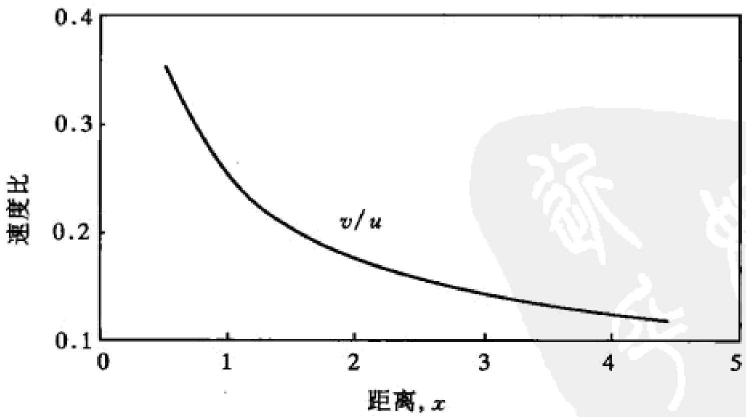


图 3.5　速度比 v/u 与水平距离 x 的函数关系

例 3.2 考虑第 2 章中两固定平板间二维稳态不可压缩层流流动的 CFD 例子，给定以下尺寸：高度 $H=0.1\text{m}$，长度 $L=0.5\text{m}$. 应用 CFD 软件获得数值解，并画出沿流道的速度矢量图. 工作流体为空气，流道进口为 0.01m/s 的均一速度分布(u_{in})，绘制靠近下壁面的速度分量 u 与 v 沿流道方向上的变化曲线图，讨论连续性方程的物理意义.

求解：问题描述如图 3.6 所示.

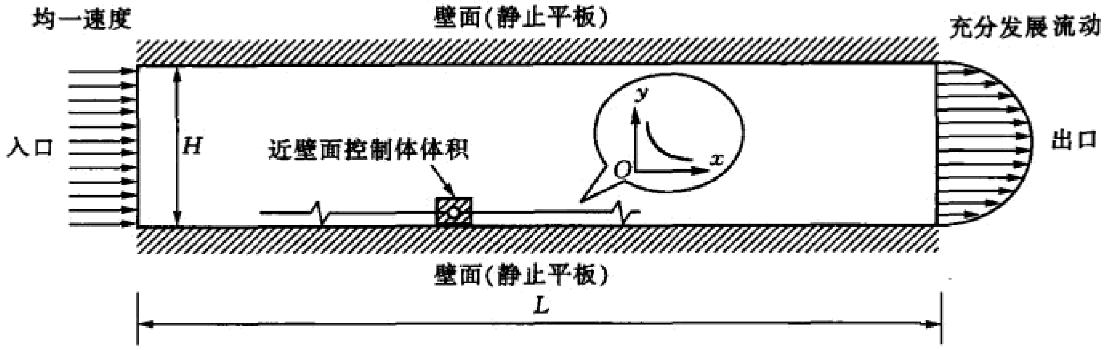


图 3.6 两固定平板间二维层流流动

通过 CFD 数值模拟得到沿流道方向的流场如图 3.7 所示. 通过观察可以发现，随着流体向下游流动，速度分布从进口处的均一分布逐渐变为抛物线分布.

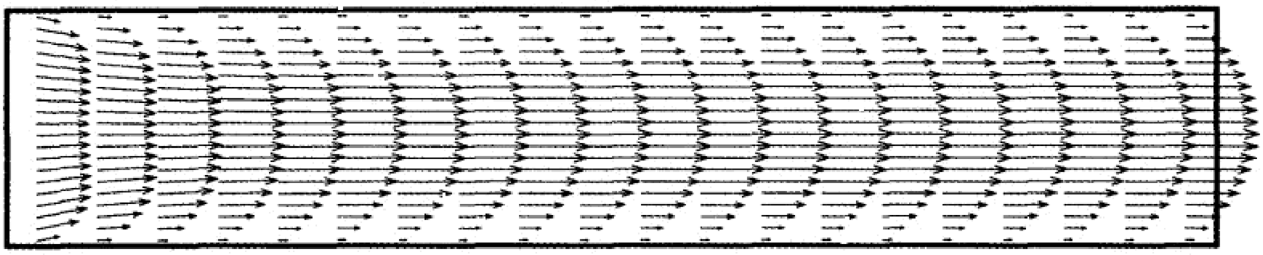


图 3.7 沿流道的速度分布

靠近下壁面的 u，v 速度沿流道分布如图 3.8 和图 3.9 所示.

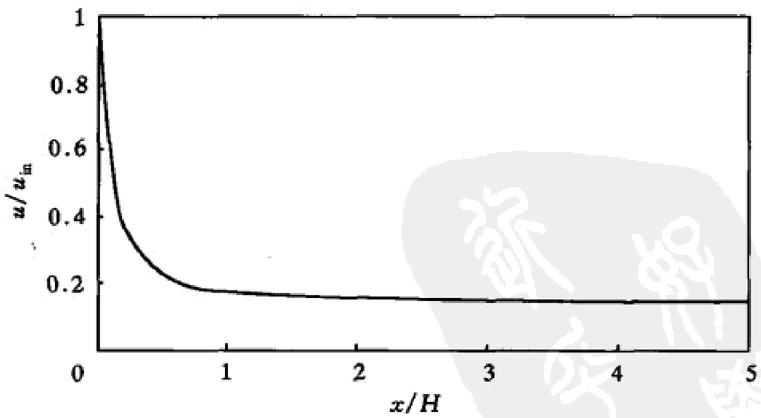


图 3.8 水平速度 u 沿流道的分布

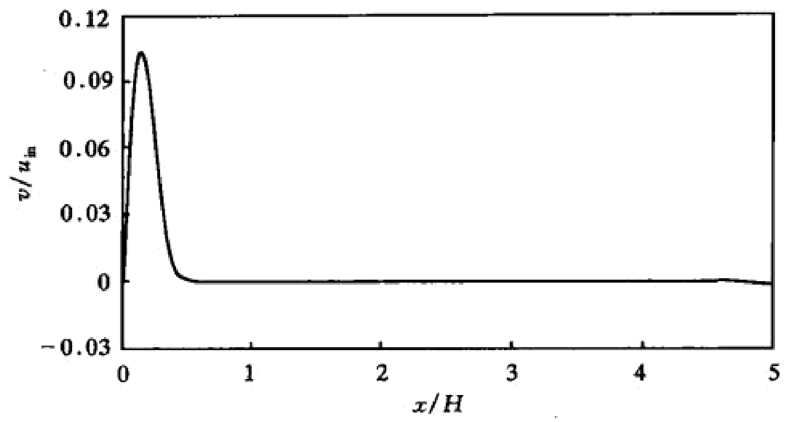


图 3.9 垂直速度 v 沿流道的分布

讨论：通过观察可以发现，在流体力学入口区域，也就是当 $x<3H$ 时，水平速度 u 沿流道长度方向减小．表明靠近壁面处的$\partial u/\partial x<0$．当空气流过壁面时，贴近壁面设定为无滑移边界条件，因此，空气流速沿 x 方向减小．所以，在 x 方向上，实际进入流动区域的流量大于流出流动区域的流量．为了保持质量守恒，在 y 方向上，流出流动区域的流量必定大于流入流动区域的流量，垂直速度 v 必定增大，亦即 $\partial v/\partial y>0$．另一方面，在流体充分发展区域内，即 $x\geqslant 3H$ 时，可以发现水平速度 u 在 x 方向上无明显改变，即$\partial u/\partial x=0$．根据连续性方程，在此区域内$\partial v/\partial y$ 也必为 0．这从如图 3.9 所示的充分发展区域内垂直速度 v 保持不变可以明显地反映出来．关于流体力学入口区域和充分发展区域的物理意义，将在例 3.5 中作进一步讨论．

3.2.3 说　明

在大部分流体力学教科书中，常用如图 3.10 所示的管道流动来解释质量守恒原理．进入管道的质量用质量流量 $\dot{m}_1$ 表示，它等于流体密度、进口速度以及横截面面积的乘积，即 $\rho u_1 A_1$．该质量必定等于离开管道的质量流量 $\dot{m}_2(\rho u_2 A_2)$．如果管道进口和出口的横截面面积相等，即 $A_1=A_2$，由质量守恒原理，出口速度 u_2 一定等于进口速度 u_1．如果管道两端的横截面面积不等，比如，$A_1=2A_2$，那么 $u_2=2u_1$，这说明流体加速了．反之，如果 $A_1=\frac{1}{2}A_2$，那么 $u_2=\frac{1}{2}u_1$，这说明流体减速了．

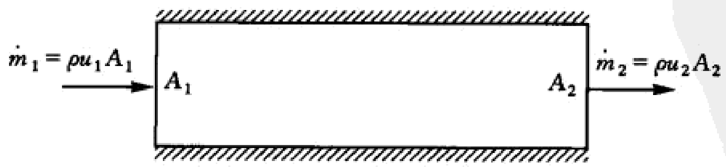


图 3.10 管内流动

应用于一维空间整个流域的质量守恒原理也同样适用于需要 CFD 数值求解偏微分方程的任意小控制体当中．二维空间流动中，质量流量可能在一个方向上并不守恒，但在另一个方向上流体必须流入或流出控制体，以确保质量流量在整个控制体上的守恒．在学习及分析 CFD 数值结果时，将数学方程的物理意义熟记于心是很重要的．这是我们希望读者能时刻牢记的基本观点．实际上，这一观点可以推广到其他任何物理问题的所有数学方程之中．我们已对连续性方程(3.13)的物理意义作了长篇探讨，在以下的章节中，我们将更进一步探讨其他数学方程中的不同项，如对流项和扩散项等．不论对什么方程，我们都期望读者在任何时候都能采用上述思想，明确所涉及方程中每一项的物理意义．

3.3 动量方程

3.3.1 力的平衡

本节将对 3.2.1 节中所介绍的随体导数概念作进一步详细的介绍．如果我们将单位质量通用变量记为 ϕ，ϕ 对时间的随体导数记为 $\mathrm{D}\phi/\mathrm{D}t$，则有

$$\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+u\frac{\partial\phi}{\partial x}+v\frac{\partial\phi}{\partial y}+w\frac{\partial\phi}{\partial z}. \tag{3.14}$$

方程(3.14)定义了单位质量通用变量 ϕ 对时间的变化率．同质量守恒定律中的情况一样，我们感兴趣的是推导单位控制体体积内的变化量．而单位控制体体积内通用变量 ϕ 的变化率可以通过密度 ρ 与 ϕ 的随体导数的乘积来获得，即

$$\rho\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t}=\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\rho u\frac{\partial\phi}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\phi}{\partial y}+\rho w\frac{\partial\phi}{\partial z}. \tag{3.15}$$

方程(3.15)表示了单位控制体积内通用变量 ϕ 变化率的非守恒形式．

3.2.1 节中所推导的质量守恒方程定义了密度变化率的总和，也叫对流项，即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0.$$

容易猜想，通用变量 ϕ 守恒形式的各项可以统一表示为

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w\phi)}{\partial z}=0. \tag{3.16}$$

上式表示单位控制体积内 ϕ 的变化率以及单位控制体积流体 ϕ 的净流出率．现在重新将这些方程写出以阐明守恒方程(3.16)和非守恒方程(3.15)的关系：

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w\phi)}{\partial z}=$$

满足连续性方程

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\rho u\frac{\partial\phi}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\phi}{\partial y}+\rho w\frac{\partial\phi}{\partial z}+\phi\underbrace{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]}_{=0}=\rho\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t}. \tag{3.17}$$

这两种形式都可以用来表示物理量的守恒．为简单起见，我们仅用非守恒形式来推导流体问题中所遇到的另外一个物理规律——动量定理．在 3.5 和 3.6 节中，我们再回到 CFD 计算中常用的守恒形式．

为了推导此物理定律，首先我们考虑如图 3.2 所示描述质量守恒中的各流体单元．牛顿第二运动定律可表述为：作用在流体单元上的合力（如图 3.11 所示）等于流体单元质量和加速度的乘积．在直角坐标系 x，y，z 方向上应用基本定律可导出三个标量方程．首先考虑 x 分量上的牛顿第二定律：

$$\sum F_x = ma_x. \tag{3.18}$$

式中，F_x 和 a_x 分别为 x 方向上的分力与加速度．

方程(3.18)右侧的加速度 a_x 为 u 随时间的变化率，它由随体导数决定，于是有

$$a_x = \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}. \tag{3.19}$$

由于流体微元的质量 m 等于 $\rho\Delta x\Delta y\Delta z$，则 x 方向上的动量增量为

$$\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}\Delta x\Delta y\Delta z. \tag{3.20}$$

在方程(3.18)的左侧，有两个力使流体微元产生运动，它们是体积力和表面力．可能影响到流体动量变化的体积力有重力、离心力、科氏(Coriolis)力和电磁力．除表面力以外，通常把这些力对流体所产生的影响通过附加源项的形式加到动量方程中．如图 3.11 所示，对于速度分量 u，作用于流体微元上的正应力 σ_{xx} 及切应力 τ_{yx} 和 τ_{zx} 等引起的表面力使流体微元发生变形．将所有这些作用在流体微元上的表面力（具体推导见附录 A）以及 u 对时间的变化率方程(3.20)代入方程(3.18)，于是，x 方向上的动量方程变为

$$\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + \sum F_x^{\text{body forces}}. \tag{3.21}$$

同样，y 方向上的动量方程和 z 方向上的动量方程可以表示为

$$\rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + \sum F_y^{\text{body forces}} \tag{3.22}$$

及

$$\rho\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \sum F_z^{\text{body forces}}. \tag{3.23}$$

方程(3.21)至方程(3.23)中的正应力 σ_{xx}，σ_{yy} 和 σ_{zz} 是由于压力 p 和垂直作用在控制体上的法向黏性应力分量 τ_{xx}，τ_{yy} 和 τ_{zz} 综合作用而产生的，切向黏性应力分量包含在其他项中．许多流体流动中需要引入合适的黏性应力模型，它们通常是局部变形率（或应变率）的函数，而应变率用速度梯度形式来表示．在附录 A 中给出了对牛顿流体适合的应力-应变关系式．

上面对于两平行平板间的二维流体流动问题（在 z 方向上，流动变量不变），流体流

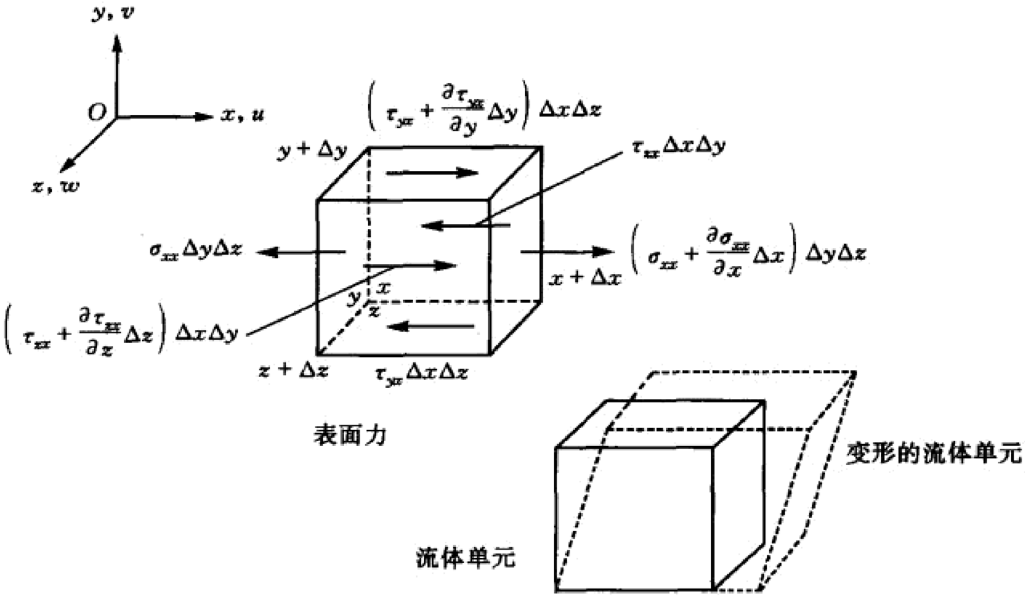


图 3.11 影响速度分量 u 的作用在微元控制体上的表面力
（表面力引起流体单元的变形）

动为定常流动．这意味着密度是常数，方程中不必考虑体积力，特别是重力引起的体积力(如浮力引起的密度变化)．通过应用连续方程，包含应力-应变关系的动量方程可以简化为

$$\underbrace{\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}}_{\text{加速度}} = -\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{压力梯度}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{扩散项}} + \frac{\partial}{\partial x}\Bigg[\lambda\underbrace{\cancelto{0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}}_{\text{连续性方程}}\Bigg] + \nu\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\cancelto{0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}}_{\text{连续性方程}} + \underbrace{\cancelto{0}{\frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}}}_{\text{常项}} + \sum\underbrace{\cancelto{0}{F_x^{\text{body forces}}}}_{\text{体积力}},$$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}}_{\text{加速度}} = -\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{压力梯度}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\text{扩散项}} + \frac{\partial}{\partial y}\Bigg[\lambda\underbrace{\cancelto{0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}}_{\text{连续性方程}}\Bigg] + \nu\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\cancelto{0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}}_{\text{连续性方程}} + \underbrace{\cancelto{0}{\frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}}}_{\text{常项}} + \sum\underbrace{\cancelto{0}{F_y^{\text{body forces}}}}_{\text{体积力}};$$

或

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{局部加速度}} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{对流项}} = -\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{压力梯度}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{扩散项}}, \tag{3.24}$$

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{\text{局部加速度}}+\underbrace{u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{对流项}}=\underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{压力梯度}}+\underbrace{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\text{扩散项}}. \tag{3.25}$$

根据牛顿第二定律所推导出来的方程(3.24)和(3.25)描述了流体流动的动量守恒原则，这也就是我们所熟知的 Navier-Stokes 方程，其中，ν 为运动黏度($\nu=\mu/\rho$). 至于动量方程(3.24)和(3.25)中各项的物理意义，将在下节中作具体的介绍.

3.3.2 物理意义

考虑一个封闭汽缸中的活塞压缩空气的流体运动问题. 从图 3.12 中 A 点来看，随着时间的推移，体积减小，空气速度增加，从而导致流体局部加速. 在 x 方向的动量方程(3.24)中，由水平速度分量 u 的加速度项$\partial u/\partial t$ 来表示流体局部加速度. 相似地，如果活塞向下做垂直运动，空气流速的增加率则由方程(3.25)中垂直速度分量 v 的局部加速度项$\partial v/\partial t$ 表示.

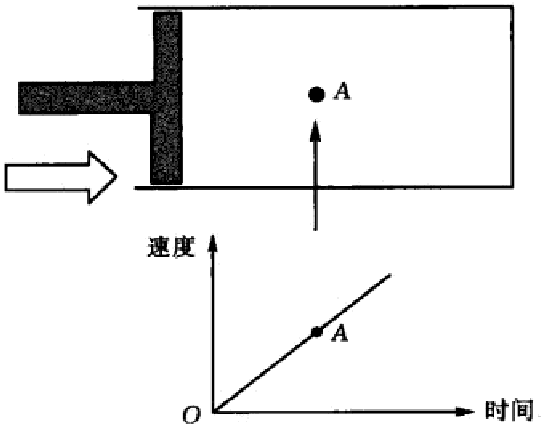


图 3.12 活塞机械中的流体运动

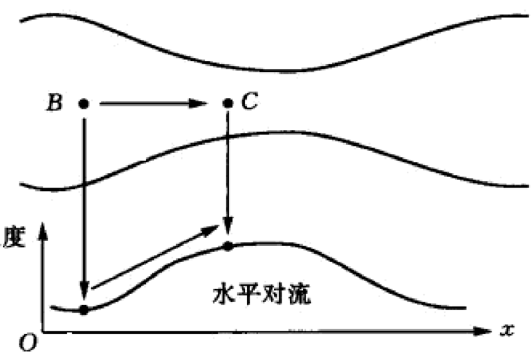


图 3.13 文丘里管内的流体运动

上例描述了流体运动随时间的局部变化率. 我们将进一步探讨流体在空间加速的物理意义. 让我们考查文丘里(Venturi)管内的流体运动. 如图 3.13 所示，流体沿 x 方向在位置B 和C 之间流动. 假设流动速度不随时间波动，水平速度分量 u 在空间上存在局部加速度，位置 B 和C 之间流体的速度是增加的，即方程(3.24)中的速度梯度项 $u\partial u/\partial x$ 是增加的. 相似地，如果文丘里管垂直放置，那么垂直速度分量 v 在空间上就有局部速度梯度，而此速度梯度项 $v\partial v/\partial y$ 在B，C 之间是增加的. 我们通常将流场中流体穿过 B 点流向C 点的流动称为动量方程里的对流项.

我们将通过以下例子来说明动量方程(3.24)和(3.25)中压力梯度和扩散项的物理意义.

例 3.3 考虑如图 3.14 所示的不可压缩、无黏层流流过直径为 d 的圆柱体的流动. 流体沿滞止流线 A—B 的流动可以表示为

$$u(x)=U_{\infty}\left(1-\frac{R^2}{x^2}\right).$$

参照方程(3.24)和(3.25)，确定流体沿滞止流线 A—B 流动的总加速度．同时，通过推导沿流线的伯努利(Bernoulli)方程和驻点压力来确定压力沿流线的分布．

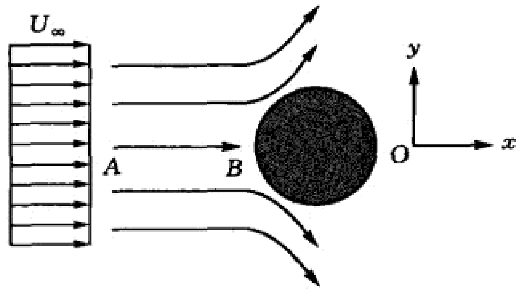


图 3.14 圆柱绕流流动

求解：对无黏流动而言，所有剪切应力等于0，即 $\tau=0$．因此，所有扩散项也等于0．在通过驻点的滞止流线上，垂直速度分量 v 也为0．同时，根据连续性方程要求，并考虑 x 方向的动量方程(3.24)，可以去掉方程的相关项，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{=0}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0}+\underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{=0}.$$

上述方程简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

流体的总加速度由局部加速度和对流项组成，并由 x 轴方向上的压力梯度决定．假设来流速度 $U_{\infty}=1\mathrm{m/s}$，圆柱半径 $R=1\mathrm{m}$，则总加速度由下式给定：

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right).$$

上面推导的方程是动量方程的另外一种形式，即流体流动的欧拉方程．对于稳态流动，通过对方程在流线上求积分即可得到 Bernoulli 方程，即

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad\frac{p(x)}{\rho}+\frac{u^2(x)}{2}=\frac{p_{\infty}}{\rho}+\frac{U_{\infty}^2}{2}.$$

将上面方程重组，并将来流压力 p_{∞}设为大气压，变为

$$p(x)-p_{\mathrm{atm}}=\frac{\rho}{2}\left[U_{\infty}^2-u^2(x)\right]=\frac{\rho}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2\right].$$

讨论：在流线上，上述给出的速度分布 $u(x)$可由图 3.15 所描述的曲线来表示．当流体接近圆柱时，速度急剧下降，在圆柱表面处速度为0(驻点，stagnation point)，该处表面压力达到最大值．

图 3.16 所描述的总加速度分布也显示出，当流体接近圆柱时，其加速度急剧减小．最大的减速点位于 $x=-1.29$ 处，大小为 $-0.372\mathrm{m/s^2}$．

图 3.17 所示为上述推导压差值 $p(x)-p_{\mathrm{atm}}$随 x 的变化情况．此图表明，当流体接近驻点时，压力增大．假如密度为1，那么在驻点压差达到最大值0.5，即当 $u(x)\to 0$（接近驻点）时，$p_{\mathrm{stag}}-p_{\mathrm{atm}}=\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2$．

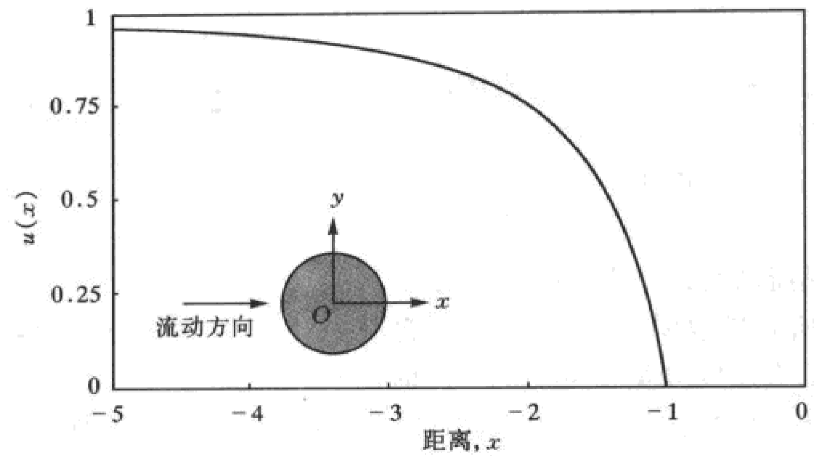


图 3.15 沿滞止流线的速度分布 $u(x)$

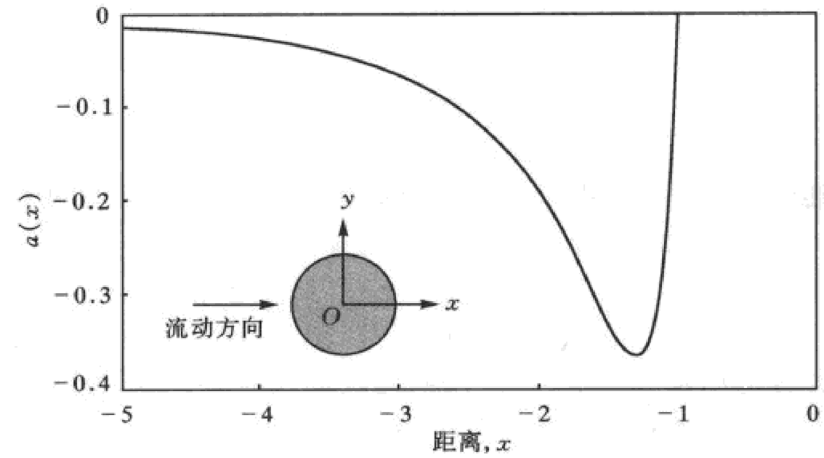


图 3.16 总加速度在滞止流线上的分布 $a(x)$

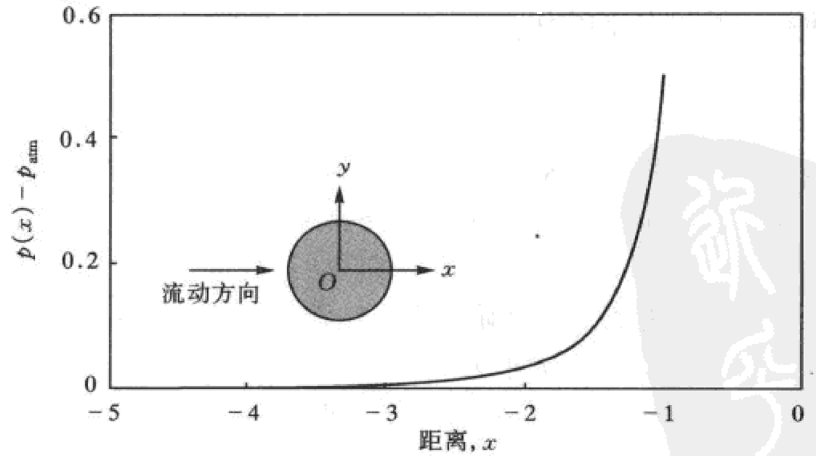


图 3.17 压差 $p(x)-p_{atm}$ 沿滞止流线的分布

例 3.4 考虑例 3.2 中所研究的平行平板间稳定不可压缩层流流动问题. 对于定常流体充分发展流动，根据垂直速度分量 v 处处为 0 的边界条件确定速度分布.

求解: 水平速度分量 u 仅与 x 有关. 通过求解 x 方向动量方程(3.24)的适当形式，可以求出水平速度. 既然垂直速度分量 v 处处为 0，则连续性方程(3.13)可简化为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=0}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

上式表明，速度 u 仅是 y 的函数. x 方向的动量方程(3.24) 变为

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=0}+u\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0}+v\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=0}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

因为 $\nu=\mu/\rho$，因此上式可以简化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

因此，动量守恒方程仅仅要求流体中剪切力和压力的简单平衡. 将上述方程对 y 积分，可得速度梯度$\partial u/\partial y$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y+C_1.$$

再将水平速度 u 对 y 积分，得到

$$u(y)=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y^2+C_1y+C_2.$$

我们注意到，由于压力梯度$\partial p/\partial x$ 不是 y 的函数，在积分时可以将其视为常数(后面的例子将涉及 y 方向的动量方程).

引入边界条件，确定常量 C_1 和 C_2:

$$在\ y=\frac{H}{2}时 \quad u=0\ (无滑移);$$

$$在\ y=0\ 时 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0\ (对称).$$

根据 y 方向的速度梯度$\partial u/\partial y$ 的计算式，由对称条件可知常量 C_1 等于 0，即

$$0=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\cdot 0+C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1=0.$$

将无滑移条件引入速度分布方程 $u(y)$中，可以确定常量 C_2. 因此

$$0=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{H}{2}\right)^2+C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2=-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{H}{2}\right)^2.$$

速度 $u(y)$公式变为

$$u(y)=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y^2-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{H}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$u(y)=\frac{3}{2}\cdot\frac{H^2}{12\mu}\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[1-\frac{y^2}{(H/2)^2}\right]\quad\Rightarrow$$

$$u(y)=\frac{3}{2}U_{\mathrm{m}}\left[1-\frac{y^2}{(H/2)^2}\right].\tag{3.26}$$

此方程中，平均速度 U_{m} 由下式确定：

$$U_{\mathrm{m}}=\frac{H^2}{12\mu}\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right).\tag{3.27}$$

从下面关系式中可以得到通过平行板间的体积流率 q：

$$q=U_{\mathrm{m}}H=-\frac{H^3}{12\mu}\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right).\tag{3.28}$$

因为流体沿流动方向的压力减小，因而压力梯度$\partial p/\partial x$ 为负．如果用 Δp 表示流道进口与出口间距 l 间的压降，那么

$$\frac{\Delta p}{l}=-\frac{\partial p}{\partial x},$$

则体积流率可以表示为

$$q=\frac{H^3\Delta p}{12\mu l}.$$

流量与压力梯度成正比，与黏度成反比，而且两板间距对流量影响很大(与 H^3 成正比)．若以平均速度的形式表示，则方程变为

$$U_{\mathrm{m}}=\frac{H^2}{12\mu}\cdot\frac{\Delta p}{l}.$$

上述方程给出了关于平行平板间沿流道的压降和流量大小或平均速度之间的简单关系式．最大速度 $U_{\max}$出现在两平板的中间($y=0$)，因此

$$U_{\max}=\frac{3}{2}U_{\mathrm{m}}.$$

根据边界条件，垂直速度分量处处为 0．如果 y 方向动量方程(3.19)包括由于重力而引起的体积力，那么方程变为

$$\cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial t}}+u\cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial x}}+v\cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial y}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\cancelto{0}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}+\nu\cancelto{0}{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}-g\quad\Rightarrow$$

重力加速度

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\rho g.$$

由于重力作用方向向下，因此上面方程中的体积力为负．对之求积分，可得

$$p=-\rho g y+C_3.$$

式中，$C_3=f(x)$．此方程表明，压力在 y 方向按流体静力学规律变化．上式中的常量 C_3

可用与 x 方向的压力梯度$\partial p/\partial x$ 的变化量和参考压力 p_O 有关的函数$f(x)$来表示：

$$f(x)=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)x+p_O.$$

式中，p_O 是$x=y=0$ 处的压力.

流体压力可以由下式获得：

$$p=-\rho gy+\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)x+p_O. \tag{3.29}$$

讨论：无限大平板之间的稳态层流流动完全可以由 Navier-Stokes 方程求解公式来计算．例如，如果给定了压力梯度、黏性系数和平板距离，根据方程(3.26)、(3.27)和(3.28)，可以确定速度分布，也可以确定平均速度及流量大小．同时，对于给定的流体及参考压力 p_O，根据方程(3.29)可以预测任意点的压力．方程(3.26)中，速度分布为抛物线．例 3.2 中的 CFD 模拟同样预测到了这一特定速度分布．速度抛物线分布已经被很多实验所证实．如 Nakayama(1988)的实验显示，在下游流道尾端，每条线上释放的气泡组成抛物线形状．这一充分发展流动分布就是我们所熟知的哈根-泊肃叶(Hagen-Poiseuille)流，是以首先发表这一流动行为的两位研究者(Sutera，Skalak，1993)而命名的．通过这一相对简单的例子说明可以获得流场细节的解析解．上述抛物线速度分布代表了平行流道层流的典型速度分布．

例 3.5 为了阐述动量方程的物理意义，考虑两固定平板间的二维不可压缩层流流动的 CFD 计算．其中，流道流动的尺寸：高 $H=0.1$m，长度 $L=1$m．以空气为工作流体(密度 $\rho=1.2\text{kg/m}^3$)．在下列流动条件下，应用 CFD，讨论入口与流体力学进口长度(L_E)之间流体速度分布的变化．

(a) 固定入口速度：$u_{\text{in}}=0.01$m/s，动力黏性系数分别为：$\mu_1=4\times10^{-5}$kg/(m·s)，$\mu_2=10^{-5}$kg/(m·s)．

(b) 固定动力黏度：$\mu=4\times10^{-5}$kg/(m·s)，入口速度分别为：$u_{\text{in1}}=0.01$m/s，$u_{\text{in2}}=0.04$m/s.

求解：该问题可以描述为如图 3.18 所示的形式．

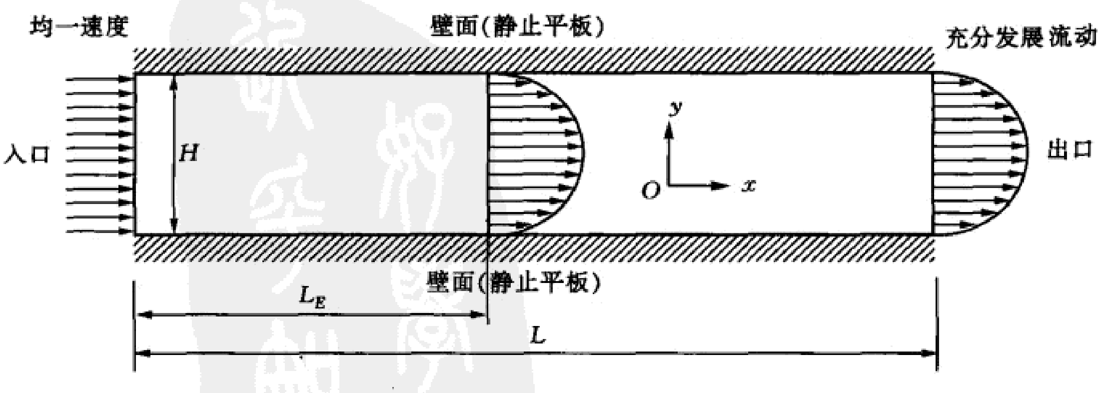


图 3.18 两静止平板间二维层流流体力学进口长度(L_E)距入口的距离

(a) 定义：从入口表面至边界层发展到中心线时的区域为流体力学进口区域，该区域长度称为流体力学进口长度．在这一区域内，速度分布不断变化，因此该区域又称为流体力学发展区域．流体力学发展之后的区域，速度分布得到充分发展并保持不变，称之为充分发展区域．本例中的流体流动为充分发展流动．

基于 CFD 模拟，不同动力黏性系数下，距入口表面下游不同位置 x/H 处的速度分布如图 3.19 和图 3.20 所示．前者流体动力黏度大于后者．

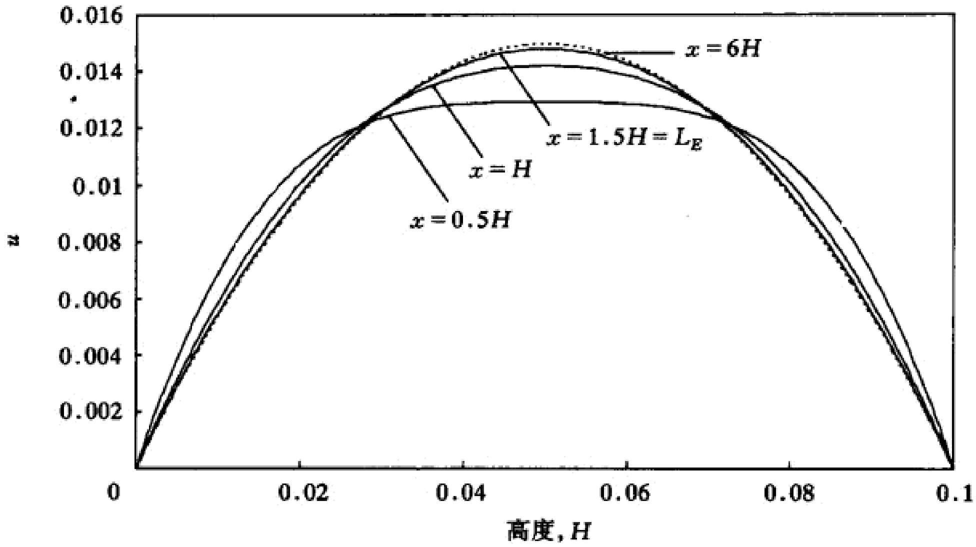


图 3.19 例 A：$u_{in} = 0.01\text{m/s}$，$\mu_1 = 4\times10^{-5}\text{kg/(m·s)}$时不同位置 x/H 的速度分布

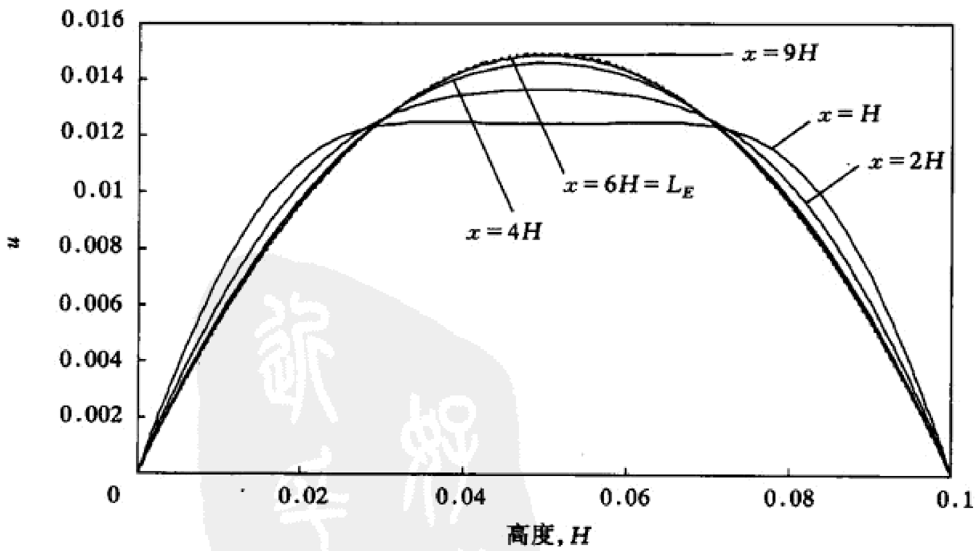


图 3.20 例 B：$u_{in} = 0.01\text{m/s}$，$\mu_2 = 10^{-5}\text{kg/(m·s)}$时不同位置 x/H 的速度分布

(b) 在不同入口速度下，距入口表面下游不同位置 x/H 处的速度分布如图 3.21 和图 3.22 所示．前者流体入口速度低于后者．实际上，图 3.21 所示的例子与图 3.19 中的例

子完全相同. 在此重复出现的目的是为了与较高速度的情况进行比较.

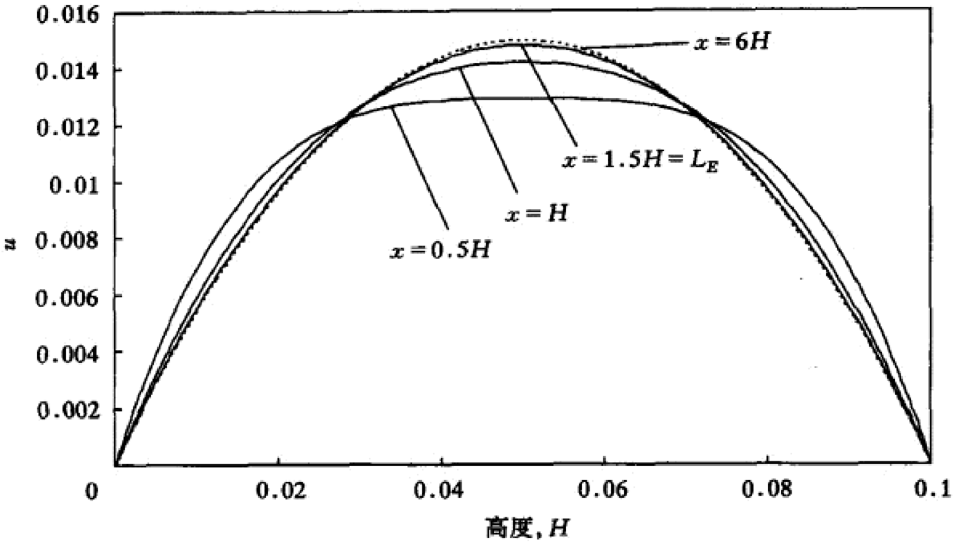


图 3.21 例 C: $u_{in1}=0.01\text{m/s}$, $\mu=4\times10^{-5}\text{kg/(m·s)}$时不同位置 x/H 的速度分布

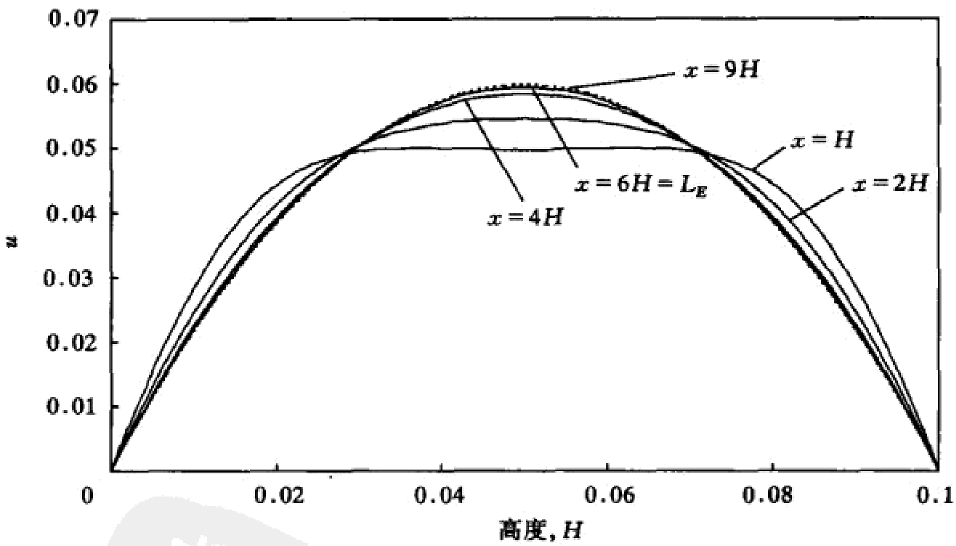


图 3.22 例 D: $u_{in2}=0.1\text{m/s}$, $\mu=4\times10^{-5}\text{kg/(m·s)}$时不同位置 x/H 的速度分布

讨论：我们将稳态二维 x 方向动量方程(3.24)重写如下：

$$\underbrace{\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{惯性力}}=-\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{压力}}+\underbrace{\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}_{\text{摩擦力}}.$$

通过比较图 3.19(算例 A)与图 3.20(算例 B)中的结果，采用相同的流体惯性力，可以看出，算例 A 中具有较高的动力黏度，产生了较大的摩擦力，削弱了流体的运动，这就使得流体在一个较短的距离内快速完成了向流动充分发展阶段的转变. 而算例 B 中摩

擦阻力较小，流体力学边界层发展较慢，经过一个较长的距离才成为充分发展流动．在这些算例中，压力梯度均相等．如图 3.21(算例 C)和图 3.22(算例 D)中所示，当流体具有相同的摩擦力时，速度较高(惯性力大)者得到的结果与图 3.20(算例 B)中摩擦力较高者得到的结果非常相似．算例 D 中的高惯性力产生的影响和算例 B 中低的壁面剪切力产生的低阻力一样，从而算例 D 与算例 B 有同样的流体力学进口长度．以上例子表明了惯性力与摩擦力在动量传递中的相互关系．

3.3.3 说 明

通过对动量方程中对流项与扩散项对流体流动产生不同贡献的研究，对动量守恒进行了探讨．读者必须意识到了解数学方程物理意义的重要性以及它们在 CFD 分析中的作用．在 CFD 中，经常采取与动力学相似的概念．这包括将数学方程无量纲化以得到无量纲控制方程．例如，从前面 CFD 算例 3.5 发现，通过不同入口速度和动力黏度的组合，从流动发展角度得到了相同的流体力学进口长度．现在我们甚至可以将密度 $\rho_1=1.2\text{kg/m}^3$ 变为 $\rho_2=4.8\text{kg/m}^3$，保持动力黏度 $\mu=4\times10^{-5}\text{kg/(m·s)}$不变，将入口速度降至 0.01m/s，我们同样可以获得相同的结果．这是因为，密度的增加对惯性力的增加所产生的效果与增加入口速度的效果是一样的．可见这些物理量组合的结果会产生相同的流体流动行为．描述流体特性的一个重要的无量纲参数是雷诺数(Re)，其定义为惯性力与摩擦力之比，即

$$Re=\frac{\text{惯性力}}{\text{摩擦力}}=\frac{\rho u_{\text{in}}H}{\mu}. \tag{3.30}$$

可以看出，方程(3.30)包括了密度、动力黏度和入口速度三个变量．通过这些变量的不同组合，如果雷诺数相同，则可以获得相同的流体力学进口区域．雷诺数的另一个重要用途是用来判别层流和湍流．对于流道流动而言，如果临界雷诺数小于 1400，则流体将保持层流状态．我们将在例 3.9 中对此无量纲参数作更进一步的阐述．

3.4 能量方程

3.4.1 能量守恒

能量守恒方程是从热力学第一定律推导出来的：

$$\begin{matrix}\text{能量随时间}\\\text{的变化率}\end{matrix}=\begin{matrix}\text{热量净}\\\text{增加量}\end{matrix}\left(\sum Q\right)+\text{净做功量}\left(\sum W\right). \tag{3.31}$$

与 3.3.1 节中讨论的一样，任何通用变量 ϕ 对时间的变化率定义为密度与 ϕ 随体导数的乘积．为了与 N-S 方程(动量方程)的推导保持一致，我们重新参考前面图 3.2 中所描述的用于直角坐标系内的微元体．运动流体微元能量的时间变化率可简化为

$$\rho\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t}\Delta x\Delta y\Delta z. \tag{3.32}$$

$\sum\dot{Q}$ 和 $\sum\dot{W}$ 两项描述控制体内流体热量的净增加率以及表面力对流体的净做功量. 我们首先考虑如图 3.23 所示 x 方向上的情况，y 方向和 z 方向的功与热量的增加率与 x 方向的分析是一样的.

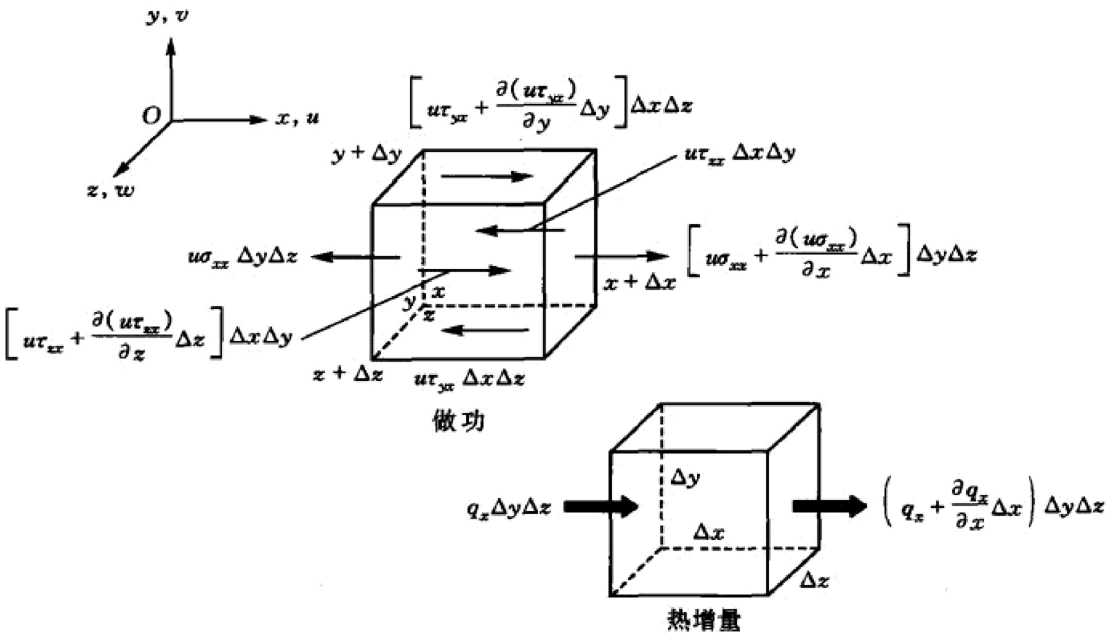


图 3.23 表面力对流体微元所做的功以及流体微元内的热量增加
（只表示了 x 方向的通量）

x 方向控制体上所做的功等于表面力（由法向黏性应力 σ_{xx} 以及切向黏性应力 τ_{yx} 和 τ_{zx} 产生）与速度分量 u 的乘积. 由法向表面应力和切向表面应力产生的在 x 方向上功的变化率以及其他坐标轴方向上做功公式详见附录 A. 综合考虑 x，y，z 三个方向上的表面力，并将方程(3.32)中能量的时间变化率 E 代入方程(3.31)，能量守恒方程可由下式给定：

$$\rho\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(v\sigma_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(w\sigma_{zz})}{\partial z}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}-\frac{\partial q_z}{\partial z}. \tag{3.33}$$

可以根据傅里叶热传导定律确定方程(3.33)中的能量通量 q_x，q_y 和 q_z，该定律反映了热通量与当地温度梯度的相互关系：

$$q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x},\quad q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y},\quad q_z=-k\frac{\partial T}{\partial z}. \tag{3.34}$$

式中，k 为热传导系数.

将方程(3.34)代入方程(3.33)，并应用附录 A 中的法向应力公式，能量方程变为

$$\rho\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\frac{\partial(up)}{\partial x}-\frac{\partial(vp)}{\partial y}-\frac{\partial(wp)}{\partial z}+\Phi. \tag{3.35}$$

能量方程中由于黏性而产生的影响可以用耗散函数 Φ 来描述：

$$\Phi=\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}.$$

此耗散函数代表了作用于流体上变形功产生的能量源. 变形功来自使流体运动的机械能，并将其转换为热量.

到目前为止，我们还没有定义流体的比能量 E. 流体能量通常定义为内能、动能和重力势能之和. 我们可以将重力视为体积力并包含在势能效应中，并将其作为源项来处理. 对于可压缩流动而言，通常将能量方程重新整理以得出焓方程. 关于比能量 E 和焓 h 之间的关系详见附录 A 并可参考 Cengel(2003)的教科书.

现在我们来考虑一个特殊的例子：不可压缩流体，并满足连续性方程. 忽略动能的影响，则焓 h 可以简化为 c_pT，其中 c_p 为比定压热容，并假定为常数. 方程(3.35)可以表示为

$$\rho c_p\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{\partial p}{\partial t}+\Phi. \tag{3.36}$$

在大多数实际工程流体问题中，可以忽略压力对时间的偏导数 $\partial p/\partial t$ 以及耗散函数 Φ 这两项，于是方程(3.36)可简化为

$$\underbrace{\rho c_p\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}}_{\text{加速度}}=\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)}_{\text{扩散项}}. \tag{3.37}$$

为了便于对方程的理解，我们将推导方程(3.37)的二维形式. 假定温度沿 z 方向是不变的，热传导系数 k 是常数，二维能量守恒方程可以表示为

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{局部加速度项}}+\underbrace{u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}}_{\text{对流项}}=\underbrace{\frac{k}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{k}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{\text{扩散项}}. \tag{3.38}$$

3.4.2 物理意义

考虑局部加速度导数(给定点处温度可能随时间波动)以及对流导数(空间一点到另一点的温度不同)，方程(3.38)定义了流体微元经过一点时流体温度的变化率. 为了增强对各导数项物理意义的理解，想象你自己正坐在靠近桑拿房屋顶的高处，由于浮力作用引起的热流使这里空气的温度最高. 你想移到低位处，就向地板方向移动. 当你下来时，空气会冷一些，你会感到温度降低，这与方程(3.38)中对流导数项相类似. 此外，当你坐在低位上时，有人打开门进入桑拿房，你会突然感到有一股冷风吹入. 你周围的温度会立刻降低，这与方程(3.38)中局部加速度导数项相类似. 因此，你所经历的温度变化是由于降低座位高度和桑拿房房门打开吹进冷空气双重作用的结果.

方程(3.38)的其他项表示由于热传导(扩散导数)而引起的热流，式中系数 k 是流体

的热传导系数．我们来考查一下扩散导数项与对流导数项和温度加速度导数项之间的物理关系．为了加强对此物理意义的理解，现在对如图 3.2 所示的两平行平板进行加热．当流体速度非常低时，由于有热量从平板传至流体中，因此流道内流体的温度会增加——这与热扩散占主导(其效应远大于流体局部加速度和对流导数项所产生的效应)所产生的热传导相似．然而，如果流体速度非常高，流体的热量就会被较低温度的流体带走，那么只有平板热表面附近的流体温度较高——这与局部加速度和对流导数项占主导时所产生的效应相似．

例 3.6 为了阐述能量方程(3.38)的应用，考虑通过如图 3.24 所示的一无限长、有限厚度的固体长板的稳态热传导．根据如下边界条件：

(a) $x=0$，$T=T_0$，且 $x=L$，$T=T_L$；

(b) $x=0$，$T=T_0$，且 $x=L$，$\dot{q}_L=-k\dfrac{\partial T(L)}{\partial x}$

确定其解析表达式．

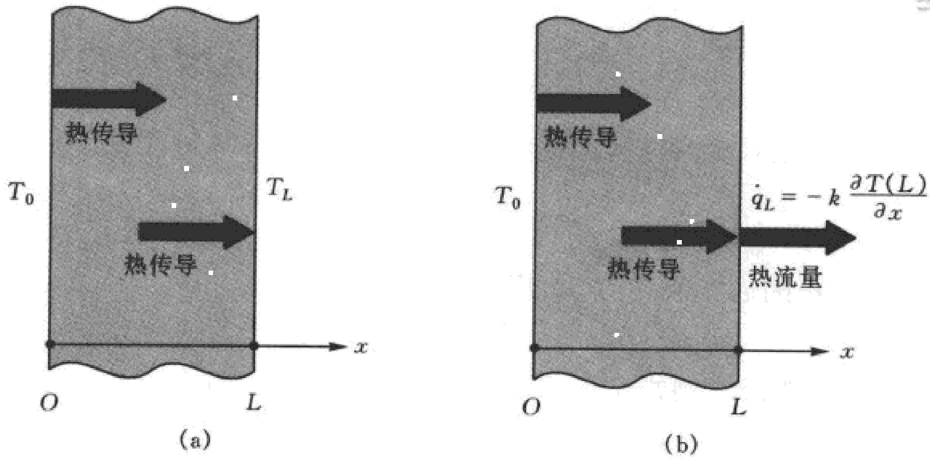


图 3.24 不同温度边界条件下固体长板的热传导

求解：由于是稳态热传导，且是固态问题，因此方程(3.38)的加速度项和对流项可以消去，即

$$\cancelto{=0}{\frac{\partial T}{\partial t}}+u\cancelto{=0}{\frac{\partial T}{\partial x}}+v\cancelto{=0}{\frac{\partial T}{\partial y}}=\frac{k}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{k}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

上述方程简化为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0.$$

对于一无限长板，我们可以只作一维分析，于是方程可以进一步简化为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{=0}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0.$$

对 x 的偏微分方程求积分，可得到

$$\frac{\partial T}{\partial x}=C_1.$$

式中，C_1 是任意常数．继续对上式积分，可得

$$T(x)=C_1 x+C_2.$$

这就是能量偏微分方程的解析表达式．通解中包含两个未知常数 C_1 和 C_2．这两个待定常数需要两个方程来确定，而这两个方程可由固体长板左、右侧的边界条件来确定．

分析：在(a)情况下，将左侧边界条件 $x=0$ 和 $T(x)=T_0$ 代入通解，即

$$T_0=C_1\times 0+C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2=T_0.$$

将右侧边界条件 $x=L$，$T(x)=T_L$ 代入通解，则

$$T_L=C_1 L+C_2 \quad \Rightarrow \quad T_L=C_1 L+T_0 \quad \Rightarrow \quad C_1=\frac{T_L-T_0}{L}.$$

将 C_1 和 C_2 的表达式代入通解，我们可以得到

$$T(x)=\frac{T_L-T_0}{L}x+T_0.$$

在(b)情况下，左侧边界条件与(a)相同，因此

$$C_2=T_0.$$

对于右侧边界条件，此例给定一个指定的热通量 $\dot{q}_L$，而不是给定一个指定的温度 T_L．因为

$$\frac{\partial T}{\partial x}=C_1,$$

因此应用边界条件可以推导出

$$-k\frac{\partial T(L)}{\partial x}=\dot{q}_L \quad \Rightarrow \quad -kC_1=\dot{q}_L \quad \Rightarrow \quad C_1=-\frac{\dot{q}_L}{k}.$$

将 C_1 和 C_2 代入通解，可得

$$T(x)=-\frac{\dot{q}_L}{k}x+T_0.$$

讨论：以上方程是求解有限厚度 L 固体长板温度分布的解析解．它们不仅满足能量方程的一维偏微分形式且满足两个指定的边界条件．两个通解都显示温度呈线性分布，斜率分别为$(T_L-T_0)/L$ 和 $-\dot{q}_L/k$．在对能量方程的一维偏微分形式进行积分的过程中，热扩散系数 $\alpha=k/(\rho c_p)$这一项消失了．这可能给读者一种这样的印象：通过长板的热传导不受任何热物理性质的影响，比如说固体材料的热传导系数 k，密度 ρ，以及比定压热

容 c_p. 然而在(b)例中，通解的最终表达式清楚地表明了材料热传导所产生的影响，该影响是由傅里叶定理得到的物理边界条件来体现的. 为了对温度物理边界条件的类型有更好的理解，将在本章的后面再作相关讨论.

例 3.7 为了阐述能量方程的物理意义，考虑两固定平行平板中不可压缩层流的二维 CFD 算例. 应用 CFD 技术，采用以下尺寸：高 $H=0.1\text{m}$，长 $L=1\text{m}$，将空气作为工作流体(密度 $\rho=1.2\text{kg/m}^3$)，入口处温度均匀分布处处为 330K，壁面温度为 300K，讨论在下列条件下，入口表面至热力学入口长度(L_T)之间的温度分布.

(a) 固定入口速度：$u_{\text{in}}=0.01\text{m/s}$，热传导系数分别为：$k_1=0.04\text{W/(m·K)}$，$k_2=0.01\text{W/(m·K)}$；

(b) 固定热传导系数：$k=0.04\text{W/(m·K)}$，入口速度分别为：$u_{\text{in1}}=0.01\text{m/s}$，$u_{\text{in2}}=0.1\text{m/s}$.

求解： 该问题可以描述为如图 3.25 所示的形式.

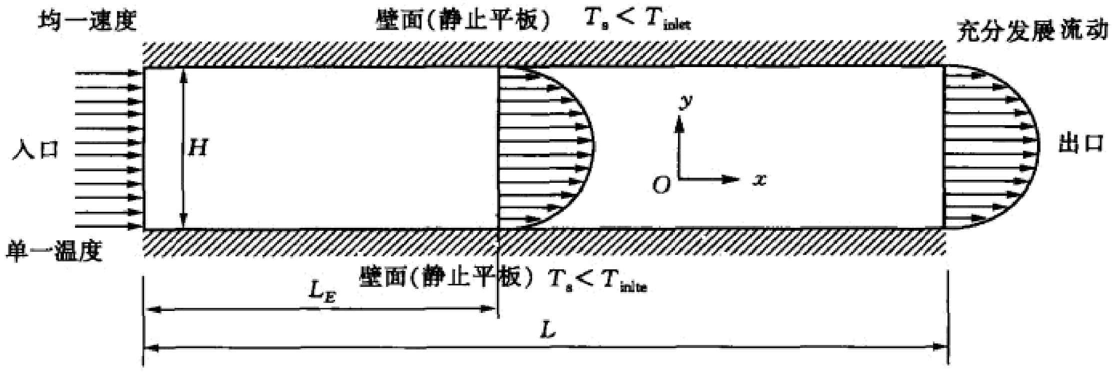


图 3.25 两固定平行平板间二维层流的热力学入口长度(L_T)距入口界面的位置

(a) 定义从入口界面到热边界层与中心线相交的区域为热力学入口区域，这个区域的长度称为热力学入口长度. 由于无量纲温度$(T_s-T)/(T_s-T_m)$在热力学入口区域内仍在发展之中(T_m 为平均温度)，因此，入口区域内的流动又称为热力发展流动. 在该区域之外，无量纲温度分布充分发展并保持不变. 与流体流动相似，将流体速度和无量纲温度分布保持不变区域内的流动称为充分发展流动.

基于 CFD 模拟，不同热传导系数下，距入口界面不同下游位置 x/H 处的无量纲温度分布如图 3.26 和图 3.27 所示. 前者热传导系数大于后者.

(b) 不同入口速度下，距入口界面的不同下游位置 x/H 处的温度分布如图 3.28 和图 3.29 所示. 前者流体速度低于后者. 为了与较高速度算例形成对比，图 3.28 所示的例子与图 3.26 完全相同.

讨论： 如前面关于动量方程的例 3.5 一样，我们可以将稳态二维能量方程(3.38)重新写为

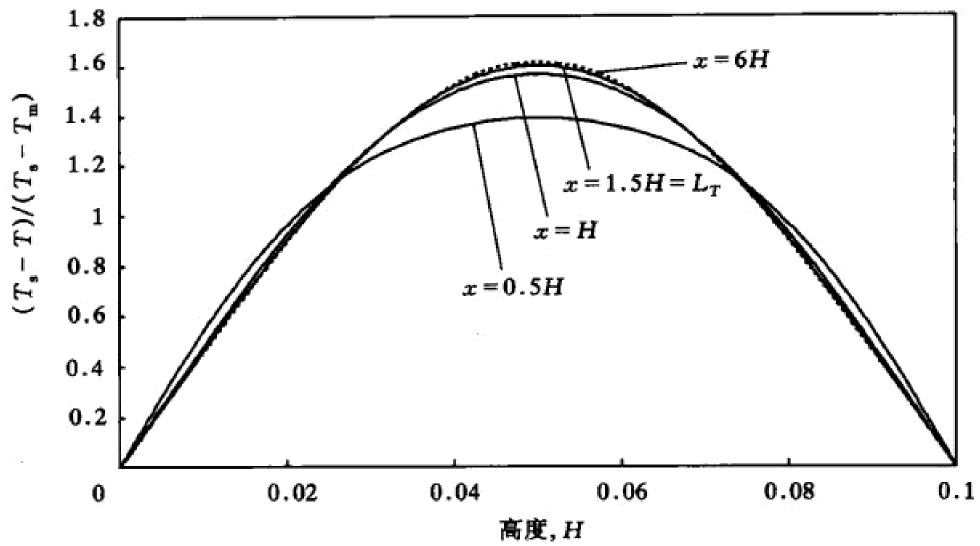


图 3.26 不同位置 x/H 的无量纲温度分布

（入口速度为 $u_{in}=0.01\text{m/s}$，热传导系数为 $k_1=0.04\text{W/(m·K)}$）

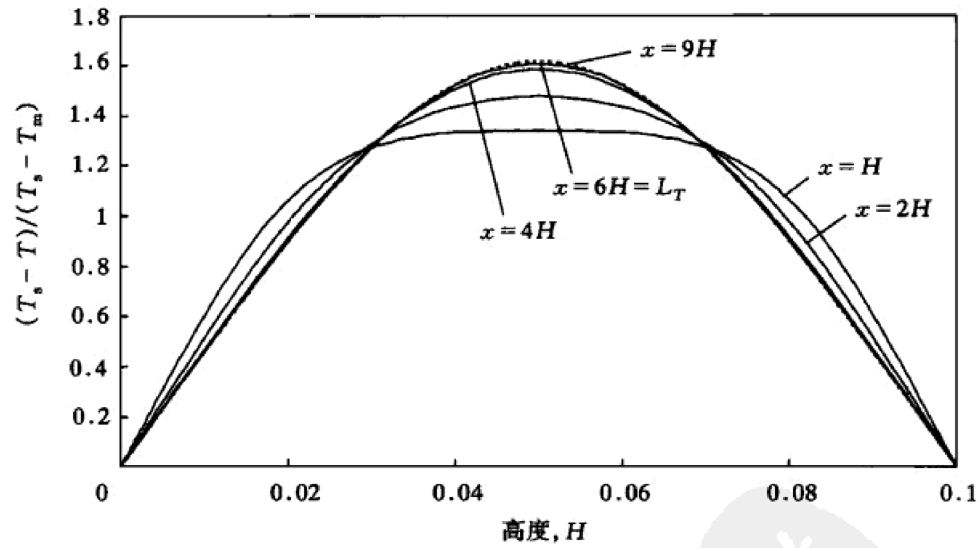


图 3.27 不同位置 x/H 的无量纲温度分布

（入口速度为 $u_{in}=0.01\text{m/s}$，热传导系数为 $k_2=0.01\text{W/(m·K)}$）

$$\underbrace{u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}}_{\text{对流项}}=\underbrace{\frac{k}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)}_{\text{扩散项}}.$$

通过热传导系数和入口速度的变化，以上结果清晰地显示了能量方程中对流项和扩散项之间的关系．对于较高的热传导系数，扩散项占主导地位．由于热量边界层的迅速发展，能在较短的距离内充分发展，从而使得热力学入口长度较短．这一效应看起来与阻止流体运动的高摩擦力所产生的效果是一样的．相反，小的热传导系数使得热量流动较少，因此热边界层发展较慢，从而使得流体在一个较长的距离内才达到充分发展．对于高的入

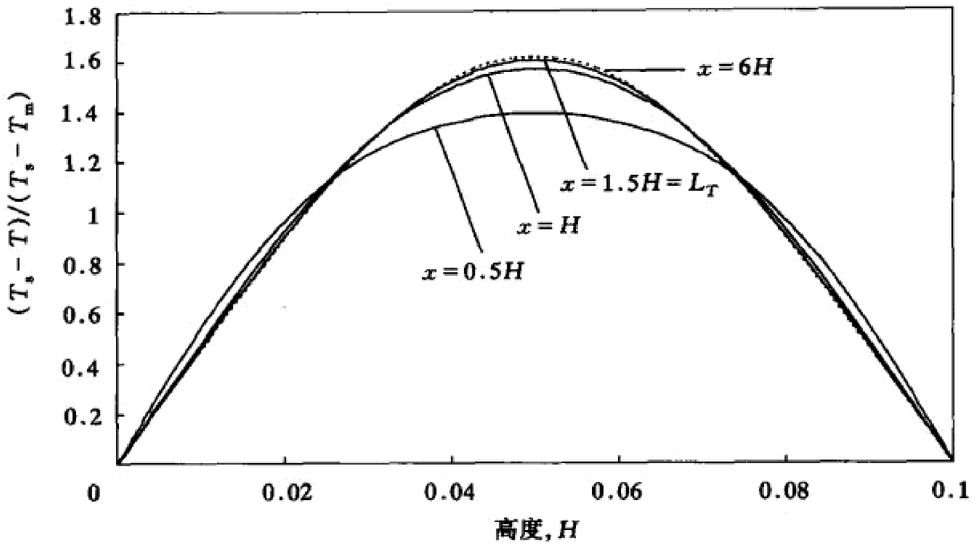


图 3.28 不同位置 x/H 的无量纲温度分布

（入口速度为 $u_{in2}=0.01\text{m/s}$，热传导系数为 $k=0.04\text{W/(m·K)}$）

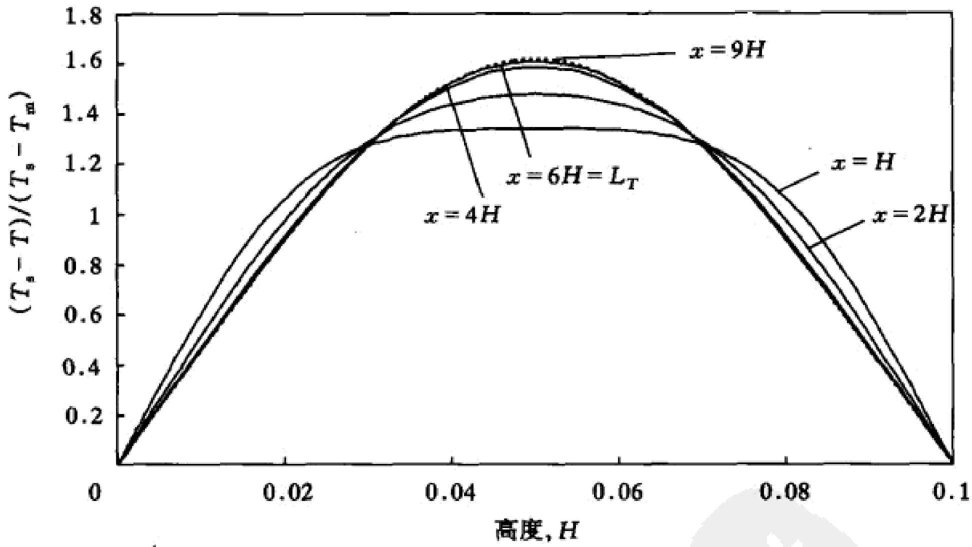


图 3.29 不同位置 x/H 的无量纲温度分布

（入口速度为 $u_{in2}=0.1\text{m/s}$，热传导系数为 $k=0.04\text{W/(m·K)}$）

口速度而言，高的对流项克服了扩散项的影响，从而导致较长的发展阶段而使得热力学入口长度加长．注意，现在所列出的所有有关热力学入口长度的例子与例 3.5 中所有流体力学入口长度完全对应．关于流体力学与热力学性质之间的关系，将在下一节中详细介绍．所有这些例子都表明对流和扩散之间的相互关系，并保持能量传递的守恒．

3.4.3 说 明

同动量守恒定律的讨论一样，本节通过对流项和扩散项在能量守恒方程中的不同贡

献，对能量守恒原理进行了探讨．从例 3.7 中可见，热现象中也存在通过流动变量的组合得到相同传热行为的情况．在前面 3.3.3 节中介绍了无量纲参数雷诺数(Re)，用来反映惯性力和摩擦力在流动过程中的贡献，该无量纲数可以描述流动特性．此处，我们介绍另外一个重要的无量纲参数，即普朗特数(Prandtl number，Pr)，该参数表示分子动量扩散率与分子热扩散率的比值，即

$$Pr=\frac{\text{分子动量扩散率}}{\text{分子热扩散率}}=\frac{\nu}{\alpha}=\frac{\mu c_p}{k}. \tag{3.39}$$

在层流流动中，无量纲参数普朗特数的大小反映了速度边界层与热边界层之间的相对增长率．对于 $Pr\approx1$ 的流体而言，比如气体，两个边界层实质上是一致的．从上面的例子 3.7 中可以看出，假如空气的比热容为 1000J/(kg·K)，空气动力黏度和热传导系数的不同组合可使普朗特数为 1．既然两种边界层相同，那么我们可以得到相同的流体力学入口长度和热力学入口长度．对于 $Pr\geqslant1$ 的流体而言，比如水或油，速度边界层大于热流边界层；对于 $Pr\leqslant1$ 的流体，比如说液态金属，情况则恰好相反．因此，在热流动问题中，我们可以推断热传递特性由普朗特数和雷诺数(描述对流项)共同决定．我们将在例 3.9 中对普朗特数这一无量纲参数的物理意义作进一步的解释．

3.5 湍流附加方程

3.5.1 何谓湍流

工程流体问题绝大多数是湍流流动．因此，湍动流动不仅是学术界感兴趣的理论问题，而工程师们在解决日常问题时也需要了解湍流的影响．

如前所述，用连续性方程和动量方程可以完全描述层流流动．对于一些简单的例子，也可以用解析方法求解(如例 3.1、例 3.3、例 3.4)．对于更为复杂的流体问题，可能就需要用 CFD 技术进行数值求解．众所周知，层流流线的微小扰动最终都会引起流动变得混乱和随机，这就是湍流产生的条件．扰动可能因入口自由流的扰动而产生，或者由表面粗糙度而引发，这些扰动沿流动方向会放大，在这种情况下将会产生湍流．湍动在何处发生依赖于惯性力与黏性力的比值，也就是雷诺数(见方程(3.30))．在低雷诺数条件下，惯性力小于黏性力．自然产生的扰动都耗散掉了，流体流动仍保持层流状态．在高雷诺数条件下，惯性力足够大，从而增强了扰动，于是就会发生流体从层流向湍流的转变．此时，就算给定常数边界条件，流体流动本质上依然呈现非稳定状态，速度以及其他所有流体特性是杂乱的随机变化的．

流体中，湍流与随机脉动一同存在．如图 3.30 所示，可以测定湍流状态下某一点的速度，该速度是时间的函数．由于流动的随机特性，描述流体运动的方程难以用于流动计算．虽然守恒方程仍然成立，但如图 3.30 所示的瞬时速度分布等因变量必须用瞬时量，

因而，不可能预测随机变化的波动的速度，但瞬时速度可以分解为一个稳态平均值 $\bar{u}$ 与脉动分量 $u'(t)$ 之和：$u(t)=\bar{u}+u'(t)$．通常，用流体特性参数($\bar{u}$，$\bar{v}$，$\bar{w}$，$\bar{p}$ 等)的平均值和它们对应的脉动值(u'，v'，w'，p'等)的统计波动特性来描述湍流流动特性．

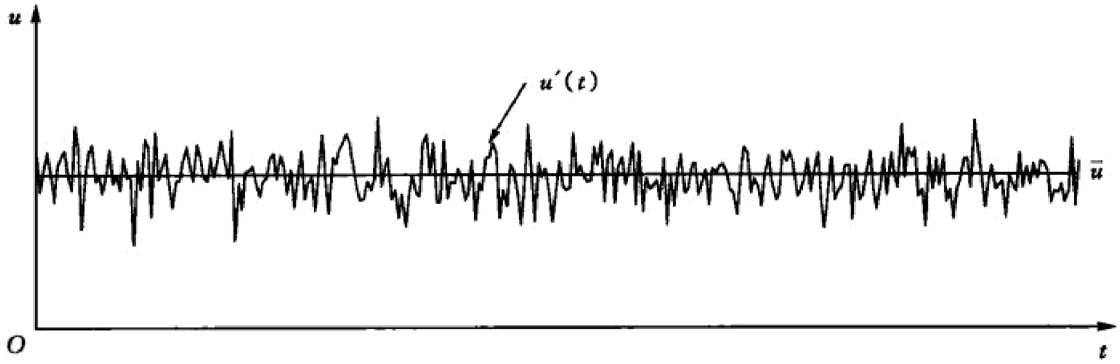


图 3.30 湍流中某点速度随时间的变化

湍动脉动总是具有三维空间特性．从湍动流动显示可以看到旋转流动的结构，也就是通常所说的湍流涡．这些涡的长度和速度都有一个很大的变动范围，又称湍流尺度．最大旋涡的特征速度和特征尺寸与平均流动的速度和长度是同阶的．这意味着当 $ul\gg\nu$(也就是惯性项大大超过黏性项)时，流动的惯性项而不是黏性项决定着最大涡旋(与平均流动尺度相当)．因此，大涡是无黏的．涡的传输是通过旋涡的延展从平均流动中获取能量来实现的．平均流动出现的速度梯度会引起流体的变形，比如产生剪切应变、线性应变，当涡与力的方向一致时，涡一端移动快，另一端移动慢，形成涡的旋转延展．在涡延展的过程中，角动量守恒，平均流动对大涡拉伸所做的功，提供了保持湍流状态的能量．这些大涡出现新的不稳定性，继而又产生了许多小涡．这些小涡延展的能量不是来自平均流动而是上述的大涡旋，因而能量从大涡传入小涡．这一过程会一直进行下去，直到旋涡变小以至于黏性力起主导作用(涡长度尺度 $ul\ll\nu$)．流动做功抵消了黏性应力的作用，因而伴随涡运动的能量被耗散，并转化为内量．能量不断从大涡到小涡再到更小的旋涡的传输称为“能量梯级”(energy cascade)．大涡的流动依赖平均流动特性，因此它们的湍流尺度比黏性要大，从而引起涡结构存在高的各向异性(各个方向都有变化)．与黏性相比，小涡的湍流尺度要小得多(10^{-4}数量级)，此时，黏性扩散效应起主导作用，消耗掉了各个方向上的差别，导致流动的各向同性．

3.5.2 *k*-ε 两方程湍流模型

层流和湍流在物理描述方面有至关重要的差别．对于后者来说，其湍流涡尺度范围很广．横截面积为 0.1m×0.1m 的高雷诺数湍流流动区域内，湍流流动涡旋尺度将降为 10μm 或 100μm．为了描述所有尺度涡的流动过程，我们需要的网格节点数高达 $10^9\sim10^{12}$ 的计算网格．同时，最快的湍流脉动频率可达到 10kHz 数量级，因此，必须将时间的离

散步长取为 100μs.

在现有计算条件下，对高雷诺数湍流流动随时间变化的 N-S 方程的直接数值模拟(DNS)是困难的．然而，工程师要求数值程序能提供关于湍流过程的足够信息，但不必去预测流动中的每个涡旋以及每个涡旋对流动的影响．流动的时均特性信息(例如平均速度、平均压力、平均应力等)就可以满足几乎所有这类 CFD 用户的要求．既然工程师满足于平均值，那么通过对动量方程采取适当的时间平均，我们就可以忽略与流动状态有关的所有描述瞬态脉动的细节．获得的时均值可用于不可压缩流动二维连续性方程、动量守恒和能量守恒方程，得到时均控制方程或者称之为雷诺时均 N-S(RANS)方程：

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}=0, \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial(\overline{\bar{u}\bar{u}})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{\bar{v}\bar{u}})}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)-\left[\frac{\partial(\overline{u'u'})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y}\right], \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\frac{\partial(\overline{\bar{u}\bar{v}})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{\bar{v}\bar{v}})}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)-\left[\frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{v'v'})}{\partial y}\right], \tag{3.42}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}+\frac{\partial(\overline{\bar{u}\bar{T}})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{\bar{v}\bar{T}})}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\rho c_p}\cdot\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{\rho c_p}\cdot\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right)-\left[\frac{\partial(\overline{u'T'})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{v'T'})}{\partial y}\right]. \tag{3.43}$$

式中，$\bar{u}$，$\bar{v}$，$\bar{p}$，$\bar{T}$ 为平均值；u'，v'，p'，T'为湍流脉动值．方程(3.43)中的$k/(\rho c_p)$项为流体的热扩散系数 α.

以上方程中除了附加项$\overline{a'b'}$以外，其他部分与层流公式相似．因此，时均动量方程中就增加了 3 个未知附加项(对三维问题，将有 9 个未知附加项)，它们叫做雷诺应力(Reynolds stresses)．相似地，时均温度方程出现了新增$\overline{u'T'}$和$\overline{v'T'}$两项(三维空间里，还要多一项$\overline{w'T'}$).

如果能将雷诺应力和新增的温度传输项与平均流动和传热参数相联系的话，那么时均方程就能求解．Boussinesq(1868)提出了雷诺应力与平均形变率(应变)有关．我们可以得到

$$\left.\begin{aligned}-\rho\overline{u'u'}&=2\mu_T\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}-\frac{2}{3}\rho k,\\-\rho\overline{v'v'}&=2\mu_T\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}-\frac{2}{3}\rho k,\\-\rho\overline{u'v'}&=\mu_T\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right).\end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

除了湍流涡黏系数 μ_T 和湍流动能k 的表达式外，上述方程右端和牛顿黏性定律相

似.

在方程(3.44)中，假设湍流动量传输与平均速度梯度成比例. 同样，湍流温度传输也假设与传输量均值梯度成比例，则

$$\left.\begin{aligned}-\rho\overline{u'T'}&=\Gamma_T\frac{\partial\bar{T}}{\partial x},\\-\rho\overline{v'T'}&=\Gamma_T\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\tag{3.45}$$

式中，Γ_T 为湍流扩散系数.

既然湍流动量传输和热量传输基于同样的机理——涡混合，那么，湍流扩散系数值可取与湍流黏度 μ_T 相近的值. 根据湍流普朗特数 Pr_T 的定义，可得

$$Pr_T=\frac{\mu_T}{\Gamma_T}.$$

实验研究表明，这个比值近似为常数. 大多数 CFD 软件都假设 Pr_T 为常数且取为 1.

由于大多数工程流体问题中湍流的复杂性，一般不能使用简单的数学表达式加以描述，因而需要推导相似的输运方程去表达湍流动能 k 和其他湍流物理量，其中之一就是湍流动能耗散率 ε. 在此，我们介绍由 Launder 和 Spalding(1974)提出的、广泛应用于湍流工程问题中的两方程湍流模型——标准 k-ε 模型.

首先需要给出一些预定义. 湍流动能 k 和湍动耗散率 ε 可以用直角坐标张量定义并表示为

$$k=\frac{1}{2}u'_iu'_i \quad 及 \quad \varepsilon=\nu_T\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)}.$$

式中，i，$j=1$，2，3.

由局部 k 和 ε 的值，局部湍流黏度 μ_T 为

$$\mu_T=\frac{c_\mu\rho k^2}{\varepsilon}.\tag{3.46}$$

湍流运动黏度或涡黏度用 $\nu_T=\mu_T/\rho$ 表示.

将方程(3.44)中的雷诺应力表达式和方程(3.45)中新增加的温度输运项代入控制方程(3.40)，(3.41)，(3.42)以及(3.43)中，去掉代表平均量的上横线，可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial(uu)}{\partial x}+\frac{\partial(vu)}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\\\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial v}{\partial x}\right],\end{aligned}\tag{3.48}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial(uv)}{\partial x}+\frac{\partial(vv)}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial v}{\partial y}\right]+$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial v}{\partial y}\right], \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial(uT)}{\partial x}+\frac{\partial(vT)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\nu}{Pr}+\frac{\nu_T}{Pr_T}\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\nu}{Pr}+\frac{\nu_T}{Pr_T}\right)\frac{\partial T}{\partial y}\right]. \tag{3.50}$$

温度方程(3.50)中出现的 ν/Pr 项是从层流普朗特数定义中得来的，方程(3.39)中已将其定义为 $Pr=\nu/\alpha$，其中，$\alpha=k/(\rho c_p)$. 有趣的是，以上的时均方程与层流方程推导出来的公式具有相同的形式，不同的只是动量方程中扩散和非压力梯度项的附加湍动黏度以及能量方程中的附加扩散项. 因此，工程湍流流动问题中通过施加流体流动的湍流特性增加了流动的扩散性.

回顾方程(3.17)，同样可以对非守恒控制方程进行推导，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial v}{\partial x}\right], \tag{3.52}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial v}{\partial y}\right]+$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial v}{\partial y}\right], \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\nu}{Pr}+\frac{\nu_T}{Pr_T}\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\nu}{Pr}+\frac{\nu_T}{Pr_T}\right)\frac{\partial T}{\partial y}\right]. \tag{3.54}$$

对流体特性为常数的流动，标准 k-ε 模型中附加微分传输方程的非守恒形式为

$$\frac{\partial k}{\partial t}+u\frac{\partial k}{\partial x}+\nu\frac{\partial k}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu_T}{\sigma_k}\cdot\frac{\partial k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nu_T}{\sigma_k}\cdot\frac{\partial k}{\partial y}\right)+P-D, \tag{3.55}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+\nu\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)+\frac{\varepsilon}{k}(c_{\varepsilon1}P-c_{\varepsilon2}D). \tag{3.56}$$

式中，湍流耗散项 D 由 ε 项确定，湍流动能产生项 P 由下式表示：

$$P=2\nu_T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\nu_T\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2.$$

以上方程的物理意义如下：k 或 ε 的时间变化率以及对流输运之和等于 k 或 ε 的产生项和耗散项之和. 方程含有 5 个可调常数：c_μ，σ_k，σ_ε，$c_{\varepsilon1}$ 和 $c_{\varepsilon2}$. 通过大量数据统计得到的适合于大部分湍流的常数值(Launder，Spalding，1974)：

$$c_\mu=0.09,\quad \sigma_k=1.0,\quad \sigma_\varepsilon=1.3,\quad c_{\varepsilon1}=1.44,\quad c_{\varepsilon2}=1.92.$$

湍流动能的产生与耗散总是与 k 方程(3.55)密切相关. 当 k 的产生项大时，耗散率 ε 亦很大. ε 模型方程(3.56)假设产生项和耗散项与 k 方程中的产生项和耗散项成正比. 如此选择能够确保当 k 迅速增加时，ε 也迅速增加，并且保证当 k 减小时，ε 减小得足够快

以避免湍流动能出现无物理意义值(负值). 产生项和耗散项中的比值 ε/k 保证了 ε 方程(3.56) 各项量纲的正确性.

例 3.8 考虑两静止平行平板中的二维 CFD 算例以阐述流体的层流和湍流特性. 用 CFD 软件对高为 $H=0.1\text{m}$, 长为 $L=10\text{m}$ 的流道进行数值求解, 其中工作流体为空气(密度 $\rho=1.2\text{kg/m}^3$, 动力黏度 $\mu=2\times10^{-5}\text{kg/(m}\cdot\text{s))}$, 观察入口速度在 $u_{\text{in1}}=0.02\text{m/s}$ 和 $u_{\text{in2}}=1\text{m/s}$ 两种情况下充分发展区域内的速度和黏度分布.

求解: 该问题可以描述为如图 3.31 所示的形式.

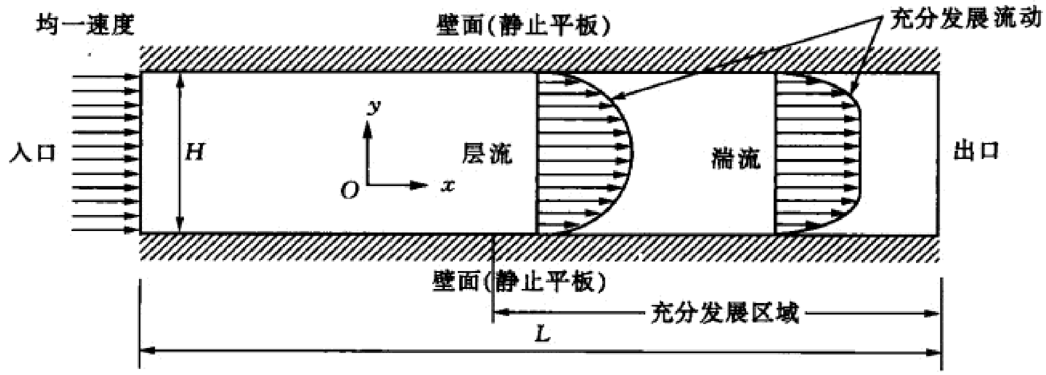


图 3.31 两静止平行平板间二维流体的层流和湍流流动

对于入口速度 $u_{\text{in1}}=0.02\text{m/s}$, 由方程(3.30)求得的雷诺数为 120. 流体处于层流状态. 但对于入口速度 $u_{\text{in2}}=1\text{m/s}$, 求得的雷诺数为 6000, 超过了临界雷诺数 1400, 因此, 流体处于湍流状态.

充分发展区域内层流和湍流速度分布的 CFD 数值模拟结果如图 3.32 所示.

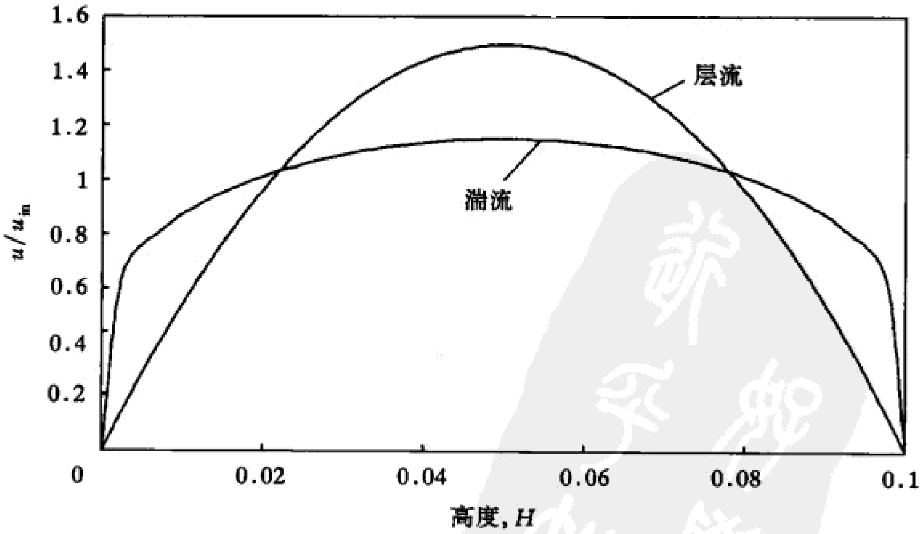


图 3.32 充分发展区域内层流和湍流的速度分布

速度分布中处于同一位置对应的层流动力黏性系数和湍流黏性系数如图 3.33 所示.

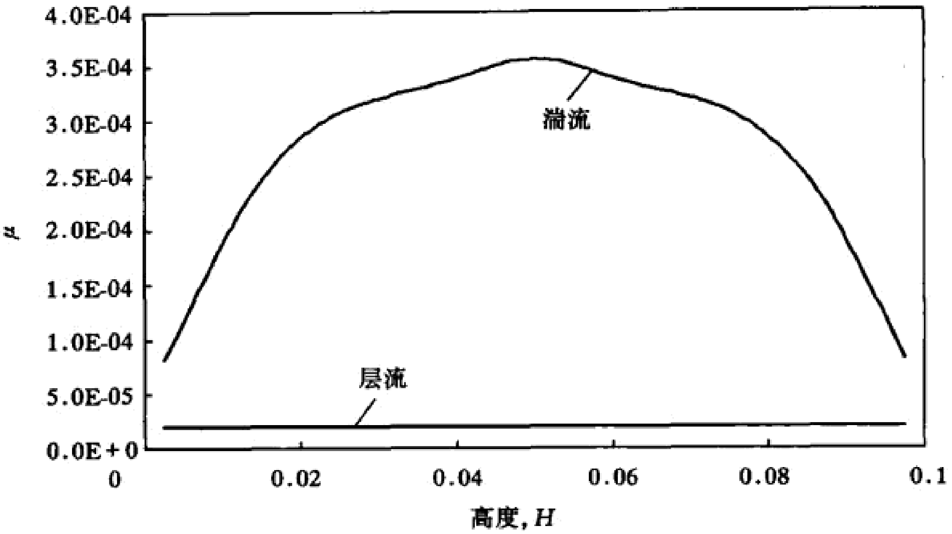


图 3.33 充分发展区域内层流和湍流黏度

讨论：通过观察可以发现，层流和湍流区域的流动结构有显著的不同. 在充分发展区域，层流的速度分布呈抛物线形，而湍流在流道中央的速度分布却相当平坦，在近壁面处速度梯度相当大. 流道中央湍流速度分布平坦的原因是由于动量方程中高湍流黏度导致的流动扩散(这从图 3.33 中靠近中心处湍流黏度比层流(动力)黏度大了一个数量级得到清楚的证明). 为进一步阐述方程(3.46)所推导的湍流黏度的物理意义，沿流道高度绘出了与速度分布处于同一位置的湍动能和动能耗散的分布，如图 3.34 和图 3.35 所示. 结果显示，湍动能 k 和耗散率 ε 的最大值靠近壁面. 从离开壁面到靠近流道中心这一段距离上，湍动能减小，但其减小速度要小于湍流耗散率的减小速度. 虽然在近壁面处湍动能很大，但是湍流耗散率更大，从而产生了较小的湍流黏度. 在流道中央部分，湍流动能大于湍流耗散率，这表明产生了更强的湍流，从而导致了较大的湍流黏度.

3.5.3 说 明

两方程 k-ε 模型是应用最广泛而且最有效的湍流模型. 此模型经过了大量实际流动的成功验证. 在预测薄剪切层、边界层和管流时并不需要逐一调整模型常数，因而获得了巨大成功. 在雷诺剪切应力非常重要的受约束流动中，该模型也表现得非常好. 这使得其适合于很多工程流动，这是该模型在 CFD 用户中广泛使用的原因. 与浮力的结合使得该模型得到拓展，可以应用于环境流动研究，比如大气和湖水中污染物的扩散，以及封闭区域内火焰的模拟.

尽管在处理许多工业问题上，标准 k-ε 模型有非常成功的表现，但是对自由流动的预测，其能力还是有限的. 特别是对于弱剪切层，如远尾迹场、混合层以及无约束分离流动

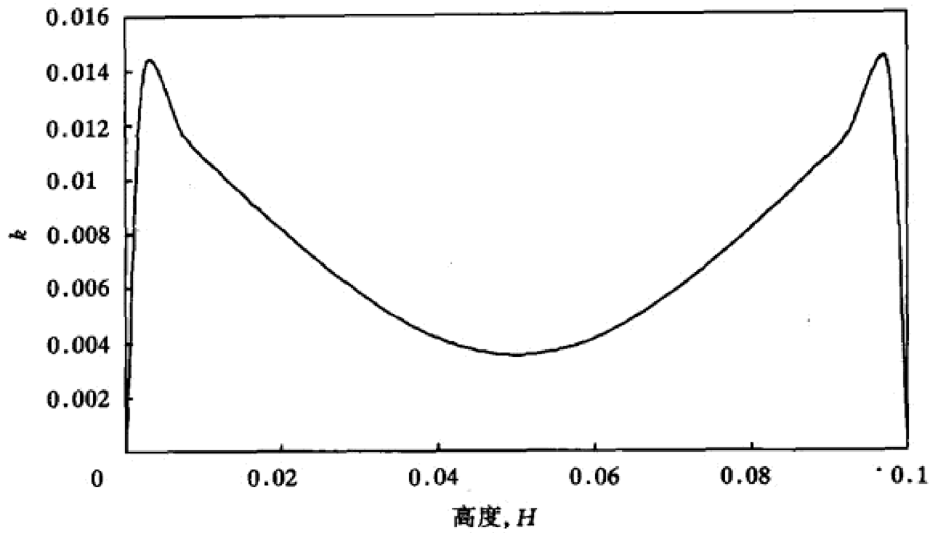


图 3.34 充分发展区域湍流动能 k 的分布

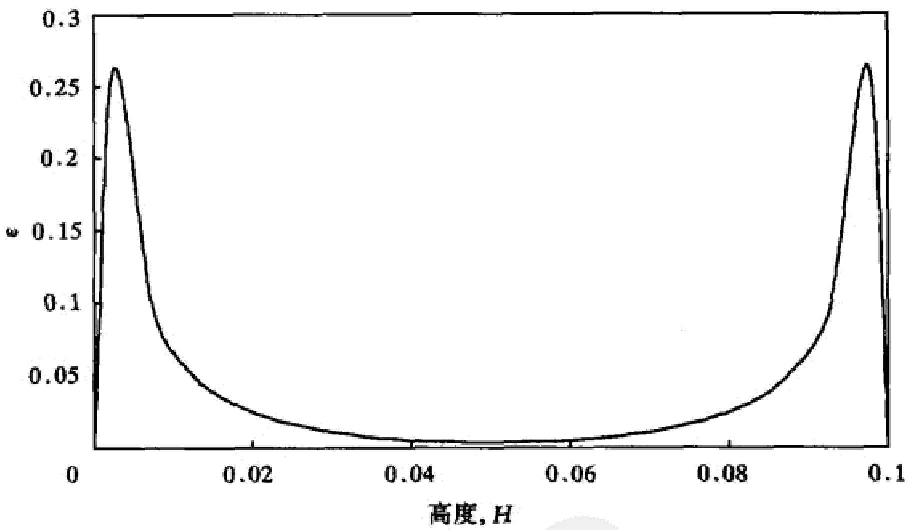


图 3.35 充分发展区域湍流耗散率 ε 的分布

的分析时，该模型还是暴露出明显的弱点．此外，对滞止环境中的轴对称喷射问题，大部分区域内的喷射速度被严重高估，湍流动能的生产率远小于耗散率．通过对模型常数作适当的调整就能解决这一问题，同时也就减少了该湍流模型的通用性和鲁棒性．

由于该模型不能充分描述流线曲率对湍流的细微影响，因而在预测旋流及大流量流动、高速流动以及大应变(如非常弯曲的边界层和通道)流动时遇到了大量问题．标准 k-ε 模型的一个主要缺点是假定了各向同性的涡黏．这种对正应力的处理缺陷，无法预测那些存在于长的非圆管道中的、被各向异性法向雷诺应力驱动下的二次流动．另外，此模型对由于参考坐标系旋转而产生的体积力也是无能为力的．

3.6 CFD 控制方程的通式

以上推导的层流和湍流控制方程，虽然形式不同，但是这些方程都有许多共同之处．在此，我们将质量、动量、能量和湍流量守恒控制方程的三维形式表示在表 3.1 中．如果我们引入一个通用变量 ϕ，并用它表示不可压缩流动守恒形式的所有流动方程，包括温度和湍动量方程，方程通常可以写为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial(u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(v\phi)}{\partial y}+\frac{\partial(w\phi)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)+S_{\phi}. \quad (3.57)$$

方程(3.57)也称为变量 ϕ 的输运方程．它描述了流体流动中所发生的各种物理输运过程：方程左端的局部加速度项和对流项分别等于方程右端的扩散项(Γ 为扩散系数)和源项(S_ϕ)．为了获得各方程的一致表达形式，我们将各方程中不同的各项通通放在右端的源项之中．我们注意到，动量方程中的附加源项 S'_u，S'_v 和 S'_w 是由压力梯度和非压力梯度项以及其他对流体运动产生影响的可能源项(重力等)组成，而能量方程中的附加源项 S_T 可能包含了流体区域内的热源和冷源．

此方程通常作为有限差分法和有限体积法求解的出发点．对于各种输运变量，方程的代数表达式被具体化，然后进行求解．通过将运输变量 ϕ 分别赋值为 1，u，v，w，T，k，ε，并选择恰当的扩散系数 Γ 值和源项 S_ϕ，我们可以得到如表 3.2 中的质量、动量、能量和湍流量的守恒偏微分方程的特定形式．

尽管我们从基本守恒原理出发，详细地推导了一套完整的控制方程，但描述流体运动和传热的最终通用形式与输运方程(3.57)是一致的．此方程是一个非常重要的通用输运方程，能适应复杂的 CFD 模型，解决工程应用中经常遇到的更为复杂的问题．

让我们来关注一些有重要意义的典型的复杂工程流动问题，譬如在燃烧室内旋转湍流反应流动多步燃烧过程，以及气泡柱内包含气泡和液体之间相互作用的多相流动等问题．在方程(3.57)一般形式的基础上添加一些附加输运方程进行建模，就能很容易地对这些问题进行求解．对于发生化学反应的流动而言，各化学组分的输运方程可以通过增加代表每一反应组分的数量，并且在计算反应过程的源项中给出适当的反应速率来解决．对于气泡流动来说，可以建立附加气泡数密度输运方程，可以解得气泡柱内随液体运动气泡的尺寸．

对 CFD 的理解并非是一件困难的事情．相反，由守恒原则推导出来的方程(3.57)进一步强调了其内在的简捷性，任何输运特性都可能通过 CFD 来解决．

在 3.3.3 和 3.4.3 节中，我们已经介绍了无量纲参数，如雷诺数(Re)和普朗特数(Pr)，它们可以用来描述流动和传热过程中一些相似的物理现象．在下一个例子中，我们将质量、动量和能量控制方程无量纲化，以减少方程中出现参数的个数．流动的其他一些相似特性，也将在例子中加以讨论．

表 3.1　　直角坐标系下不可压缩流动的控制方程

质量守恒方程：

(m) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$

动量方程：

(M_x) $\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial(uu)}{\partial x}+\dfrac{\partial(vu)}{\partial y}+\dfrac{\partial(wu)}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_T)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_T)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right]+$

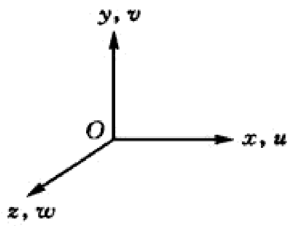
$\dfrac{\partial}{\partial z}\left[(\nu+\nu_T)\dfrac{\partial u}{\partial z}\right]+\left(S_u=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+S'_u\right)$

(M_y) $\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial(uv)}{\partial x}+\dfrac{\partial(vv)}{\partial y}+\dfrac{\partial(wv)}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_T)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_T)\dfrac{\partial v}{\partial y}\right]+$

$\dfrac{\partial}{\partial z}\left[(\nu+\nu_T)\dfrac{\partial v}{\partial z}\right]+\left(S_v=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+S'_v\right)$

(M_z) $\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial(uw)}{\partial x}+\dfrac{\partial(vw)}{\partial y}+\dfrac{\partial(ww)}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_T)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_T)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right]+$

$\dfrac{\partial}{\partial z}\left[(\nu+\nu_T)\dfrac{\partial w}{\partial z}\right]+\left(S_w=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+S'_w\right)$



能量方程：

(E) $\dfrac{\partial T}{\partial t}+\dfrac{\partial(uT)}{\partial x}+\dfrac{\partial(vT)}{\partial y}+\dfrac{\partial(wT)}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(\dfrac{\nu}{Pr}+\dfrac{\nu_T}{Pr_T}\right)\dfrac{\partial T}{\partial x}\right]+$

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(\dfrac{\nu}{Pr}+\dfrac{\nu_T}{Pr_T}\right)\dfrac{\partial T}{\partial y}\right]+\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\left(\dfrac{\nu}{Pr}+\dfrac{\nu_T}{Pr_T}\right)\dfrac{\partial T}{\partial z}\right]+S_T$

湍流方程：

(k) $\dfrac{\partial k}{\partial t}+\dfrac{\partial(uk)}{\partial x}+\dfrac{\partial(vk)}{\partial y}+\dfrac{\partial(wk)}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\nu_T}{\sigma_k}\cdot\dfrac{\partial k}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\nu_T}{\sigma_k}\cdot\dfrac{\partial k}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\nu_T}{\sigma_k}\cdot\dfrac{\partial k}{\partial z}\right)+(S_k=P-D)$

(ε) $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\dfrac{\partial(u\varepsilon)}{\partial x}+\dfrac{\partial(v\varepsilon)}{\partial y}+\dfrac{\partial(w\varepsilon)}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\cdot\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\cdot\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\cdot\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)+\left(S_\varepsilon=\dfrac{\varepsilon}{k}(c_{\varepsilon1}P-c_{\varepsilon2}D)\right)$

其中，$P=2\nu_T\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\nu_T\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]$，且 $D=\rho\varepsilon$

表 3.2　　直角坐标系下不可压缩流体控制方程的一般形式

Φ	Γ_Φ	S_Φ
1	0	0
u	$\nu+\nu_T$	$-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+S'_u$
v	$\nu+\nu_T$	$-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+S'_v$
w	$\nu+\nu_T$	$-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+S'_w$
T	$\dfrac{\nu}{Pr}+\dfrac{\nu_T}{Pr_T}$	S_T
k	$\dfrac{\nu_T}{\sigma_k}$	$P-D$
ε	$\dfrac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}$	$\dfrac{\varepsilon}{k}(c_{\varepsilon1}P-c_{\varepsilon2}D)$

例 3.9 研究两固定平行平板中稳态不可压缩层流流动中的二维 CFD 算例，考虑其控制流动的偏微分方程的动力相似性．流道尺寸：高度 $H=0.1\text{m}$，长度 $L=1\text{m}$．与前面所研究的算例 3.7 和算例 3.8 的几何模型相同．

(a) 把连续性、动量和能量方程 (3.13)、(3.24)、(3.25)和(3.38) 无量纲化．

(b) 应用 CFD 软件，在相同雷诺数条件下，确定空气和水的流场．调整入口速度以保证雷诺数相同并讨论充分发展区域的速度分布．

(c) 同时确定如(b)中同样雷诺数的空气和水的温度场．讨论充分发展区域的无量纲温度分布．入口处温度均一，为 330K，壁面温度为 300K．

求解： (a) 把所有独立和非独立的变量同时除以一个相关的和有意义的常数，就可以得到控制方程(及其边界条件)的无量纲形式．所有的长度都除以特征长度 H(流道宽度)，所有的速度都除以参考速度 u_{in}(入口速度)，压力除以 ρu_{in}^2(流道动压的 2 倍)，所有温度都除以一个合适的温度差(对流道而言，为 $T_\infty - T_s$)，我们就可以得到

$$x^* = \frac{x}{H}, \quad y^* = \frac{y}{H}, \quad u^* = \frac{u}{u_{\text{in}}}, \quad v^* = \frac{v}{u_{\text{in}}},$$

$$p^* = \frac{p}{\rho u_{\text{in}}}, \quad T^* = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s}.$$

式中，“ * ”号表示无量纲变量．将这些变量引入到质量、动量和能量控制方程中，于是方程变为

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} = 0, \qquad \text{——连续性方程}$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) - \frac{\partial p^*}{\partial x^*}, \qquad \text{——}x\text{-动量方程}$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) - \frac{\partial p^*}{\partial y^*}, \qquad \text{——}y\text{-动量方程}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{RePr}\left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}\right). \qquad \text{——能量方程}$$

讨论： 对控制方程进行无量纲化的最大优点就是大大减少了需要考虑的参数．原方程有 8 个参数(H，u_{in}，T_∞，T_s，k，ρ，μ 和 c_p)，通过对有量纲参数进行组合，现在无量纲方程仅仅包括 2 个参量(雷诺数和普朗特数)．因此，对于给定的几何形状，具有相同的相似参数 Re 和 Pr 问题具有相同的解．相似参数的另外一个优点在于，大量实验结果可以很方便地采用这些相似参数进行归类和分析．

(b) 现在探讨雷诺数(Re)的物理意义．根据方程(3.30)中的定义，此无量纲数与密度(ρ)和动力黏性(μ)值有关．对空气来说，$\rho = 1.2\text{kg/m}^3$，$\mu = 2\times10^{-5}\text{kg/(m·s)}$；对水来说，$\rho = 1000\text{kg/m}^3$，$\mu = 10^{-3}\text{kg/(m·s)}$．假设两流体皆为 $Re=120$ 的层流，空气和水的进口速度分别为 0.02m/s 和 0.0012m/s．

基于CFD模拟，充分发展区域内，空气和水的有量纲和无量纲轴向速度分布分别如图3.36和图3.37所示.

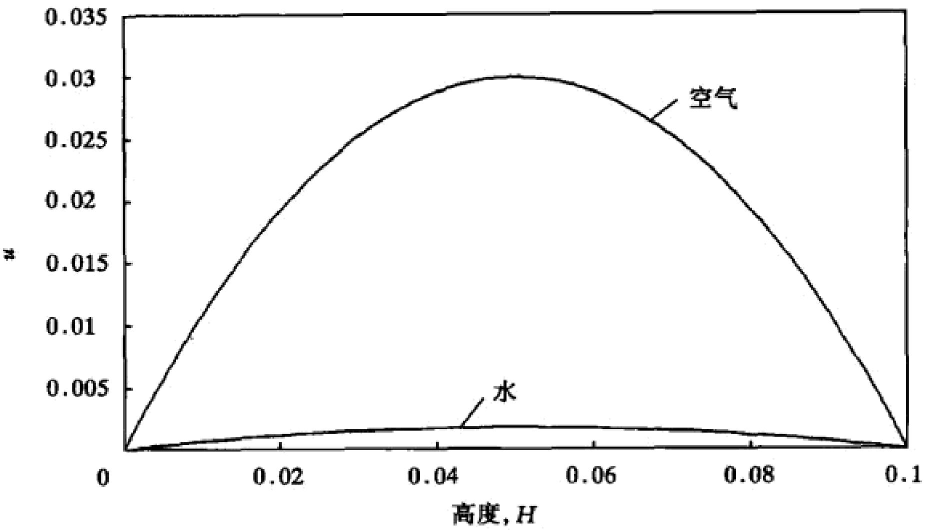


图3.36 充分发展区域内有量纲轴向速度分布

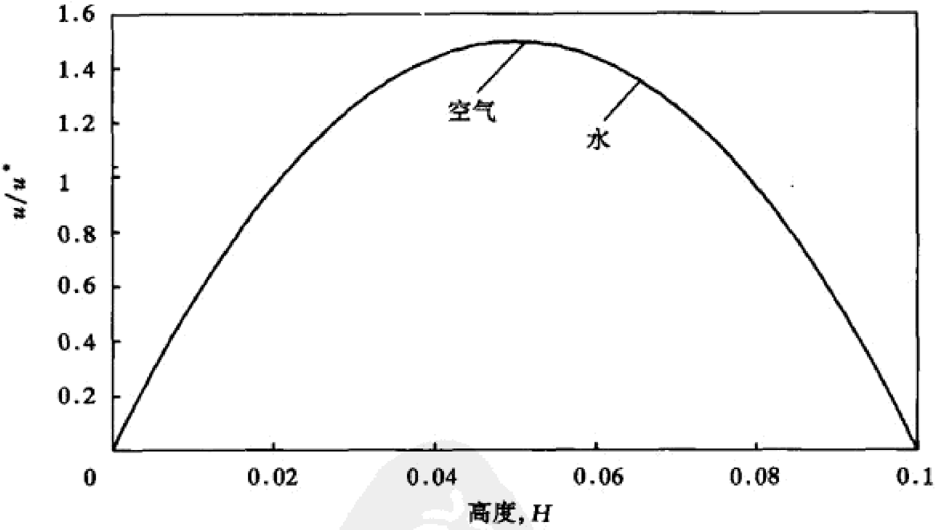


图3.37 充分发展区域内无量纲轴向速度分布

讨论：虽然两种流体(一种是空气，另一种是水)有不同的流动特性参数，但是我们能够得到相同的流动行为．这是因为它们具有相同的雷诺数，而且 x 和 y 方向上的无量纲动量控制方程相同，从而导致了相同的数值解．如果我们考虑如图3.38所示的空气和水流经不同长度的平板，相同的雷诺数下具有相同的入口速度，由于它们具有相同的摩擦系数(C_f)，所以这两个几何形似体具有相同的物理现象.

(c)在此，我们继续研究普朗特数(Pr)的物理意义．如前面方程(3.39)中所定义的，

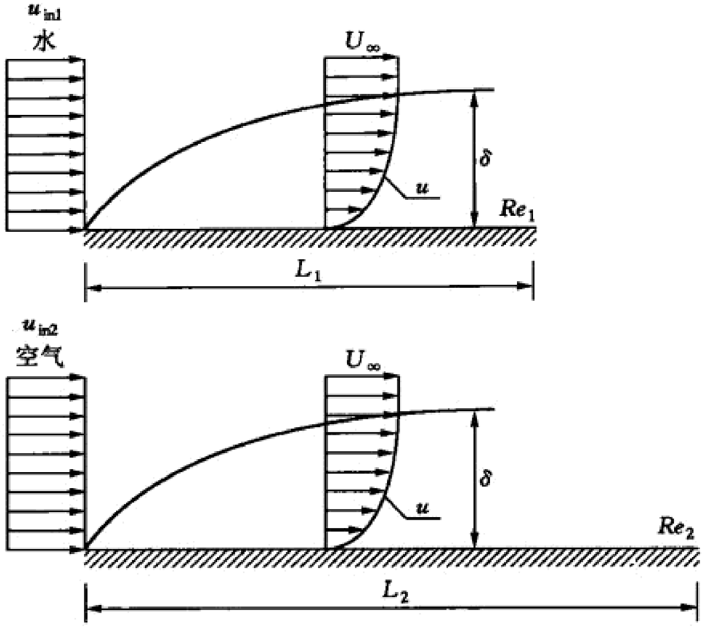


图 3.38 相同雷诺数条件下，具有相同摩擦系数的两几何相似体（如果 $Re_1 = Re_2$，那么 $C_{f1} = C_{f2}$）

它由运动黏度(ν)和热扩散系数(α)确定．对于空气来说，$\nu = 1.667 \times 10^{-5} m^2/s$，$\alpha = 1.667 \times 10^{-5} m^2/s$；对于水而言，$\nu = 1 \times 10^{-6} m^2/s$，$\alpha = 1.435 \times 10^{-7} m^2/s$．由此可以得出，对于空气来说，$Pr = 1$；而对于水来说，$Pr \approx 7$．

根据CFD数值模拟结果，充分发展区域内空气和水的无量纲温度分布如图 3.39 所示．

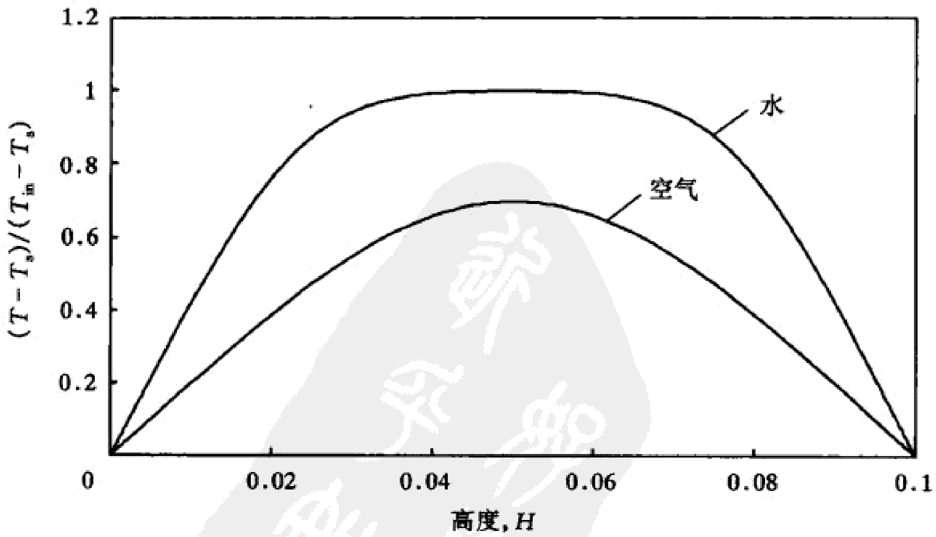


图 3.39 充分发展区域内无量纲温度分布

讨论： 考虑上面所推导的无量纲能量方程中的能量扩散项 $1/(Re\cdot Pr)$，虽然空气和水的雷诺数相同，但是空气的普朗特数远小于水的普朗特数，因而空气中的热量扩散比在水中扩散得要多. 所以，水中的扩散作用弱，对流作用强，使得充分发展区域内水的温度要高于空气. 然而，由于两种流体动量方程中的雷诺数是相同的，速度场中的动量扩散也是相同的，从而它们具有相同的速度分布.

3.7 控制方程的物理边界条件

在第2章中，我们已经介绍了进行流体流动数值计算需要的各类边界条件. 本节中，我们将探讨已经用到的边界条件，以及封闭流场可能要用到的其他重要边界条件的物理意义.

连续性、动量、能量和湍流动量方程控制了流体的流动与传热. 不管流动是经过高层建筑还是大桥，是穿过亚声速风洞还是在计算机内复杂电子装置狭窄流道中流动，控制方程都是相同的. 虽然控制方程都相同，但这些算例的流场却有很大的差别. 其原因就在于定义的边界条件不同. 边界条件，有时候是初始条件，直接决定了控制方程的特解. 例如，在处理具有相同几何形状的所有高层建筑时，在几何表面上给出一定的物理边界条件，在远处自由来流上施加合适的边界条件时，对表3.1中所列的偏微分控制方程进行求解，就能得出流过高层建筑的复杂流场. 而求解计算机内受热通道中的流场需要其他物理边界条件，如计算机内入气口和出气口的几何形状和位置.

在前面的章节里，我们已经推导并描述了控制方程的公式. 但是，真正使得产生特解的因素却是边界条件. 这在CFD中尤其重要，因为控制方程的任何数值解都源于合适边界条件的数值表达式.

现在回顾一下黏性流动中的物理边界条件. 我们首先来关注所谓的无滑移(no-slip)边界条件. 此时，假定固体壁面上的边界条件为：壁面和贴壁流体的相对速度为0. 如果壁面是静止的，当流体流过壁面时，壁面处流体所有速度分量都为0，即

$$u=v=w=0 \quad \text{(壁面处)}. \tag{3.58}$$

在第2章及例3.2、例3.5、例3.7、例3.8、例3.9中，我们已经介绍了流道流动的流入边界条件. 就大多数流动而言，对于任何输运变量 ϕ，控制方程的求解需要在流入边界上至少给定一个速度分量. 对于流道流动而言，要求对 x 方向的速度设定Dirichlet边界条件：

$$u=f \quad \text{及} \quad v=w=0 \quad \text{(流入边界处)}. \tag{3.59}$$

式中，f 可以定义为常量或者流体在入口表面处的速度分布.

计算时，只要 f 是连续的，Dirichlet条件就可以被准确地应用. 在第2章及例3.2、例3.5、例3.7、例3.8、例3.9中已经介绍了出口边界条件. 一般来说，出口边界条件通常设置在流动接近于单向流动而且表面应力为已知的位置上. 对于充分发展流动，其速

度分量在流道横截面上不再变化．为满足应力连续性条件，出口断面上的剪切力设为 0，这就给出了流出条件：

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial w}{\partial n}=0 \qquad (流出边界处). \tag{3.60}$$

式中，n 为出口断面的法线方向，对于流道流动问题来说就是 x 方向．

此条件就是通常所知的 Neumann 边界条件．参考连续性方程(3.13)，显然，第 2 章中施加在流道壁面任意位置上的边界条件(3.58)、(3.59)和(3.60)，不仅在数学上封闭了方程，而且能够满足局部和全流场的质量守恒．

类似地，壁面上关于温度的无滑移条件为：如果壁面材料温度为 T_w，那么与壁面相接触的流体层温度也为 T_w．对于壁面温度已知的给定问题，运用 Dirichlet 边界条件，流体温度为

$$T=T_w \qquad (壁面处). \tag{3.61}$$

此边界条件的应用已在例 3.6 中的(a)部分以及例 3.8 和例 3.9 中进行了阐述．不过，如果壁面温度未知(向壁面传热或从壁面散热，温度是时间的函数)，在壁面上可以利用傅里叶(Fourier)传热定律来设定必要的边界条件．如果用 q_w 代表瞬时壁面热流量，根据 Fourier 定律有

$$q_w=-\left(k\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w \qquad (壁面处). \tag{3.62}$$

此边界条件的应用同样也在例 3.6(b)中进行了阐述．此处，壁面温度 T_w 的变化与传递给壁面的热流量 q_w 形成的壁面材料热响应相对应．就我们关心的流动而言，此种类型的边界条件为壁面温度梯度边界条件．对于没有热量传至壁面的情况，将此壁面温度定义为绝热壁面温度 T_{adia}．根据方程(3.62)和 $q_w=0$，对应的边界条件为

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w=0 \qquad (壁面处). \tag{3.63}$$

此条件与流出边界上速度的 Neumann 边界条件相同．在流动区域的流入和流出边界上，在流入边界上指定温度而在流出边界上采取绝热条件是很普遍的．

在 CFD 实践中，还有一些普遍用到的其他类型的边界条件，其中之一就是开放边界条件(open boundary condition)．如果我们回忆一下此节开头时关于高层建筑上边界条件设置的描述，自由来流边界就应用到了开放边界条件，简单来说就是规定任意传输变量 ϕ 的法向梯度为 0，即$\partial\phi/\partial n=0$．Gresho 和 Sami(1991)对不可压缩流体中开放边界条件的复杂性进行了综述，并指出了开边界条件存在的一些理论问题．然而，由于其在 CFD 实践中的成功应用，与理论上更为成熟的边界条件相比，该边界条件作为最简单、最经济的方法被推荐．此外，利用对称和周期性边界条件对特定几何形状的计算域求解具有优越性．对于对称边界条件而言，壁面上的法向速度为 0，同时，其他速度分量的法向梯度也为 0．速度法向梯度为 0 这一条件同样适合于其他任何标量．对周期性边界条件而言，根

据流动区域经过周期性的两个表面，第一个表面上传输变量 ϕ_1 等于第二个表面上的传输变量 ϕ_2，即 $\phi_1=\phi_2$.

对湍流量而言，通常将 Dirichlet 和 Neumann 边界条件分别运用到湍流动能 k 和耗散率 ε 的流入和流出边界上. 但是，由于湍流在近壁面处存在层流边界层，k 和 ε 的边界条件要经过特殊处理. 第 6 章中，我们将进一步详细地讨论湍流量的近壁面处理.

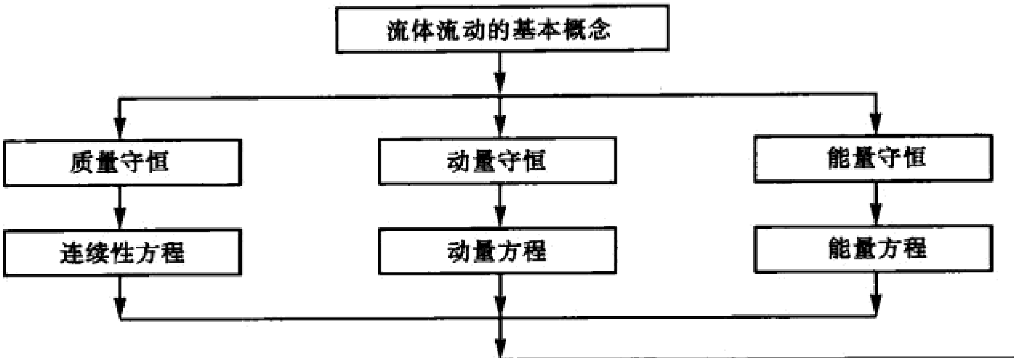
3.8 小 结

在本章中，根据质量、动量和能量守恒的基本原则，我们建立了流体流动和传热通用的数学表达式. 通过考虑一无限小控制体的质量和能量守恒推导了控制方程，作用在控制体上的净力等于线性动量的时间变化率. 虽然我们应用牛顿黏性应力模型来封闭方程，但是运用这些方程的构架同样可以很容易地求解非牛顿流体. 虽然控制方程中的黏性以及其他热物理特性，如密度、导热系数和比热容等，可能因局部条件的不同而变化，但考虑这些影响还是非常容易的.

同时，我们向读者介绍了湍流建模的一些内容，给出了应用广泛的两方程 k-ε 模型. 此湍流模型在日常 CFD 计算中被广泛推荐，并且是一些商业软件的默认模型.

不管是层流流动还是湍流流动，这些守恒方程中有很重要的共同点. 这就使我们能够建立控制方程的通用形式. 同时讨论了在 CFD 框架下通常被用来封闭流动方程的物理边界条件. 从流体流动概念出发，到方程的系统求解的总体思路如图 3.40 所示.

下一章将讨论求解这些控制方程的方法. 我们将给出一些求解这类偏微分方程的基本计算方法. 本章所提到的方程通常被认为是应用离散程序预测流体运动和传热过程的基础. 下一章将进一步讨论流体运动和传热过程的离散和求解.



通用形式

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{局部加速项}} + \underbrace{\frac{\partial (u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial (v\phi)}{\partial y} + \frac{\partial (w\phi)}{\partial z}}_{\text{对流项}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)}_{\text{扩散项}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{源项}}$$

连续性方程：

$\phi = 1; \Gamma = 0; S_\phi = 0$

动量方程：

$\phi = u, v, w; \Gamma = \nu + \nu_T; S_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}S'_u, -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}S'_v, -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}S'_w$

能量方程：

$\phi = T; \Gamma = \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_T}{Pr_T}; S_\phi = S_T$

湍流量方程：

$\phi = k, \varepsilon; \Gamma = \frac{\nu_T}{\sigma_k}, \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}; S_\phi = P - D, \frac{\varepsilon}{k}(c_{\varepsilon 1}P - c_{\varepsilon 2}D)$

如果为层流流动，$\nu_T = 0$，且湍流量不用求解．CFD 中为封闭流体流动通常采用的边界条件为：Dirichlet：$\phi = f$；Neumann：$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$

图 3.40　第 3 章总体思路框图

复习题

3.1　对于二维等密度情况，简化连续性方程通式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0.$$

3.2　在收缩喷管中，由于截面渐缩使流动加速．讨论流动过程中速度梯度$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$的变化规律(假设密度不变)．

3.3　何为牛顿第二运动定律？

3.4　写出作用于微分控制体积上所有力的力平衡方程．

3.5 对于 x 方向上流体的动量特性，讨论局部加速度$\frac{\partial u}{\partial t}$及对流项 $u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}$在流体传递中的作用.

3.6 简化的一维无黏性、不可压缩层流 x 方向上的动量方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

指出每项的名称，并讨论各项在流动中的作用.

3.7 y 方向的流动动量由方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-g$$

给出. 讨论作用在流体上的力.

3.8 动量方程(3.7)与方程 $\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$有何区别?

3.9 当流体为空气[$u_{in}=0.03\text{m/s}$，$\mu_1=1.65\times10^{-5}\text{kg/(m·s)}$，$\rho=1.2\text{kg/m}^3$]时，如图 3.41 所示的流道内流动的流体动力学长度为 L_E. 当工作流体为水[$\mu_1=1.003\times10^{-3}\text{kg/(m·s)}$，$\rho=1000\text{kg/m}^3$]时，为获得相同的流体动力学长度，其入口速度应为多少?

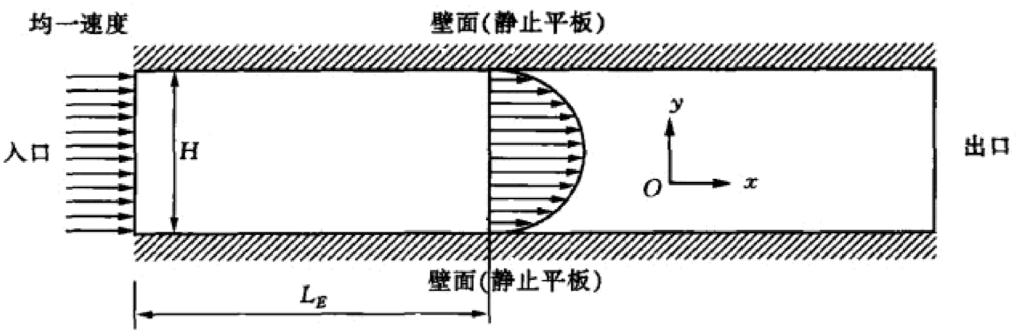


图 3.41

3.10 雷诺数是哪两个流体特性参数的比值?

3.11 如果雷诺数非常高($Re\gg10000$)，意味着什么? 如果雷诺数非常低($Re\ll100$)，又意味着什么?

3.12 解释热力学第一定律.

3.13 指出能量方程中各能量源的名称.

3.14 对于热力学第一定律，使用方程(3.11)中定义的能量源，写出能量平衡方程.

3.15 应用热传导的 Fourier 定律，求 x 方向上的热流量.

3.16 写出由局部加速度导数及对流导数项中的温度传递所定义的随体导数方程.

3.17 如果汽车在较热的环境中行驶，车体的温度将会突然升高. 这是否是局部加速度导数或对流导数做功的结果?

3.18 在何种条件下，可以将二维能量方程

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{k}{\rho c_p}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{k}{\rho c_p}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

简化为人们熟知的拉普拉斯(Laplace)方程$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$?

3.19 对于一维问题，求解拉普拉斯方程的通解.

3.20 普朗特数是哪两个流体参数的比值?

3.21 油等流体具有高的普朗特数($Pr\gg 1$)，这意味着什么?

3.22 入口长度项中，普朗特数等于1的意义是什么?

3.23 何为湍流中的能量梯级过程?

3.24 为什么自然界中的大涡趋于各向异性? 为什么小涡是各向同性的?

3.25 直接数值模拟(DNS)在工程应用中仍然存在困难，其原因何在?

3.26 指出图3.42中哪条曲线为层流或湍流的速度分布曲线?

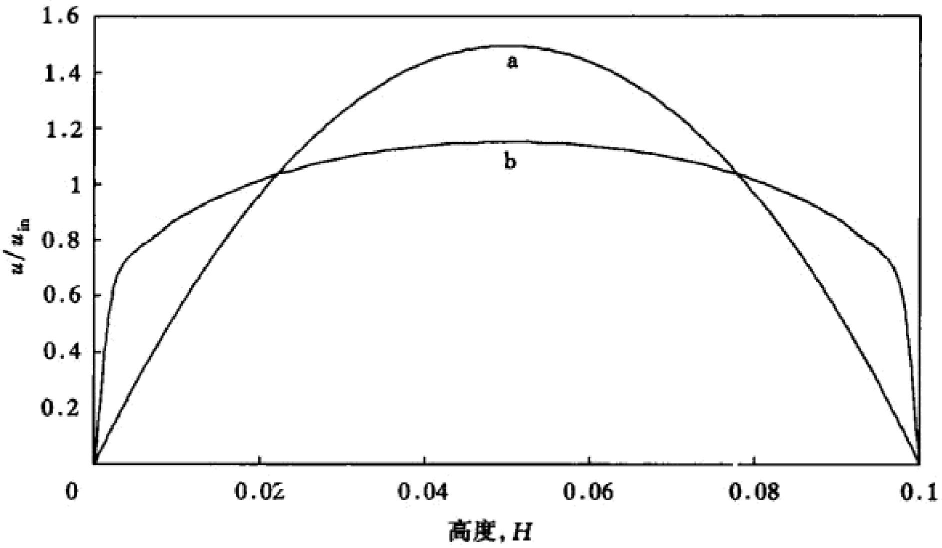


图 3.42

3.27 基于问题3.26，描述湍流速度分布的形状. 解释其分布与层流分布存在巨大差别的原因.

3.28 对于不可压缩流动，无量纲传递方程可简化为 $u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{Re}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. 对于层流流动，解释扩散项(方程的右侧部分)与对流项(方程的左侧部分)相比占主导地位的原因. 在高湍流流动时，情况恰好相反，原因何在?

3.29 指出通用方程 $u\frac{\partial \phi}{\partial x}=\Gamma\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+S_\phi$ 中的各项.

3.30 在问题3.29中，方程表示特性 ϕ 的传递过程，该方程在什么情况下可以使

用？

3.31 指出如下方程的错误(提示：该方程为3-Dx方向的动量方程)：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial(uu)}{\partial x}+\frac{\partial(vu)}{\partial x}+\frac{\partial(uu)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\left(S_u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+S'_u\right).$$

3.32 参照图3.43，回答下列问题：

(a) 壁面上u和v是多少？

(b) 在对称平面上，u，v和p的值各是多少？

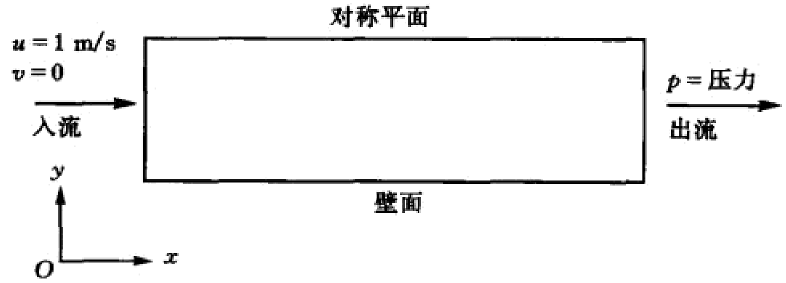


图3.43

4 CFD求解技术基础

4.1 概 述

本章介绍求解流体动力学控制方程的一些基本计算方法. 作者将尽力说明在根据具体问题确定合适边界条件的基础上, 如何采用这些计算方法获得控制方程的近似解.

数值求解过程包括两个步骤. 第一步包括偏微分方程及其辅助(边界和初始)条件转换为离散代数方程组. 这一步也就是我们所熟知的离散阶段.

在第3章中, 对于某些简单的一维流动问题, 我们已经从N-S偏微分方程中推导出了解析解. 其中, 作为空间位置 x, y, z 函数的 u, v, w, p 等所构成的封闭型表达式, 可以用来求解流域内变量任意位置上的值. 但是, 自然界中的实际流动通常是三维流动问题, 其解析关系并不容易得到. 即使将三维流动简化为二维问题, 得到解析关系也是困难的. 第2章中, 我们已经知道, 可以应用CFD求解简单二维管道流动问题. 原N-S方程由代数方程来近似, 而不是其封闭型表达式. 通过CFD求解器, 可以获得流域内 u, v, w, p 等参数在离散位置上的离散数值. 用代数方程组完全代替偏微分方程组, 进而求解流域内变量的离散值. 为了得到离散位置上的离散值, 应将原偏微分方程进行离散.

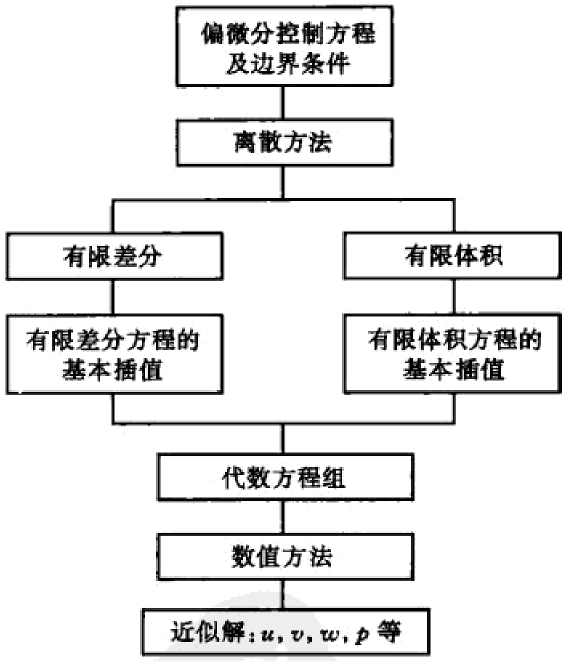


图 4.1 数值求解过程框图

图4.1给出了常规离散过程和计算求解步骤的总体框图. CFD中这两种主要的离散方法(有限差分法、有限体积法)将在4.2节中作进一步的阐述. 值得一提的是, CFD中还有其他可用的有效离散方法: 有限元法和谱方法. 一般而言, 有限元法和有限体积法有很多共同之处. 区别在于, 有限元法在局部单元上采用简单的分段多项式来描述未知流动变量的变化关系. 引入加权残差的概念来检测逼近函数的误差, 残差最终达到最小. 求解一组含有未知项的非线性代数方程组的逼近函数, 于是就得到了流动的解. 尽管大量商业

和研究软件采用有限元法，但该方法在 CFD 中并没有得到更广泛的应用. 有限元法的突出优点在于能够处理任意几何形状的流动问题. 但与有限体积法相比，有限元法需要更大的计算资源和更强的计算机处理能力，因此其使用受到限制. 谱方法与有限差分法和有限元法相同，只是用截断级数代替控制方程的未知部分. 区别在于，前两种方法进行局部逼近，而谱方法则在整个流动区域内，通过截断 Fourier 级数或用 Chebyshev 分段级数进行整体逼近. 用加权残差来衡量近似解与真实解的偏差，这一点与有限元法相似.

在各种可用的离散方法中，本书仅着重有限差分法和有限体积法的基本推导. 之所以讨论有限差分法，是因为在构造代数方程上比较容易，而且它是全面理解离散本质特性的基础. 而有限体积法则是所有商业 CFD 软件中主要采用的方法. 读者需尽快熟悉这种方法，因为这种方法不仅可以用于结构化网格之中还可以用于非结构化网格之中，而非结构化网格应用广泛并且可用于处理任意几何模型的流动问题. 对于结构化网格，在二维结构中通常设计成规则四节点单元，在三维结构中通常设计为八节点六面体单元. 对于非结构化网格，在二维结构中通常采用三角形单元，在三维结构中采用四面体单元.

求解过程的第二步是用数值方法来求解代数方程组. 将在 4.3 节中讨论求解代数方程组合适的数值解法.

本章中，我们着重讨论典型稳态流动问题中出现的代数方程组. 这些控制方程只包括空间导数，可用有限差分法或有限体积法进行离散. 而对于在实际中专门用有限差分法离散的非稳态流动问题，其时间导数的一些基本逼近法将在 4.2.1 节中作简单的描述.

4.2 控制方程的离散

4.2.1 有限差分法

有限差分法是偏微分方程数值解法中最早出现的方法. 据说由 Euler 于 1768 年提出，用于手工方法获得微分方程的数值解. 网格上每一个节点都用来描述流体流动区域，通过泰勒级数展开生成控制方程偏导数的有限差分逼近方程. 而后，用有限差分逼近方程代替这些导数方程，得到每个节点上的代数方程. 原则上，有限差分法适应于任何类型的网格系统. 但是，由于它对网格规则性有很高的要求，因此通常用于结构化网格. 节点之间的网格步长不必一致，但是为了保证计算精度，变形或扭曲网格的总量必须加以限制. 拓扑结构上，有限差分结构化网格必须符合常规坐标系，如，由六面计算区域组成的直角网格坐标系的约束. 但是，使用中间坐标映射时，如适体坐标系，就没有严格的几何约束，从而可以对复杂的形状进行建模.

有限差分法允许在结构化网格中包含高阶差分逼近方程，这样可以提高求解精度. 而其主要的缺点在于，除非特别小心，守恒性很难得到满足.

数值求解的第一步是对几何区域进行离散，因此必须定义一个数值网格. 有限差分法

中，通常是局部结构化网格，这就意味着网格每个节点必须与原局部坐标系一一对应，坐标轴必须与网格线相一致．这也意味着任意两条网格线在其他地方不相交，不同区域内任意一对网格线只能在节点处相交一次．在三维坐标系中，三条网格线在每一节点处相交，任意两条网格线在其他节点处都不相交．图 4.2 所示为有限差分法中广泛应用的等距一维及二维直角坐标网格．在这两种网格系统中，每个节点都由一组坐标唯一确定，二维网格空间的网格线交点值用(i, j)表征，而三维空间则用(i, j, k)表征．相邻节点的坐标值在此节点的基础上加减一个单位即可得到．

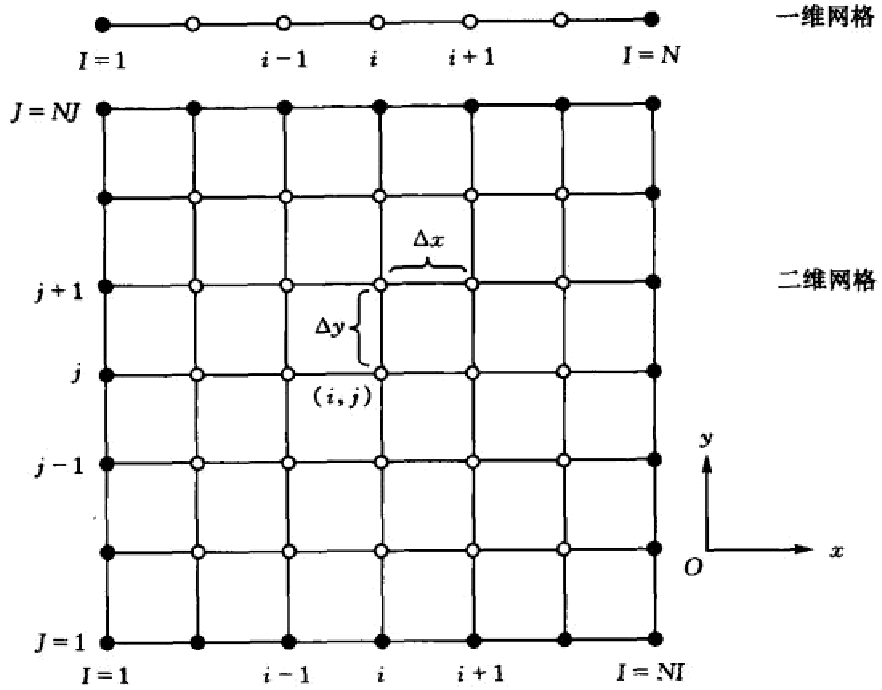


图 4.2　有限差分法中等距一维及二维直角网格描述

（实心点表示边界节点，空心点表示计算节点）

偏微分方程的解析解是封闭形式的表达式，它提供了流场中流动变量的连续变化值．而数值解只能提供几何区域内的离散值，比如图 4.2 网格系统中网格节点(空心点)上的值．为了便于说明有限差分法，假定 x 轴上网格间距相等，用 Δx 表示，y 轴上网格间距也相等，用 Δy 表示．Δx 或 Δy 的间隔也可以不等．我们可以容易地处理两轴方向上完全不等距的网格问题．这种单一间距不必与物理 x-y 空间相对应．CFD 通常采用这样的处理方法：数值计算可以在转换的空间中进行，而自变量在转换空间中是等间距的，转换空间的等间距与实际空间的不等间距相对应．在任何情况下，我们均假设有限差分方法中所描述的每一坐标方向上的网格都是等间距的．

描述控制方程偏导数的基础是泰勒级数展开．在第 3 章守恒方程中，我们已经使用了泰勒级数展开．在此，我们用合适的代数差商——有限差分法——代替偏导数．例如，根据图 4.2，如果在点(i, j)存在流动变量 ϕ，那么变量在点$(i+1, j)$的值可以用点(i, j)

的泰勒级数展开来表示：

$$\phi_{i+1,j}=\phi_{i,j}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i,j}\Delta x+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_{i,j}\frac{\Delta x^2}{2}+\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_{i,j}\frac{\Delta x^3}{6}+\cdots. \tag{4.1}$$

相似地，变量在点$(i-1,\ j)$的值也可以用点$(i,\ j)$的泰勒级数展开来表示：

$$\phi_{i-1,j}=\phi_{i,j}-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i,j}\Delta x+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_{i,j}\frac{\Delta x^2}{2}-\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_{i,j}\frac{\Delta x^3}{6}+\cdots. \tag{4.2}$$

如果泰勒级数展开式的项数无限大，并且当 $\Delta x\to 0$ 时级数收敛，则方程(4.1)和(4.2)就是变量 $\phi_{i+1,j}$和$\phi_{i-1,j}$的精确数学表达式．将上述两式相减，就得到 ϕ 的一阶偏导数的近似表达式：

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j}+(\Delta x^3/3)(\partial^3\phi/\partial x^3)}{2\Delta x}$$

或

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j}}{2\Delta x}+\underbrace{o(\Delta x^2)}_{\text{截断误差}}\qquad(\text{中心差分}). \tag{4.3}$$

式中，$o(\Delta x^n)$表示有限差分近似的截断误差，用来衡量近似的准确度，以及确定当节点间距减少时误差的减少速率．

因为方程(4.3)的截断误差为二阶，因此为二阶精度．这是主要的简化方法，其近似精度取决于 Δx 的取值大小．Δx 越小，近似精度越高．因为该方程与节点 x 相邻两侧的节点值有关，故称为中心差分．当然，也可以调用方程(4.1)和(4.2)，得到一阶导数的其他差分形式，即

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j}}{\Delta x}+\underbrace{o(\Delta x)}_{\text{截断误差}}\qquad(\text{向前差分}) \tag{4.4}$$

及

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\phi_{i,j}-\phi_{i-1,j}}{\Delta x}+\underbrace{o(\Delta x)}_{\text{截断误差}}\qquad(\text{向后差分}). \tag{4.5}$$

上述两个方程分别称为向前差分和向后差分．它们代表各自的偏差，并且这两种差分形式均为一阶近似精度．一般来说，对于给定的 Δx 值，向前和向后差分的精度要低于中心差分的精度．

让我们直接从导数的定义进一步探讨有限差分近似的意义．图 4.3 给出了方程(4.3)、(4.4)及(4.5)的几何解释．在节点 i 处，x 方向上的一阶偏导数$\partial\phi/\partial x$ 就是曲线$\phi(x)$上该点的切线，即图中标出的“精确解”线．节点 i 处的切线可以用通过曲线上临近点$i+1$与 $i-1$ 的连线近似．向前差分可以通过节点 i 与$i+1$ 的连线 BC 来确定，而向后差分则可以通过节点 $i-1$ 与 i 的连线AB 来确定．线 AC 则表示中间差分得到的近似．从图 4.3 中可知，某些近似方法优于其他近似方法．由线 AC 表示的中心差分更接近于精确线；如果函数 $\phi(x)$是一个二阶多项式且节点在 x 方向是等距离划分的，那么近似斜线与精确线

完全一致. 从图 4.3 可知, 在节点 i 附近增加一些节点时, 近似精度得到改进, 也就是说, 网格细化可以提高近似精度.

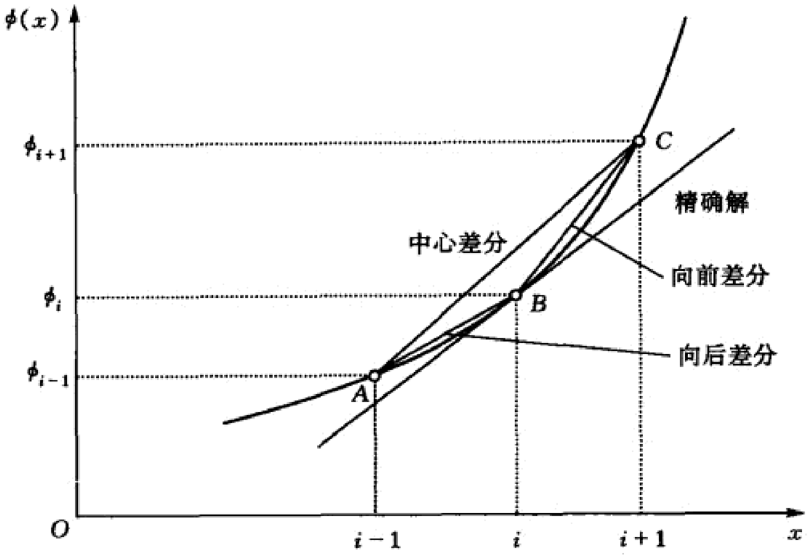


图 4.3 用有限差分表示一阶导数$\partial\phi/\partial x$

y 方向偏导数的差分可以按照完全同样的方法获得. 差分方程与上述 x 的偏导数类似, 即

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j}}{\Delta y}+\underbrace{o(\Delta y)}_{\text{截断误差}} \qquad (\text{向前差分}), \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}}{\Delta y}+\underbrace{o(\Delta y)}_{\text{截断误差}} \qquad (\text{向后差分}), \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1}}{2\Delta y}+\underbrace{o(\Delta y^2)}_{\text{截断误差}} \qquad (\text{中心差分}). \tag{4.8}$$

同一阶导数一样, 二阶导数也可以通过泰勒级数展开获得. 将方程(4.1)和(4.2)求和后可得

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\phi_{i+1,j}-2\phi_{i,j}+\phi_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\underbrace{o(\Delta x^2)}_{\text{截断误差}}. \tag{4.9}$$

方程(4.9)即为关于 x 的二阶导数在节点(i, j)处的中心差分表达式, 为二阶精度. 类似地, 关于 y 的二阶导数的中心差分表达式为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{\phi_{i,j+1}-2\phi_{i,j}+\phi_{i,j-1}}{\Delta y^2}+\underbrace{o(\Delta y^2)}_{\text{截断误差}}. \tag{4.10}$$

与泰勒级数在空间上的展开方程(4.1)相似, 泰勒级数在时间上的展开方程也可以用类似的方法得到. 由于数值解很可能与离散时间间隔 Δt 同步变化, 因此对空间的一阶导数进行的有限差分同样适用于对时间的一阶导数. 对时间的向前差分近似方程为

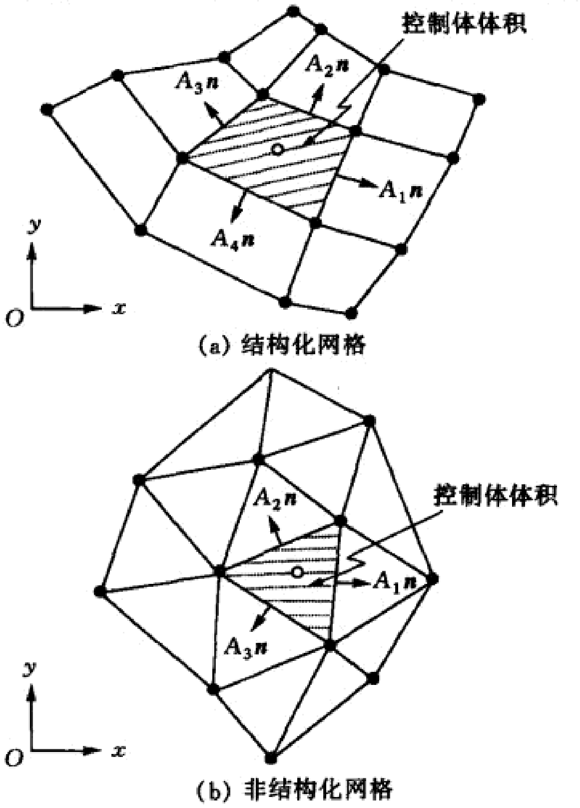
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \underbrace{o(\Delta t)}_{\text{截断误差}} \quad (\text{向前差分}). \tag{4.11}$$

上述方程引入了时间的一阶截断误差 $o(\Delta t)$. 对时间导数更精确的近似可通过考虑时间项中 $\phi_{i,j}$ 的其他离散值来获得.

4.2.2 有限体积法

有限体积法可以直接对物理空间内守恒方程的积分形式进行离散. 该方法最初是由 McDonald(1971)、MacCormack 与 Paullay(1972)提出的，用来求解二维时域欧拉方程，后来由 Rizzi 和 Inouye(1973)拓展到三维流动问题的求解. 计算区域被划分成一系列的有限数目的相邻控制体单元，每个控制体单元内相关物理量用守恒方程精确地描述，并计算控制体质心上各变量的值. 然后根据质心值，利用插值方法来得出控制体表面上各变量的值. 选定合适的求积公式来近似面积分和体积分，这样，每个控制体体积就可以得到包含邻近节点组成的代数方程.

有限体积法是针对控制体而非网格节点而言的，所以可以适应任何类型的网格. 用非结构化网格代替结构化网格，可以定义各种控制体的形状和位置. 因为网格只对控制体的边界进行定义，所以只要面积分与控制体采用相同的边界，这种方法就是守恒的. 与有限差分法相比，有限体积法的缺点之一是难于建立二阶以上的三维高阶差分近似. 这是因为需要进行插值和积分两级近似. 尽管如此，有限体积法具有更多的优点. 该方法的一个重要特性是能够应用"有限元"(finite element)网格形式. 对于二维问题，"有限元"类型可以采用三角形或四边形的网格组合；对于三维问题，则可以采用四面体和六面体网格. 这种非结构化网格更适合于处理复杂几何形状的问题. 与有限差分法不同，有限体积法的另一个重要特点是不需要在适体坐标系下对方程进行变换.



(b) 非结构化网格

图 4.4 有限体积法中结构化网格和非结构化网格的表示

(实心点表示网格顶点，控制体中心的空心点表示数值计算的节点)

与有限差分法一样，有限体积法最初也必须定义一个数值网络来离散所要研究的流动区域. 我们现在通过结构化或非结构化网格来描述有限体积法中的网格使用. 以如图 4.4 所示的典型二维结构化网格(四边形)和非结构化网格(三边形)为例，说明有限体积法对偏微分方

程的离散．有限体积法的基础是控制体的积分．在一个控制体内，每一个单元的边界表面积与通用流动变量 ϕ 的一阶与二阶导数的离散直接相关．如图 4.4 所示，控制体体积表面法向方向(n)的表面积在直角坐标系 x 和 y 方向上的映射分别为 A_i^x 和 A_i^y．如果控制体表面的外法向矢量与直角坐标方向一致，则映射面积为正，反之为负．

对体积分应用高斯散度定理，对于二维问题，方程(3.13)中沿 x 方向 ϕ 的一阶导数可近似为

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{1}{\Delta V}\int_V \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}V=\frac{1}{\Delta V}\int_A \phi \mathrm{d}A^x \approx \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\phi_i A_i^x . \tag{4.12}$$

式中，ϕ_i 为单元表面上的变量值；N 为单元体积的边界表面数量．

方程(4.12)适用于任何类型的能够用数值网格来描述的有限体积单元．对于如图 4.4 所示的二维结构化四边形单元网格，单元有 4 个边界面，因此 N 为 4．对于三维六面体单元，N 为 6．同样，ϕ 在 y 方向的一阶导数可用同样的形式进行表达：

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{1}{\Delta V}\int_V \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}V=\frac{1}{\Delta V}\int_A \phi \mathrm{d}A^y \approx \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\phi_i A_i^y . \tag{4.13}$$

例 4.1 考虑第 3 章所描述的质量守恒方程．在结构化网格中，使用有限体积法确定二维连续性方程 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ 的离散形式．

求解： 二维结构化网格单元控制体如图 4.5 所示．控制体质心用点 P 表示，控制体被相邻的其他控制体包围．相邻控制体的质心分别表示为 E(东侧)、W(西侧)、N(北侧)、S(南侧)．P 点与 E 点之间的控制体表面为 A_e^x，其他控制体表面分别表示为 A_w^x，A_n^y 和 A_s^y．

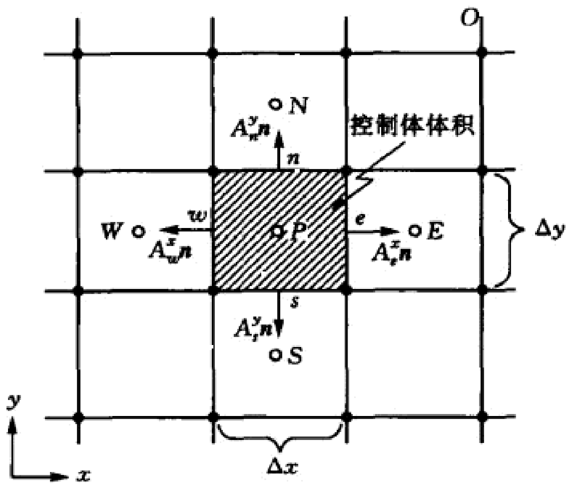


图 4.5 关于二维连续性方程的控制体体积

我们从引入控制体积分开始分析，而控制体积分是有限体积法的关键步骤．应用方程(4.12)和(4.13)可得如下的适用于结构化和非结构化网格的表达式：

$$\frac{1}{\Delta V}\int_V \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}V=\frac{1}{\Delta V}\int_A u\mathrm{d}A^x \approx \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{4}u_i A_i^x=\frac{1}{\Delta V}(u_e A_e^x-u_w A_w^x+\underbrace{u_n A_n^x}_{=0}-\underbrace{u_s A_s^x}_{=0}),$$

$$\frac{1}{\Delta V}\int_V \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}V=\frac{1}{\Delta V}\int_A v\mathrm{d}A^y \approx \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{4}v_i A_i^y=\frac{1}{\Delta V}(\underbrace{v_e A_e^y}_{=0}-\underbrace{v_w A_w^y}_{=0}+v_n A_n^y-v_s A_s^y).$$

对于结构化均匀网格，沿 x 方向的投影面积 A_n^x 和 A_s^x 为 0；同理，沿 y 方向的投影面

积 A_e^y 和 A_w^y 也为 0. 有限体积法可以证实一个重要问题：不需要将连续性方程从物理域变换到一个计算域中，可以在物理域(或在适体网格中)内直接进行离散.

由于采用均匀网格，那么表面速度 u_e，u_w，v_n 及 v_s 位于相邻控制体质心间距的二分之一处，因此，我们就可以从控制体质心速度值得到表面速度，即

$$u_e = \frac{u_P + u_E}{2}, \quad u_w = \frac{u_P + u_W}{2}, \quad v_n = \frac{v_P + v_N}{2}, \quad v_s = \frac{v_P + v_S}{2}.$$

将上述表达式代入速度一阶导数的离散式中，连续性方程的最终离散形式可以表示为

$$\left(\frac{u_P + u_E}{2}\right)A_e^x - \left(\frac{u_P + u_W}{2}\right)A_w^x + \left(\frac{v_P + v_N}{2}\right)A_n^y - \left(\frac{v_P + v_S}{2}\right)A_s^y = 0.$$

从图 4.5 中可知，$A_e^x = A_w^x = \Delta y$ 和 $A_n^y = A_s^y = \Delta x$，那么上述等式可以重写为

$$\left(\frac{u_P + u_E}{2}\right)\Delta y - \left(\frac{u_P + u_W}{2}\right)\Delta y + \left(\frac{v_P + v_N}{2}\right)\Delta x - \left(\frac{v_P + v_S}{2}\right)\Delta x = 0.$$

化简得

$$\left(\frac{u_E - u_W}{2}\right)\Delta y + \left(\frac{v_N - v_S}{2}\right)\Delta x = 0.$$

也可表示为另一种形式：

$$\frac{u_E - u_W}{2\Delta x} + \frac{v_N - v_S}{2\Delta y} = 0.$$

对于规格网格排列而言，点 P，E，W 之间的距离都等于 Δx；类似地，点 P，N，S 之间的距离均为 Δy. 如果采用有限差分法中的中心插分格式对连续性方程进行离散的话，我们在点 P 处可以得到同样的方程离散形式. 从有限差分法中心差分格式中我们可以推断有限体积法获得的近似精度为二阶精度.

讨论：我们采用本例的目的是为了说明如何使用有限体积法离散二维连续性方程，并与有限差分法的近似形式进行对比. 我们观察到，对于均匀网格分布，连续性方程离散形式的确切表达形式既可以运用有限差分法也可以运用有限体积法得到. 尽管如此，有限体积法还是有两个最主要的长处优于有限差分法：第一，从物理学的观点来看，具有良好的守恒特性；第二，它可以用简单的方式对复杂物理区域进行离散，不需要将方程变换到计算域中的广义坐标系下.

在上面的例子中，通过有限体积法已经将连续性方程中的一阶导数离散化了. 二阶导数的离散形式与一阶导数的离散没有什么不同. 例如，方程(3.24)和(3.25)中的扩散项沿 x 方向的二阶导数可写为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \mathrm{d}V = \frac{1}{\Delta V}\int_A \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathrm{d}A^x \approx \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i A_i^x. \tag{4.14}$$

y 方向上的二阶导数的类似表达式也容易得到：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \mathrm{d}V = \frac{1}{\Delta V}\int_A \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathrm{d}A^y \approx \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_i A_i^y. \tag{4.15}$$

从方程(4.14)和(4.15)中可见，为了获得近似的二阶导数，需要分别求解控制体表面上的一阶导数$(\partial\phi/\partial x)_i$和$(\partial\phi/\partial y)_i$.

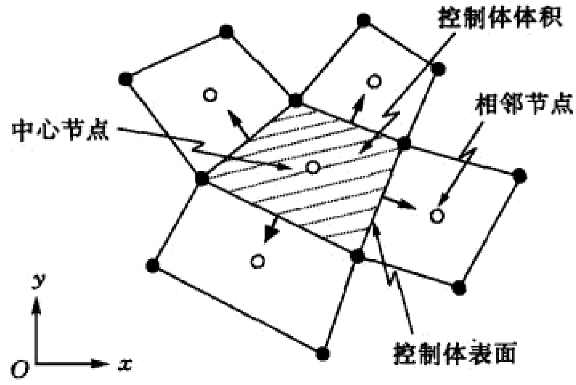


图 4.6　用于求解表面一阶导数的结构化网格分布图
（控制体中心的空心点表示计算节点）

控制体表面一阶导数的近似值通常由相邻单元离散的ϕ值决定. 举例来说，如图 4.6 所示的结构化网格中，中心控制体(阴影部分)被相邻的控制体包围，而它们之间仅有一个面相连，一阶导数可以用中心点与临近节点之间的分段线性梯度来近似. 如果需要，可以采用更高阶的二次方程进行数值求解以获得更高的计算精确度，但这样网格中就需要更多的相邻单元体.

4.2.3　控制方程向代数方程的转化

前面已经对有限差分法和有限体积法进行了基本推导，接下来的任务就是考虑应用各种适当的离散技术数值求解偏微分控制方程. 数值计算方法考虑三种传递过程：①稳态扩散；②稳态对流-扩散；③非稳态对流-扩散. 为了说明如何采用离散技术获得控制方程的代数形式，我们对一维方程进行讨论，使问题得到进一步简化. 以后我们会发现一维方程的离散形式能够很容易地推广并适应于二维和三维扩散问题.

4.2.3.1　单纯扩散过程

我们考虑通用变量ϕ的一维稳态扩散流动，其控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+S_\phi=0. \tag{4.16}$$

式中，Γ为扩散系数；S_ϕ为源项. 该方程为典型的一维热传导过程，将在以后的例子中作进一步详细分析. 对于这个问题，我们应用有限差分法和有限体积法进行离散.

(1) 有限差分法

数值求解的第一步需要将几何区域划分成离散节点. 如图 4.7 所示的一维问题，任意节点P以及与之临近的左右节点W和E，三点间为均匀网格间距.

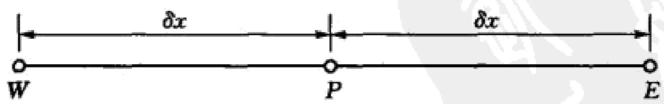


图 4.7　x 方向一维均匀网格示意图

离散过程的下一步是在节点P周围离散方程(4.16). 为得到合适的有限差分形式，

方程(4.16)需要被展开成非守恒形式，从而得到

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}+\Gamma\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+S_\phi=0. \tag{4.17}$$

通过对方程(4.8)中的一阶导数和方程(4.9)中的二阶导数进行中心插分，方程(4.17)的离散形式如下：

$$\frac{\Gamma_E-\Gamma_W}{2\delta x}\frac{\phi_E-\phi_W}{2\delta x}+\Gamma_P\frac{\phi_E-2\phi_P+\phi_W}{\delta x^2}+S_\phi=0. \tag{4.18}$$

经过整理，方程(4.18)也可以表示为

$$\frac{2\Gamma_P}{\delta x^2}\phi_P=\left(\frac{\Gamma_E-\Gamma_W}{4\delta x^2}+\frac{\Gamma_P}{\delta x^2}\right)\phi_E+\left(-\frac{\Gamma_E-\Gamma_W}{4\delta x^2}+\frac{\Gamma_P}{\delta x^2}\right)\phi_W+S_\phi. \tag{4.19}$$

在方程(4.19)中，参数 ϕ_E，ϕ_W，ϕ_P 前引入系数a_E，a_W，a_P，上式可简写为

$$a_P\phi_P=a_E\phi_E+a_W\phi_W+b. \tag{4.20}$$

式中：

$$a_E=\frac{\Gamma_E-\Gamma_W}{4\delta x^2}+\frac{\Gamma_P}{\delta x^2},\qquad a_W=-\frac{\Gamma_E-\Gamma_W}{4\delta x^2}+\frac{\Gamma_P}{\delta x^2},\qquad a_P=\frac{\Gamma_P}{\delta x^2},\qquad b=S_\phi.$$

(2) 有限体积法

采用有限体积法时，在节点 W，P 和 E 附近把物理空间分成有限控制体. 图 4.8 显示了节点 P 附近的控制体. 节点 W 和P，P 和E 之间的距离分别用符号 δ_{xE}和 δ_{xW}表示. 对于一维问题，节点 P 附近控制体的宽度是 Δx，而 Δy 和 Δz 为单位长度.

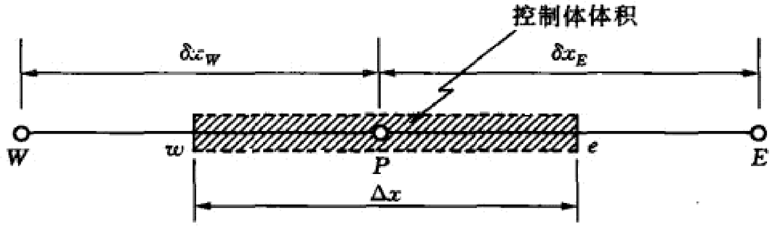


图 4.8 一维情况下 P 点附近有限体积法控制体

为了应用有限体积法进行离散，方程(4.16)中的梯度项可以用方程(4.12)近似，有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)=\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\mathrm{d}V=\frac{1}{\Delta V}\int_A\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\mathrm{d}A^x\approx\frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{2}\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i A_i^x. \tag{4.21}$$

式中，一维情况下，面积 A_i^x 为：$A_1^x=-A_W$，$A_2^x=A_E$. 因此，式(4.21)可写成

$$\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e A_E-\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w A_W. \tag{4.22}$$

方程中的源项可近似为

$$\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} S_\phi \mathrm{d}V = S_\phi. \tag{4.23}$$

式中，假设 S_ϕ 在有限控制体体积 ΔV 内为常数．离散方程的最后形式变为

$$\frac{1}{\Delta V}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e A_E - \frac{1}{\Delta V}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w A_W + S_\phi = 0. \tag{4.24}$$

为了用节点 W，E 和 P 表示方程(4.24)的代数形式，需要对控制体两侧面（w 和 e）的梯度 $\partial\phi/\partial x$ 进行近似．为满足 w 和 e 处一阶导数的近似，假设节点 W 和 P 之间、P 和 E 之间为分段线性梯度分布，则扩散通量为

$$\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e A_E = \Gamma_e A_E\left(\frac{\phi_E-\phi_P}{\delta x_E}\right), \tag{4.25}$$

$$\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w A_W = \Gamma_w A_W\left(\frac{\phi_P-\phi_W}{\delta x_W}\right). \tag{4.26}$$

将方程(4.25)和(4.26)代入方程(4.24)，得

$$\frac{\Gamma_e A_E}{\Delta V}\left(\frac{\phi_E-\phi_P}{\delta x_E}\right) - \frac{\Gamma_w A_W}{\Delta V}\left(\frac{\phi_P-\phi_W}{\delta x_W}\right) + S_\phi = 0. \tag{4.27}$$

方程(4.27)反映了有限体积法一个非常重要的特征．该离散方程具有清晰的物理解释．它表明控制体两侧扩散通量 ϕ 之差等于 ϕ 的产生，因此，ϕ 在控制体上构成了一个平衡方程．方程(4.27)改写成

$$\frac{1}{\Delta V}\left(\frac{\Gamma_e A_E}{\delta x_E}+\frac{\Gamma_w A_W}{\delta x_W}\right)\phi_P = \frac{1}{\Delta V}\left(\frac{\Gamma_e A_E}{\delta x_E}\right)\phi_E + \frac{1}{\Delta V}\left(\frac{\Gamma_w A_W}{\delta x_W}\right)\phi_W + S_\phi. \tag{4.28}$$

同样，在方程中参数 ϕ_E，ϕ_W，ϕ_P 前引入系数 a_E，a_W，a_P，则代数形式为

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + b. \tag{4.29}$$

式中：

$$a_E = \frac{\Gamma_e A_E}{\Delta V\delta x_E}, \quad a_W = \frac{\Gamma_w A_W}{\Delta V\delta x_W}, \quad a_P = a_E + a_W, \quad b = S_\phi.$$

方程(4.29)为有限体积法得到的方程(4.16)的离散形式．这里考虑的是一维问题，由于 Δy 和 Δz 为单位长度，有限控制体 ΔV 就是宽度 Δx 的值，所以表面积 A_E 和 A_W 相等．

(3) 有限差分法和有限体积法离散的比较

对于一维稳态扩散过程，尽管有限差分法和有限体积法具有相同的代数形式，但方程(4.20)和方程(4.29)中的系数 a_E，a_W，a_P 有不同的表达式．考虑一种特殊情况：扩散系数不随空间变化并且网格均匀分布，则有限差分法方程(4.20)中的系数可简化为

$$a_E = \frac{\Gamma}{\delta x^2}, \quad a_W = \frac{\Gamma}{\delta x^2}, \quad a_P = a_E + a_W, \quad b = S_\phi.$$

同样，有限体积法方程(4.29)中的系数变为

$$a_E = \frac{\Gamma}{\delta x^2}, \quad a_W = \frac{\Gamma}{\delta x^2}, \quad a_P = a_E + a_W, \quad b = S_\phi.$$

因为网格分布均匀，Δy，Δz 为单位长度，所以控制体 $\Delta x = \delta x$. 上面例子中连续方程的离散，不管采用有限差分法还是有限体积法，得到的代数方程完全相同.

注意，为了对控制方程中的一阶和二阶导数进行近似，有限差分法通常要求网格分布均匀. 对于非均匀网格分布，在运用有限差分近似之前需要对常规坐标系下计算域内的方程(4.17)进行某些数学处理(函数变换). 然而，对于有限体积法就没有这种要求. 由于该方法在各种不同控制体尺寸条件下都能使用，因此可以采用任何非均匀网格.

与源于泰勒级数的有限差分法相比，有限体积法能保证其离散过程的守恒特性并保持其物理意义不变. 几乎所有的 CFD 商业软件都采用有限体积法对 Navier-Stokes 方程进行离散，以获得复杂流体问题的数值解，其原因在于网格划分不局限于结构化网格单元，可以包括不同形状和大小的非结构化网格单元.

例 4.2 考虑均匀发热无限大平板的稳定导热问题. 图 4.9 中，A，B 两面保持恒温，控制方程具有方程(4.15)的一般形式，控制热传导问题的扩散系数 Γ 为材料的传热系数 k. 对于给定厚度 $L = 2\text{cm}$，传热系数 $k = 5\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$，确定平板内的稳态温度分布. T_A 和 T_B 分别为 100℃ 和 400℃，发热量 Q 为 $500\text{kW}/\text{m}^3$.

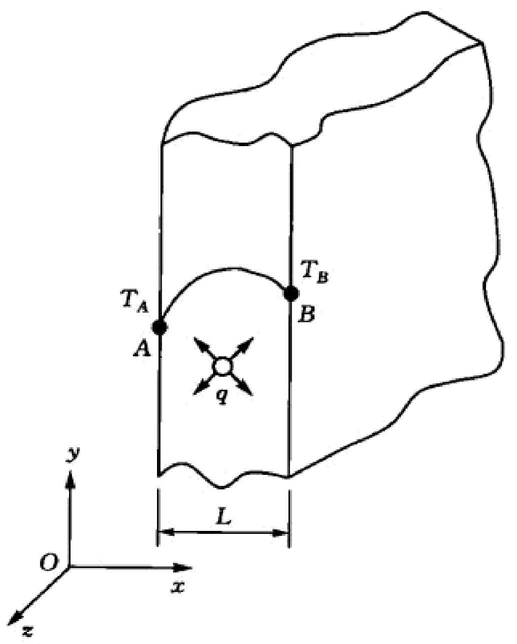


图 4.9 具有内热源的大平板示意图

求解： 假定在 y 方向和 z 方向尺寸无限大，温度梯度只在 x 方向上有意义，因此可以把问题简化为一维问题，运用有限体积法对简单的热传导问题进行求解.

把整个区域划分为 4 个控制体(见图 4.10)，给定 $\delta x = 0.005\text{m}$. 共有 4 个节点，每个节点在各自控制体的中心，为便于说明，考虑 y-z 平面上的单位面积.

由于传热系数是常数，定义 $k = k_e = k_w$，体积源项 $S_\phi = q$，由方程(4.29)，P 点(节点 2)处的一般离散形式为

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b.$$

其中，各系数为

$$a_E = \frac{kA}{\delta x^2}, \quad a_W = \frac{kA}{\delta x^2}, \quad a_P = a_E + a_W, \quad b = q.$$

节点 3 处控制体的代数方程也是一样的.

对于节点 1 和 4 的控制体，在边界点及邻近节点(如图 4.11)之间的温度，我们采用

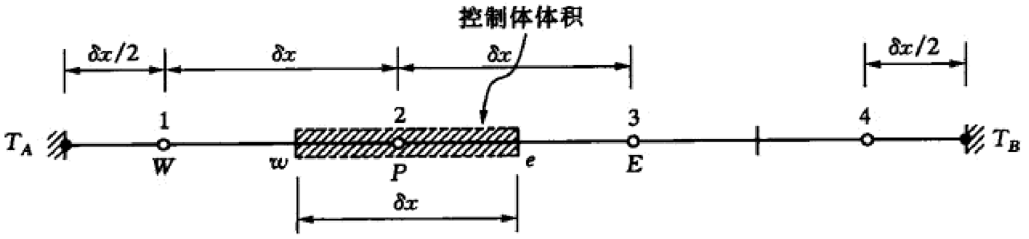


图 4.10 大平板区域的有限体积离散

线性近似．在固定端控制体体积左侧表面，温度已知为T_A．我们从方程(4.24)入手进行分析．

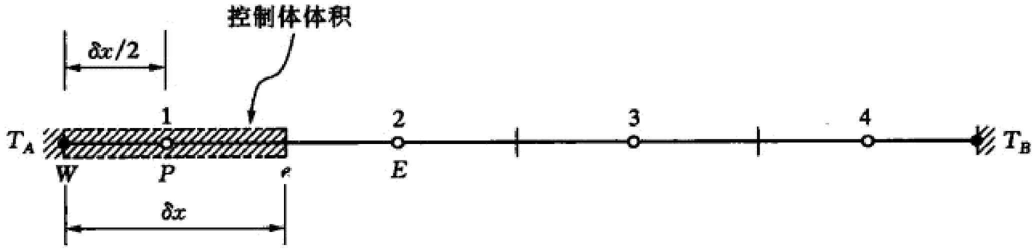


图 4.11 显示大平板区域第一个控制体体积的有限体积离散图

对于恒定的传热系数和热流量，方程变为

$$k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w + q\delta x = 0.$$

在控制体 1 的右侧和左侧，引入线性梯度近似：

$$kA\cdot\frac{T_E - T_P}{\delta x} - kA\cdot\frac{T_P - T_A}{\delta x/2} + q\delta x = 0.$$

对于节点 1，可以将上述方程进行重新整理，得到离散方程：

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b.$$

其中，各系数为

$$a_E = \frac{kA}{\delta x},\ a_W = 0,\quad a_P = a_E + a_W + \frac{2kA}{\delta x},\quad b = q\delta x + \frac{2kA}{\delta x}T_A.$$

由于在末端，因此 $a_W = 0$．节点 4 处，控制体体积的右侧温度为已知．用相似的处理方法，可得

$$k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w + q\delta x = 0,$$

以及

$$kA\cdot\frac{T_B - T_P}{\delta x/2} - kA\cdot\frac{T_P - T_W}{\delta x} + q\delta x = 0.$$

节点 4 的离散方程为

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b.$$

式中：

$$a_E = 0, \quad a_W = \frac{kA}{\delta x}, \quad a_P = a_E + a_W + \frac{2kA}{\delta x}, \quad b = q\delta x + \frac{2kA}{\delta x} T_B.$$

将传热系数 $k = 5\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$，热流量 $q = 500\text{kW}/\text{m}^3$，$\delta x = 0.005\text{m}$ 以及单位面积 $A = 1\text{m}^2$ 等系数代入离散方程，各系数见表 4.1.

表 4.1　　控制体每一节点的系数值

节点	a_E	a_W	a_P	b
1	1000	0	3000	$2500 + 2000T_A$
2	1000	1000	2000	2500
3	1000	1000	2000	2500
4	0	1000	3000	$2500 + 2000T_B$

代数方程组为

$$\begin{cases} 3000T_1 = 1000T_2 + 2000T_A + 2500, \\ 2000T_2 = 1000T_1 + 1000T_3 + 2500, \\ 2000T_3 = 1000T_2 + 1000T_4 + 2500, \\ 3000T_4 = 1000T_3 + 2000T_B + 2500. \end{cases}$$

方程组可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 3000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 2000 & -1000 & 0 \\ 0 & -1000 & 2000 & -1000 \\ 0 & 0 & -1000 & 3000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000T_A + 2500 \\ 2500 \\ 2500 \\ 2000T_B + 2500 \end{bmatrix}.$$

对于给定条件，求解上述方程组可以获得稳定的温度分布.

讨论：对于一维稳定传热过程，我们获得矩阵形式的代数方程组．因为问题只包括少量的节点，因此，矩阵可以由软件，如 MATLAB 等直接求出．矩阵可以采用高斯消元法等进行求解．在下节中，将对矩阵求解方法进行讨论.

然而，在绝大多数 CFD 问题中，方程组的复杂程度和大小依赖于问题的维数以及节点的数量，因此，方程组可能由十万甚至上百万个方程组成．这样的问题对现有的计算机计算能力提出了很高的要求，且要获得离散方程组的解，高斯消元法可能不是最有效的方法．我们将在 4.3 节中对现有的其他高效求解代数方程组的求解方法进行进一步的探讨.

4.2.3.2 稳态对流-扩散过程

如果没有源项，对于一维稳态对流和扩散过程，方程(3.57)可简化为

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right). \tag{4.30}$$

一维对流-扩散过程的质量守恒由下式确定：

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0. \tag{4.31}$$

基于图 4.8 描述的单元体积上，应用有限体积方法，方程(4.30)的代数形式可由下式表示：

$$(\rho u\phi)_e A_E-(\rho u\phi)_w A_W=\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e A_E-\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w A_W. \tag{4.32}$$

假设节点 W 与 P 以及 P 与 E 之间采用分段线性梯度近似，扩散量在 w 和 e 处的一阶导数同样可以用方程(4.25)和(4.26)近似，因此有

$$(\rho u\phi)_e A_E-(\rho u\phi)_w A_W=\Gamma_e A_E\cdot\frac{\phi_E-\phi_P}{\delta x_E}-\Gamma_w A_W\cdot\frac{\phi_P-\phi_W}{\delta x_W}. \tag{4.33}$$

一般来说，可以采用相似的方式近似对流项．应用泰勒级数展开，单元表面 w 和 e 上的 ϕ_w 和 ϕ_e 值可以通过相邻节点之间的线性插值获得：

$$\phi_w=\frac{1}{2}(\phi_W+\phi_P), \tag{4.34}$$

$$\phi_e=\frac{1}{2}(\phi_P+\phi_E). \tag{4.35}$$

上述近似为二阶精度，并且与流动方向一致．应用这些关系式，方程(4.32)变为

$$(\rho u)_e A_E\ \frac{1}{2}(\phi_W+\phi_P)-(\rho u)_w A_W\ \frac{1}{2}(\phi_P+\phi_E)=\Gamma_e A_E\cdot\frac{\phi_E-\phi_P}{\delta x_E}-\Gamma_w A_W\cdot\frac{\phi_P-\phi_W}{\delta x_W}. \tag{4.36}$$

在强对流流动中，中心差分的一个主要问题是不能判断流动的方向．一般认为上述处理方法通常会偏离求解目标，最终导致数值计算过程的发散．在流动区域内采用非常细小的网格并增加网格的求解量或许可以克服该问题，但是这种方法在实践中通常会使实际流动计算不具有鲁棒性，并且效率低下．

考查从上游点 W(左侧)流动到下游点 E(右侧)的瞬时过程．中心差分近似总是假设邻近节点上各变量对 ϕ 界面值的影响是相同的．这意味着在对 ϕ_w 和 ϕ_e 估值时，下游值 ϕ_P 和 ϕ_E 起到重要作用．而在大多数流动情况下，这些值还不知道，因此需要设计一种数值求解方法来辨别流动的方向，通过对位于网格节点周围变量采用不同的影响权重来近似确定边界值．这就是“迎风”(upwind)概念的基点．参照图 4.8，对一阶迎风格式进行描述．如果界面速度 $u_w>0$，$u_e>0$，根据“迎风”概念，界面值 ϕ_w 和 ϕ_e 用上游相邻点近似：

$$\phi_w=\phi_W, \tag{4.37}$$

$$\phi_e=\phi_P. \tag{4.38}$$

同样地，如果边界速度为 $u_w<0$，$u_e<0$，ϕ_w 和 ϕ_e 的界面值将进行逆向求值：

$$\phi_w=\phi_P, \tag{4.39}$$

$$\phi_e = \phi_E. \tag{4.40}$$

这种方法是稳定的并且满足传递性(流动方向)、约束性(对角占优矩阵系数保证数值求解的收敛)和守恒性(流量是在相容条件下进行描述的)．尽管该方法改进了数值的稳定性，但众所周知，该方法在空间上引起了不必要的扩散．为了减少这种数值误差，在很多CFD问题中广泛采用高阶近似，如二阶迎风或三阶QUICK格式．这些格式的公式形式将在附录B中加以描述．

4.2.3.3 非稳态对流-扩散过程

给定一维流动速度为 u，控制非稳态对流和扩散过程特性 ϕ 的方程由下式给出：

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + S_\phi. \tag{4.41}$$

假设流体为不可压缩流体(即流体密度为常数)，则方程(4.41)可改写为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\phi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{S_\phi}{\rho}. \tag{4.42}$$

质量守恒变为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{4.43}$$

假设对流和扩散项采用中心差分，则有限体积法给出方程(4.41)的代数形式为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\phi}{\partial t} + u_e A_E\frac{1}{2}(\phi_W + \phi_P) - u_w A_W\frac{1}{2}(\phi_P + \phi_E)\\&= \Gamma_e A_E\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_E} - \Gamma_w A_W\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_W} + \frac{S_\phi}{\rho}\Delta V.\end{aligned} \tag{4.44}$$

在大部分情况下，时间导数可以采用如下的一阶向前差分格式进行近似：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = \frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t}. \tag{4.45}$$

式中，Δt 为时间步长；上角标 n，$n+1$ 分别为前一时间层和当前时间层．

从上式可以清楚地看出，随着时间的推进，中心点以及邻近点的 ϕ 值需要随时不断更新．让我们首先考查显式方法(explicit approach)的含义．对于显式方法，方程(4.44)可以写为

$$\begin{aligned}&\frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} + u_e^n A_E\frac{1}{2}(\phi_W^n + \phi_P^{n+1}) - u_w^n A_W\frac{1}{2}(\phi_P^{n+1} + \phi_E^n)\\&= \Gamma_e^n A_E\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\phi_E^n - \phi_P^{n+1}}{\delta x_E} - \Gamma_w^n A_W\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\phi_P^{n+1} - \phi_W^n}{\delta x_W} + \frac{S_\phi^n}{\rho}\Delta V.\end{aligned} \tag{4.46}$$

参照图4.12，从上面方程可以看出求解未知数 ϕ_P^{n+1}(在第 $n+1$ 层时用方框表示)时，ϕ_P^{n+1} 可以直接从前一时间层 n 中 ϕ 循环得到的所有结果直接计算出来．显式方法可定义为，每一微分方程中只有一个未知数，因此未知数可以简便地直接求得．

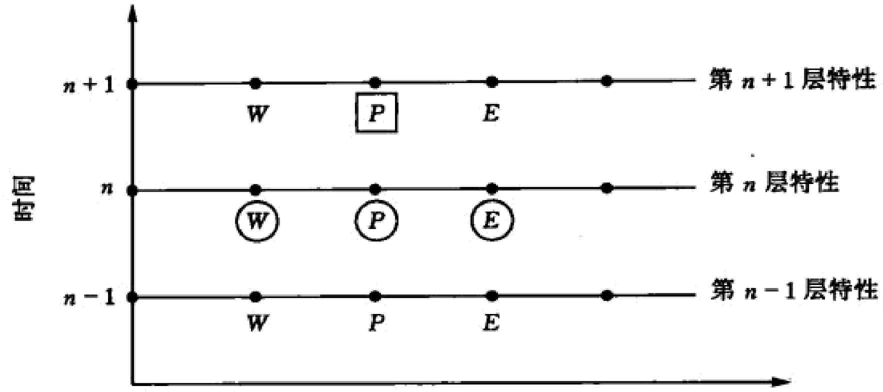


图 4.12 显式方法的例子

另一方面，让我们考查时间 $n+1$ 层处在时间增加过程中需要求解的所有变量．方程(4.44)可以重写成

$$\frac{\phi_P^{n+1}-\phi_P^n}{\Delta t}+u_e^{n+1}A_E\frac{1}{2}(\phi_W^{n+1}+\phi_P^{n+1})-u_w^{n+1}A_W\frac{1}{2}(\phi_P^{n+1}+\phi_E^{n+1})$$
$$=\Gamma_e^{n+1}A_E\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\phi_E^{n+1}-\phi_P^{n+1}}{\delta x_E}-\Gamma_w^{n+1}A_W\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\phi_P^{n+1}-\phi_W^{n+1}}{\delta x_W}+\frac{S_\phi^{n+1}}{\rho}\Delta V. \tag{4.47}$$

如图 4.13 所示，中心点 P 及其周围各点的 ϕ 值需要同时求解，并且还可能与同一差分方程中当前时间层内源项 S_ϕ 中的压力和温度相耦合．这是另一种全隐方法(fully implicit approach)的例子．根据定义，隐式方法要在给定时间层内，同时求解所有网格上的差分方程，获得要求解的未知数．因为需要求解的代数方程组很大，因此隐式方法通常包括大量的矩阵运算．

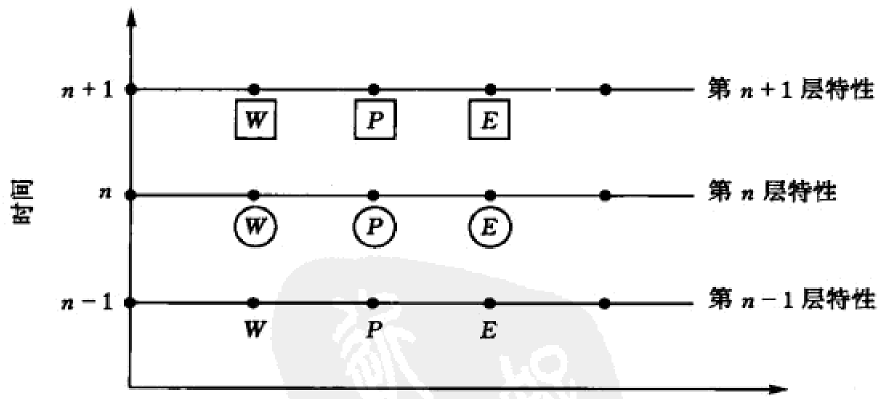


图 4.13 隐式方法的实例

上述显式和隐式方法通常被认为是时间上的一阶精度．与空间上的一阶精度相似，这些方法也可能在时间上引起数值扩散．为了减少这些数值误差，可以采用比如显式 Adams-Bashford 和半隐 Crank-Nicolson 格式等二阶近似．这些格式将在附录 C 中作进一步描述．

4.3 代数方程的数值解法

前面已经叙述了对偏微分方程的各种离散方法．通过这个过程，我们得到了一组线性或非线性代数方程，方程组将通过某种数值方法加以求解．方程组的复杂程度和多少取决于流动问题的维数和几何形状．不论是线性还是非线性方程，都要求求解代数方程的数值方法具有高效性和鲁棒性．求解代数方程组的基本方法有两类：直接方法和迭代方法．

前面我们已经强调了直接方法，例如高斯消元法，能用来求解由矩阵形式表示的简单的一维稳态热传导过程．当然，还有其他直接方法也能被用来求解矩阵，例如求解逆阵的克莱姆法则(Cramer's rule)和托马斯算法(Thomas algorithm)(三对角矩阵算法)．对结构化网格运用有限差分法或有限体积法离散得到的代数方程矩阵为典型的稀疏矩阵，大多数元素为零，并且非零元素靠近对角线．对于一维问题，托马斯算法或三对角矩阵算法特别适于直接求解这种特殊矩阵，其计算时间短，并且内存占用量最小，因此在 CFD 程序中得到广泛应用．在下节中，将对托马斯算法作进一步的介绍．

迭代法是指重复应用一种算法，经过大量循环最后得到收敛解．一般来说，它更加经济，且只有代数方程中的非零元素才占用内存，对稀疏线性方程组的求解特别有价值，但不适用于非线性问题的求解．为了帮助读者对迭代方法的理解，4.3.2 节中将描述常用的点对点(point-by-point)方法，例如雅可比(Jacobi)方法和高斯-赛德尔(Gauss-Siedel)方法，并且对这两种迭代法进行了比较，特别叙述了对 CFD 问题求解的不同之处．

4.3.1 直接方法

求解线性代数方程组最基本的方法之一是高斯消元法．该算法是基于逐步将多元方程组进行消元简化．我们假设方程组可以写成如下形式：

$$\boldsymbol{A\phi}=\boldsymbol{B}. \tag{4.48}$$

式中，$\boldsymbol{\phi}$ 为节点未知变量；矩阵 $\boldsymbol{A}$ 包含代数方程的非零系数，其形式如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4.49}$$

而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 包括变量 $\boldsymbol{\phi}$ 的已知值，如，给定的边界条件或源项或消亡项．

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角元素可以用 A_{11}，A_{22}，…，A_{nn} 来描述．该算法的核心就是要消去对角线下面的元素，使该矩阵变为上三角矩阵．也就是说，用 0 来代替 A_{21}，A_{31}，A_{32}，…，$A_{n,n-1}$．消元过程的第一步从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的第一列元素 A_{21}，A_{31}，…，A_{n1} 开始．第二行减去

第一行的 A_{21}/A_{11}倍，第二行的所有元素以及方程右边矩阵 **B** 的元素随之作出相应的改变. 应用相似的方法对矩阵 **A** 中第一列的其他元素 A_{31}，A_{41}，…，A_{n1}进行处理，使 A_{11}以下的所有元素都变为 0. 对矩阵第二列也作相应的操作(对所有 A_{22}以下的元素)，一直到对第 $n-1$列都进行该操作. 完成该消元操作后，原来的 **A** 矩阵变成一个上三角矩阵：

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4.50}$$

U 矩阵中所有元素除第一行外都与原矩阵 **A** 不同. 因此，用修改后的矩阵代替原矩阵，其单元存储效率更高. 该算法的这一过程称做向前消元过程. 系数矩阵为上三角阵的方程组就能用回代(back substitution)过程来求解. 此时，**U** 矩阵就只包含一个变量 ϕ_n，并且可由下式求得：

$$\phi_n=\frac{B_n}{U_{nn}}. \tag{4.51}$$

式(4.51)中只含有 ϕ_{n-1}和 ϕ_n，如果 ϕ_n 为已知，则可以求出方程中的 ϕ_{n-1}. 按照以上方法，可依次求出每个变量 ϕ_i. ϕ_i 的一般形式可表达为

$$\phi_i=\frac{B_i-\sum_{j=i+1}^{n}A_{ij}\phi_j}{A_{ii}}. \tag{4.52}$$

不难看出，向前消元过程需要较大的计算量，回代过程需要较少的计算步骤，因此计算成本较低. 对于有大量未知变量的全矩阵(full matrix)，高斯消元法计算量大，但与其他现有方法相比仍然具有优势.

从例 4.2 中可以看到，我们应用有限差分法或有限体积法获得的典型矩阵结构形式. 其中，非零元素都靠近主对角线. 这种形式的矩阵能够很容易地用托马斯算法来求解. 利用这种特殊的条状结构矩阵(三对角矩阵)，可使计算资源最大化，减少计算量. 让我们考查如下代数方程组中的三对角形式：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1,i-1} & A_{1i} & A_{1,i+1} & \cdots & A_{1,n-2} & A_{1,n-1} & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2,i-1} & A_{2i} & A_{2,i+1} & \cdots & A_{2,n-2} & A_{2,n-1} & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} & \cdots & A_{i,i-1} & A_{ii} & A_{i,i+1} & \cdots & A_{i,n-2} & A_{i,n-1} & A_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & A_{n-1,3} & \cdots & A_{n-1,i-1} & A_{n-1,i} & A_{n-1,i+1} & \cdots & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{n,i-1} & A_{ni} & A_{n,i+1} & \cdots & A_{n,n-2} & A_{n,n-1} & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \vdots \\ \phi_{n-1} \\ \phi_n \end{bmatrix}$$
$$=[B_1\quad B_2\quad \cdots\quad B_i\quad \cdots\quad B_{n-1}\quad B_n]^{\mathrm{T}}. \tag{4.53}$$

托马斯算法同高斯消去法一样分成消元过程和回代过程两部分解方程．消元过程是将对角线下的每一个元素化为0，就是将 A_{21}，A_{32}，A_{43}，…，$A_{n,n-1}$化为0．第一行，对角元素 A_{11}和其相邻元素 A_{12}及 B_1 根据以下公式修改：

$$A'_{12}=\frac{A_{12}}{A_{11}},\quad B'_1=\frac{B_1}{A_{11}}. \tag{4.54}$$

同高斯消元法一样，矩阵的第二行元素减去第一行元素乘以第二行相应的元素，这样，第二行所有元素包括方程右边 $\boldsymbol{B}$ 向量的相应元素都被修改．对矩阵其余行作相应的操作：

$$A'_{i,i+1}=\frac{A_{i,i+1}}{A_{ii}-A_{i,i-1}-A'_{i-1,i}},\quad B'_i=\frac{B_i-A_{i,i-1}B'_{i-1}}{A_{ii}-A_{i,i-1}A'_{i-1,i}}. \tag{4.55}$$

因此，方程转化为

$$\begin{bmatrix}1 & A'_{12} & & & & & \\ & 1 & A'_{23} & & & & \\ & & \cdots & \cdots & & & \\ & & & 1 & A'_{i,i+1} & & \\ & & & & \cdots & \cdots & \\ & & & & & 1 & A'_{n-1,n} \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_i\\ \vdots\\ \phi_{n-1}\\ \phi_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B'_1\\ B'_2\\ \vdots\\ B'_i\\ \vdots\\ B'_{n-1}\\ B'_n\end{bmatrix}. \tag{4.56}$$

第二步为简单的回代过程，有

$$\phi_n=B'_n \quad 和 \quad \phi_i=B'_i-\phi_{i+1}A'_{i,i+1}. \tag{4.57}$$

可以看出，托马斯算法比高斯消元法更为高效，因为在回代计算求 ϕ_i 时，矩阵中省去了零元素的运算(乘或除运算)．然而，为了防止使用两种直接方法时出现病态(即舍入误差)错误，必须满足：

$$|A_{ii}|>|A_{i,i-1}|+|A_{i,i+1}|. \tag{4.58}$$

这意味着对角系数要比其邻近系数之和大得多．

例 4.3 采用与例 4.2 中大平板稳态传热同样的问题．边界温度 T_A 和 T_B 分别为100℃和400℃，用托马斯算法求解通过大平板的离散节点温度．

求解：本例中，我们将说明托马斯算法求解一维稳态传热问题的算法步骤．已知方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}3000 & -1000 & 0 & 0\\ -1000 & 2000 & -1000 & 0\\ 0 & -1000 & 2000 & -1000\\ 0 & 0 & -1000 & 3000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\\ T_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2000T_A+2500\\ 2500\\ 2500\\ 2000T_B+2500\end{bmatrix}.$$

代人温度 $T_A=100℃$ 和 $T_B=400℃$ 到方程右边，得

$$\begin{bmatrix} 3000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 2000 & -1000 & 0 \\ 0 & -1000 & 2000 & -1000 \\ 0 & 0 & -1000 & 3000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 202500 \\ 2500 \\ 2500 \\ 802500 \end{bmatrix}.$$

在托马斯算法中，第一步消元过程将主对角线下的次对角线上的所有元素变为 0，再运用公式(4.54)和(4.55)，将矩阵化为

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.714 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67.5 \\ 42.0 \\ 31.8 \\ 365.0 \end{bmatrix}.$$

托马斯算法的第二步仅为回代过程，用公式(4.57)，解得上述方程的解为

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140.0 \\ 217.4 \\ 292.4 \\ 365.0 \end{bmatrix}.$$

讨论：我们用托马斯算法代替高斯消元法对这个简单问题进行了求解．高斯消元法额外的计算量表现在对零元素的处理上，对于这个小矩阵，计算量增加并不显著．然而，为了更好地预测通过大平板的温度分布，将增加网格节点数目，这时情况就不一样了．这是因为对矩阵元素的数值计算(乘或除运算)量增加了很多．当矩阵维数更高(＞10)时，该算法会退化，计算效率低下．

4.3.2 迭代方法

直接方法，如高斯消元法，能被用来求解任意的方程．然而，大多数 CFD 问题中通常要求解大量的非线性方程，运用这种方法计算成本通常太高．前节中的计算实例表明，托马斯算法对一维稳态热传递过程的求解是高效的，其原因在于其固有的带状矩阵结构(三对角结构)．然而，这种算法不能随意扩展到多维问题的求解当中．这就要选择迭代方法了．在迭代方法中，先估计一个初值，然后根据方程逐步改进计算结果，直到收敛到某一精度．如果迭代次数较少就能获得收敛解的话，那么迭代求解效率将高于直接方法．对 CFD 问题而言，通常都是这种情况．

4.3.2.1 雅可比(Jacobi)和高斯-赛德尔(Gauss-Siedel)方法

最简单的迭代方法是雅可比方法．让我们再来看看上一节中方程 $\boldsymbol{A\phi}=\boldsymbol{B}$，每个节点未知变量 $\boldsymbol{\phi}$ 的一般形式可写成

$$\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\phi_j + A_{ii}\phi_i + \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}\phi_j = B_i. \tag{4.59}$$

在方程(4.59)中，雅可比方法假定变量 ϕ_j(非对角元素)的第 k 步迭代结果为已知，节点变量 ϕ_i 的第 $k+1$ 步迭代值为未知. 求解 ϕ_i：

$$\phi_i^{(k+1)} = \frac{B_i}{A_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{A_{ij}}{A_{ii}}\phi_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{A_{ij}}{A_{ii}}\phi_j^{(k)}. \tag{4.60}$$

迭代开始时假设节点变量 ϕ_i 的初值($k=0$). 对 n 个未知数，重复使用方程(4.60)，完成第一次迭代($k=1$). 在第二次迭代($k=2$)时，将 $k=1$ 时的迭代结果代入方程(4.59)来获得迭代新值. 迭代过程不断重复直到获得收敛的期望解.

高斯-赛德尔对雅各比方法作了改进，将最新获得的变量 $\phi_j^{(k+1)}$ 值直接代入到方程(4.59)右边. 此时，在方程(4.60)右侧第二项 $\phi_j^{(k)}$ 值被当前值 $\phi_j^{(k)}$ 替代，相当于方程式(4.60)变为

$$\phi_i^{(k+1)} = \frac{B_i}{A_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{A_{ij}}{A_{ii}}\phi_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{A_{ij}}{A_{ii}}\phi_j^{(k)}. \tag{4.61}$$

比较以上两个迭代过程，高斯-赛德尔迭代法比雅可比迭代法快 2 倍. 通过重复使用方程(4.60)和(4.61)，多种途径都可以达到收敛. 当 $\phi_j^{(k+1)} - \phi_j^{(k)}$ 小于某一可接受误差的预定值时，迭代过程终止. 减小可接受误差值，解将更为准确，但应注意这将花费更多的迭代次数.

例 4.4 基于前述例 4.2 大平板稳态均衡热源的热传导问题，应用下述方法确定离散节点上的温度：

(a) 雅可比方法；

(b) 高斯-赛德尔方法.

求解：(a) 为了说明雅可比方法，前述例 4.2 中代数方程组重写如下：

$$\begin{cases} 3000T_1 + 1000T_2 + 0\times T_3 + 0\times T_4 = 2500 + 2000T_A, \\ 1000T_1 + 2000T_2 + 1000T_3 + 0\times T_4 = 2500, \\ 0\times T_1 + 1000T_2 + 2000T_3 + 1000T_4 = 2500, \\ 0\times T_1 + 0\times T_2 + 1000T_3 + 3000T_4 = 2500 + 2000T_B. \end{cases}$$

代入边界温度 $T_A = 100℃$ 和 $T_B = 400℃$，可得

$$\begin{cases} 3000T_1 + 1000T_2 + 0\times T_3 + 0\times T_4 = 202500, \\ 1000T_1 + 2000T_2 + 1000T_3 + 0\times T_4 = 2500, \\ 0\times T_1 + 1000T_2 + 2000T_3 + 1000T_4 = 2500, \\ 0\times T_1 + 0\times T_2 + 1000T_3 + 3000T_4 = 802500. \end{cases}$$

对上述方程重新整理，将求解变量置于方程的左边：

$$\begin{cases} T_1 = 0.333T_2 + 0\times T_3 + 0\times T_4 + 67.5, \\ T_2 = 0.5T_1 + 0.5T_3 + 0\times T_4 + 1.25, \\ T_3 = 0\times T_1 + 0.5T_2 + 0.5T_4 + 1.25, \\ T_4 = 0\times T_1 + 0\times T_2 + 0.333T_3 + 267.5. \end{cases}$$

假设初始值为：$T_1^{(0)} = T_2^{(0)} = T_3^{(0)} = T_4^{(0)} = 100$，则第一次迭代各节点温度为

$$\begin{cases} T_1^{(1)} = 0.333\times 100 + 67.5 = 100.8, \\ T_2^{(1)} = 0.5\times 100 + 0.5\times 100 + 1.25 = 101.25, \\ T_3^{(1)} = 0.5\times 100 + 0.5\times 100 + 1.25 = 101.25, \\ T_4^{(1)} = 0.333\times 100 + 267.5 = 300.8. \end{cases}$$

将上面第一次迭代值 $T_1^{(1)} = 100.8$，$T_2^{(1)} = 101.25$，$T_3^{(1)} = 101.25$，$T_4^{(1)} = 300.8$ 代回方程组中，得到第二次迭代值：

$$\begin{cases} T_1^{(2)} = 0.333\times 101.25 + 67.5 = 101.2, \\ T_2^{(2)} = 0.5\times 100.8 + 0.5\times 101.25 + 1.25 = 102.3, \\ T_3^{(2)} = 0.5\times 101.25 + 0.5\times 300.8 + 1.25 = 202.3, \\ T_4^{(2)} = 0.333\times 101.25 + 267.5 = 301.2. \end{cases}$$

经过反复迭代 10 次和 20 次后，节点的温度变为

$$\begin{bmatrix} T_1^{(10)} \\ T_2^{(10)} \\ T_3^{(10)} \\ T_4^{(10)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 135.2 \\ 207.9 \\ 282.2 \\ 360.5 \end{bmatrix} \quad 及 \quad \begin{bmatrix} T_1^{(20)} \\ T_2^{(20)} \\ T_3^{(20)} \\ T_4^{(20)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 139.7 \\ 217.1 \\ 292.0 \\ 364.7 \end{bmatrix}.$$

在前述例 4.3 中，我们运用托马斯算法直接求出精确解：

$$\begin{bmatrix} T_1^{\text{exact}} \\ T_2^{\text{exact}} \\ T_3^{\text{exact}} \\ T_4^{\text{exact}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140.0 \\ 217.4 \\ 292.4 \\ 365.0 \end{bmatrix}.$$

由此可以得出：经过 20 次迭代后求出的节点温度与精确解非常接近.

(b) 现在我们用高斯-赛德尔迭代法解此线性方程组. 采用与雅可比方法一样的方程组：

$$
\begin{cases}
T_1 = 0.333T_2 + 67.5, \\
T_2 = 0.5T_1 + 0.5T_3 + 1.25, \\
T_3 = 0.5T_2 + 0.5T_4 + 1.25, \\
T_4 = 0.333T_3 + 267.5.
\end{cases}
$$

采用相同的初始假设，直接代入可得第一次迭代值为

直接代入

$$
\begin{cases}
T_1^{(1)} = 0.333 \times 100 + 67.5 = 100.8, \\
T_2^{(1)} = 0.5T_1^{(1)} + 0.5 \times 100 + 1.25 = 0.5 \times 100.8 + 0.5 \times 100 + 1.25 = 101.7, \\
T_3^{(1)} = 0.5T_2^{(1)} + 0.5 \times 100 + 1.25 = 0.5 \times 101.7 + 0.5 \times 100 + 1.25 = 102.1, \\
T_4^{(1)} = 0.5T_3^{(1)} + 267.5 = 0.333 \times 102.1 + 267.5 = 301.5.
\end{cases}
$$

迭代 10 次后，节点温度变为

$$
\begin{bmatrix} T_1^{(10)} \\ T_2^{(10)} \\ T_3^{(10)} \\ T_4^{(10)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 139.4 \\ 216.7 \\ 291.9 \\ 364.7 \end{bmatrix}.
$$

将此值与雅克比法迭代 20 次后的结果进行比较.

讨论：从这个例子可以看出，高斯-赛德尔迭代法的收敛速度是雅克比迭代法的 2 倍. 高斯-赛德尔迭代快速收敛的原因在于方程组右侧的节点温度一旦求得就立即代入方程进行迭代. 到目前为止，我们还没有讨论如何停止特定迭代过程的问题. 你完全可以决定你想要得到的收敛精度，如果将 $|\phi_j^{(k+1)} - \phi_j^{(k)}|$ 作为迭代停止条件，解的精度由你想要的温度目标决定. 误差要求越小，迭代的次数越多，同时精度越高.

有时，可以利用一种被称为连续过松弛(successive overrelaxation)的数值技术来加速收敛. 该方法的基本思想是外推法，即采用刚获得的 $\phi_j^{(k+1)}$ 和前次迭代值 $\phi_j^{(k)}$ 进行加权平均对中间节点变量 $\phi_j^{(k+1)}$ 进行进一步改进. $\phi_j^{(k+1)}$ 的外推值由下式计算：

$$
\overline{\phi}_i^{(k+1)} = (1-\lambda)\phi_i^{(k)} + \lambda\phi_i^{(k+1)}. \tag{4.62}
$$

这些外推值在迭代过程中被连续使用. 上式中，λ 为松弛因素，对于某给定问题，松弛因子需要反复试验才被确定. 一般而言，为了保证方程组收敛，λ 的值为 $0<\lambda<2$. 如果将 $1<\lambda<2$ 的连续过松弛技术引入到高斯-赛德尔法中，就会显著改进节点温度的迭代速度，加快收敛.

到目前为止，我们只讨论了这种方法在一维空间中的运用. 对于多维空间来说，由于网格节点数目增加，要求解的方程数目会显著增加，尽管雅克比和高斯-赛德尔迭代法简单，但一般要迭代许多次才能收敛，因而运算成本相当高. 尽管连续过松弛加速迭代法加速了方程组的迭代过程，但由于很难确定 λ 的取值，因此在 CFD 中难以广泛推广应用.

虽然如此，但是本节的主要目的是向读者介绍一些基本的迭代方法，并且用一些实例来说明其数值运算方法.

4.3.2.2 其他迭代法

采用迭代矩阵降低方程组的维数是一种经常使用在多维问题中的实用方法. 一种常用的方法就是由彼斯门和拉什福德(Peaceman 和 Rachford，1955)提出的 ADI(Alternating Direction Implicit)(交替方向隐式)法. 该方法用来将二维或三维问题化为一维问题. 每个坐标方向上都使用托马斯算法，结果矩阵具有三对角形式，在一个坐标方向上求解节点变量，并在其他方向上重复求解. 另一种求解多维离散方程组的迭代方法是由斯通(Stone)(1968)提出的强隐式法(Strongly Implicit Procedure，SIP)，特别适于结构化网格. 该方法的基本思想包括对方程(4.49)中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的近似，通过一个不完全 LU(Lower-Upper)因子产生迭代矩阵 $\boldsymbol{M}$. 与其他方法不同，强隐式迭代法是一种很好的独具特色的迭代技术，它已经作为某些商业 CFD 软件中非线性方程组的标准求解器. 同时，它也为共轭梯度和多重网格加速提供了很好的技术基本.

4.3.2.3 加速技术

在求解包含压力(或修正压力，这将在下节中讨论)项时(泊松方程)，共轭梯度法和多重网格法通常被用来加速方程组的迭代过程，使之快速收敛. 这些方法促进了 CFD 的应用，而且在商业 CFD 软件中越来越流行，特别适于求解非结构化网格以及大型非线性方程组.

共轭梯度法是一种寻找函数最小值的方法，是典型的最速下降方法(steepest descent methods). 这种基本方法本身收敛速度相当缓慢，因此也不被经常使用，但是在对初始矩阵预处理时，收敛速度得到很大的提高. 通过对对称矩阵应用不完全 Cholesky 因数分解或对非对称矩阵应用双共轭梯度实施这种预处理技术.

多重网格方法有几何法和代数法两种类型. 前者也称为 FAS(Full Approximation Scheme)，包含多层次网格(在精细和粗糙网格之间循环)，在每层网格上求解离散方程组；对于代数多重网格，粗糙网格上方程组的生成不需要任何再离散，该特性特别适于在非结构化网格中使用. 理论上，几何多重网格优于代数多重网格. 由于前者通过重新离散将非线性特性传递到粗网格层，因此更适于求解非线性问题. 对于后者，一旦方程组被线性化，一直到精细网格算子被更新时，求解器才能“知道”其非线性特性. 多重网格方法只是求解方法中的一个策略，有关加速迭代技术的更多细节留给有兴趣的读者.

4.3.3 压力-速度耦合：SIMPLE 算法

第 3 章中得出了不可压缩流体的流动守恒控制方程，并在 3.6 节中进行了总结. 由于不可压缩的假定，结果少了一个关于压力的独立方程，因此求解方程式就变得复杂了. 在每个动量方程组中，压力梯度是流体流动的动力. 由于连续性方程增加了一个方程，方程

组是完备的(self-contained)：4 个方程，4 个未知数 μ，v，w 和 p，但缺少独立的压力传输方程．这意味着，在求解不可压缩流体流动的速度和压力场时，连续性方程和动量方程都要求解．对于这样的流动来说，连续性方程受流体速度场的约束，而不受动力学方程的影响．为了建立不可压缩流动压力与速度之间的联系，一种可能的方法是构造压力场，使连续性方程的守恒性得到满足．

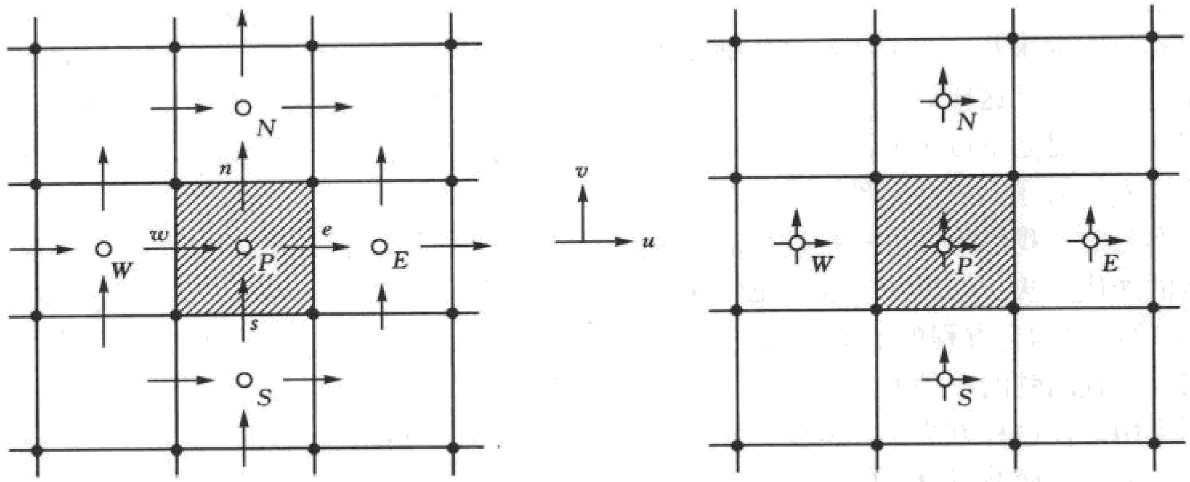
本节中，我们将描述一种最普遍使用的不可压缩流动压力-速度耦合算法．它是一种经典的迭代方法，被称为 SIMPLE(Semi-Implicit Method for Pressure-Linkage Equations)算法(求解压力耦合方程的半隐方法)．该算法是由 Patankar 和 Spalding(1972)提出的用于求解实际工程问题的一种方法．自从 SIMPLE 算法出现以来，已经在多数商业 CFD 软件中得到应用．在这种方法中，从假设压力场求解动量方程；再求解由连续性方程推得的压力修正方程，进而获得修正的压力场；然后更新速度场和压力场．这些假想场通过迭代逐渐改进直至得到收敛的速度场和压力场．SIMPLE 算法的特点和迭代过程将在下面讨论．

4.3.3.1　网格排列

在描述 SIMPLE 算法之前，需要考虑选择网格布置形式．在很多网格布置形式中，已经获得广泛应用和认可的两种网格是交错网格(staggered grid)和同位网格(collocated grid)．

在 CFD 计算中，使用交错网格的目的是为了计算控制体表面上的各速度分量，而控制流场的其他变量，例如压力、温度和湍流量，则储存在控制体单元的中心节点上．图 4.14 描述了结构化有限体积网格的一种典型的布置方式，求解 x 方向上的动量方程离散速度分量 u 值并储存在控制体左、右侧表面 e，w 上．通过应用 y，z 方向上的动量方程求解其他方向上的速度分量，就可以直接求出压力修正方程中的质量流量．这种网格布置实现了速度与压力之间的强烈耦合关系，这样就可以避免压力和速度场中出现的一些不收敛问题和振荡现象．从历史上看，20 世纪 60 年代至 80 年代，交错网格在 CFD 领域中占统治地位．但是，在求解复杂的几何问题时，非正交网格用得越来越普遍，这给交错网格带来了很大困难，因此不得不研究其他的网格布置形式．特别是当交错网格用于广义坐标系下时，需要将弯曲条件引入到控制方程之中，而这通常难以进行数值化处理，并且在网格不光滑时，会出现非保守错误(non-conservative errors)．

当前，在很多商业 CFD 软件中普遍使用的网格形式是同位网格．在这种网格中，包括速度在内的所有参数都储存在相同的一系列节点上．对于如图 4.14 中所示的有限体积网格来说，变量储存在控制体中心点(空心点)上．同位网格在复杂流域中有着显著的优势，特别是能适应存在间断点或有不连续边界条件的情况．而且，如果使用多重网格，同位网格也便于全部变量的信息在不同网格层之间传递．由于这种网格在压力-速度耦合处理中有困难以及存在压力振荡现象，因此在不可压缩流体的计算中一度“失宠”．然而，随着压力-速度耦合算法的重大改进，例如著名的 Rhie 和 Chow(1983)插值法的应用，同位网格再次得到广泛使用．这种算法已经在结构化网格中提供了有明确物理意义的解，现



(a) 交错网格　　　　(b) 同位网格

图 4.14　有限体积网格上速度分量的交错和同位分布

（实心点表示单元的顶点，在控制体体积中心的空心点表示储存其他控制变量的计算节点）

在人们更广泛地将其用于非结构化网格当中．对大多数常规流动来说，这种处理能在压力场中产生平滑解，同时最大限度地减少对质量流量的影响．关于插值法更多的内容留给有兴趣的读者．

4.3.3.2　压力修正方程及其求解

SIMPLE方法本质上是求解压力修正方程来计算压力的一种猜测-修正过程．图4.15显示的是结构化网格中应用该方法求解二维稳态层流流动问题．

SIMPLE算法为不可压缩流动提供了计算压力与速度的鲁棒方法．当与其他控制变量，如温度、湍流量相耦合时，由于是迭代过程，所以计算需要持续运算下去．SIMPLE算法的典型CFD计算流程如图4.16所示．每一迭代步骤的详细描述在下面给出．

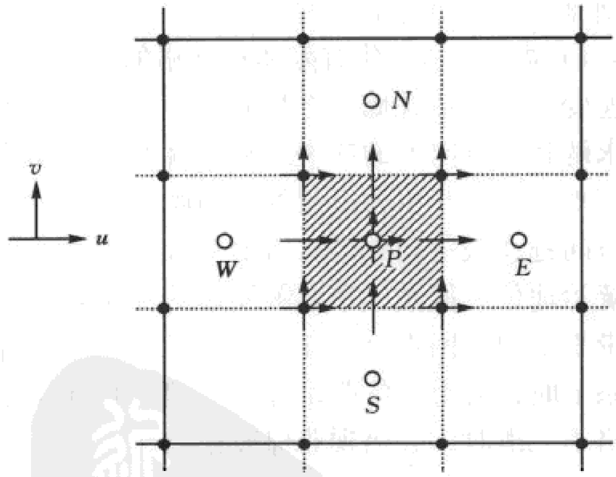


图 4.15　结构化控制体体积网格单元中心节点、单元表面以及单元顶点上的速度分量

第一步：SIMPLE计算过程的第一步是从估计压力场 p^* 开始的．在迭代过程中，用估计的压力场去求解离散的动量方程．运用有限体积方法，产生速度分量 u^* 与 v^* 的 x 和 y 方向的动量方程可以采用前面所提及方程(4.29)的代数形式进行描述，即

$$a_p^u u_p^* = \sum a_{nb}^u u_{nb}^* - \frac{\partial p^*}{\partial x}\Delta V + b', \tag{4.63}$$

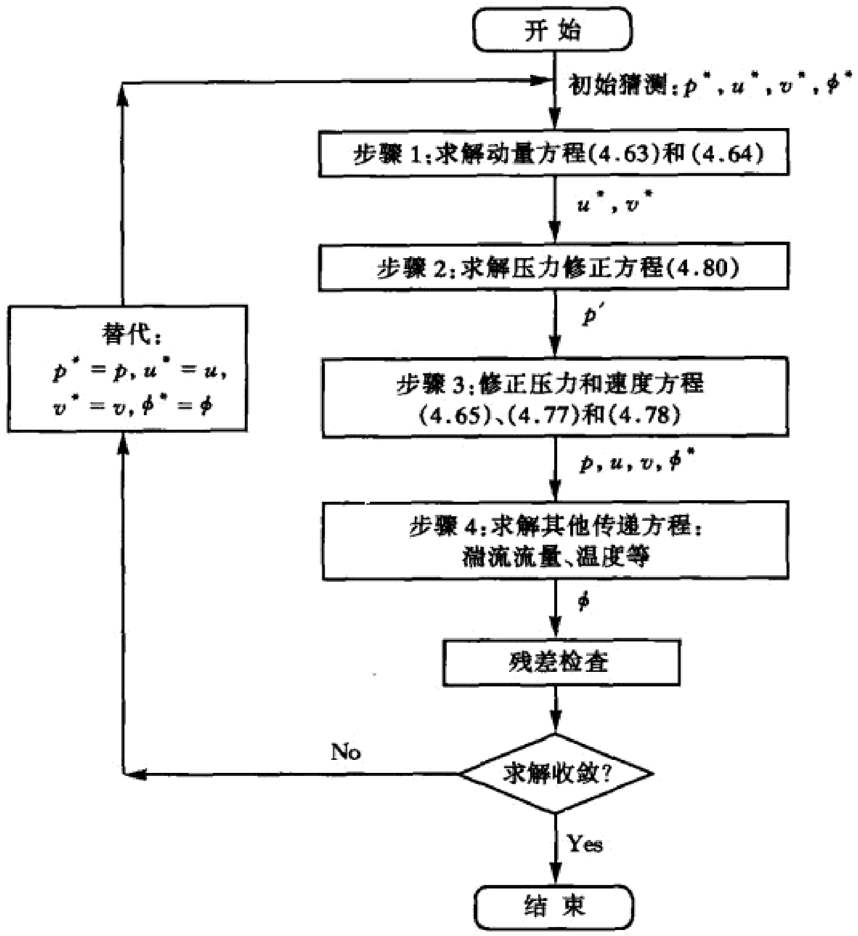


图 4.16 SIMPLE 算法计算流程图

$$a_p^v v_p^* = \sum a_{nb}^v v_{nb}^* - \frac{\partial p^*}{\partial y}\Delta V + b'. \tag{4.64}$$

式中，ΔV 为有限控制体体积. u_{nb}^*和 v_{nb}^*代表相邻节点的速度分量，通过引入毗邻系数 a_{nb}，使上述方程得到简化. 出现在上述两个方程中的压力梯度项从动量方程源项 b 中分离出去，而控制流动的其他项则保留在源项 b'中.

第二步：如果我们将修正过的 p'定义为精确压力场与猜测压力场 p^*之差，可得

$$p = p^* + p'. \tag{4.65}$$

类似地，我们可以定义修正 u'和 v'分别为对应精确速度分量 u 和 v 与猜测 u^* 和 v^* 之差：

$$u = u^* + u', \tag{4.66}$$

$$v = v^* + v'. \tag{4.67}$$

修正速度 u 和 v 的代数形式也可以用与方程(4.63)和 (4.64)相似的形式表示，所以

$$a_p^u u_p = \sum a_{nb}^u u_{nb} - \frac{\partial p}{\partial x}\Delta V + b', \tag{4.68}$$

$$a_p^v v_p = \sum a_{nb}^v v_{nb} - \frac{\partial p}{\partial y}\Delta V + b'. \tag{4.69}$$

将方程(4.68) 和 (4.69)减去方程(4.63)和(4.64)，我们可以得到

$$a_p^u(u_p - u_p^*) = \sum a_{nb}^u(u_{nb} - u_{nb}^*) - \frac{\partial(p - p^*)}{\partial x}\Delta V, \tag{4.70}$$

$$a_p^u(v_p - v_p^*) = \sum a_{nb}^u(v_{nb} - v_{nb}^*) - \frac{\partial(p - p^*)}{\partial y}\Delta V. \tag{4.71}$$

利用修正方程(4.65)至(4.67)，上述方程可改写为

$$a_p^u u'_p = \sum a_{nb}^u u'_{nb} - \frac{\partial p'}{\partial x}\Delta V, \tag{4.72}$$

$$a_p^v v'_p = \sum a_{nb}^v v'_{nb} - \frac{\partial p'}{\partial y}\Delta V. \tag{4.73}$$

SIMPLE 计算中，通过忽略上述(4.72)和(4.73)两式中的 $\sum a_{nb}^u u'_{nb}$ 和 $\sum a_{nb}^v v'_{nb}$，对上述两方程进行近似. 注意，SIMPLE 方法是一种迭代方法，所以并不需要考虑为预测 p' 所设计的公式在物理上的正确性. 因此，我们可以为 p' 构建一个简化的数值方程使速度场加快收敛到连续性方程的解上. 这是该算法的基本思想. 一旦压力修正场确立，那么我们就可以通过方程(4.72)和(4.73)的简化形式，由猜测速度 u^* 和 v^* 得到修正速度 u 和 v:

$$u_p = u_p^* - D^u \frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{4.74}$$

$$v_p = v_p^* - D^v \frac{\partial p'}{\partial y}. \tag{4.75}$$

式中:

$$D^u = \frac{\Delta V}{a_p^u}, \qquad D^v = \frac{\Delta V}{a_p^v}. \tag{4.76}$$

尽管上述方程(4.74)至(4.76)是为获得精确速度由控制体中心节点处猜测速度推得的，但这些修正方程通常也可以应用于计算网格内任意位置上的速度分量(如图 4.14 所示，速度既可以位于中心节点 P 上，也可以在控制体表面上，又可以在控制体的顶点上). 去掉方程中下标 P，就可以得到速度修正方程的通式:

$$u = u^* - D^u \frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{4.77}$$

$$v = v^* - D^v \frac{\partial p'}{\partial y}. \tag{4.78}$$

压力修正方程是由上述两方程推导而来的. 在直角坐标系下，方程(4.77)对 x 求导，方程(4.78)对 y 求导，将两者相加，得

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(D^u \frac{\partial p'}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(D^v \frac{\partial p'}{\partial y}\right) + \underbrace{\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y}}_{\text{猜测速度梯度}} = \underbrace{\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}^{=0}}_{\text{修正速度梯度}} \tag{4.79}$$

由连续性方程可知，方程(4.79)右侧表示的源项为 0，方程(4.79)重写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D^u\frac{\partial p'}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D^v\frac{\partial p'}{\partial y}\right)=\underbrace{\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}+\frac{\partial v^*}{\partial y}\right)}_{\text{质量残差}}. \tag{4.80}$$

有趣的是，方程(4.80)好像是二维计算域上的稳态扩散过程．这是物理学和数学上著名的泊松方程(Poisson equation)．泊松方程可以通过前面讨论的加速收敛的一些有效的数值方法(如共轭梯度和多重网格方法)来求解．

第三步：一旦压力修正场 p'确定，就可以通过修正方程(4.65)、(4.77)和(4.78)分别对速度分量和压力分量逐一更新．如果问题只涉及 CFD 层流流动问题，那么迭代过程就直接检查解的收敛性．如果解不收敛，那么就返回到第一步重新开始．压力修正方程(4.80)中的源项(质量残差)在 CFD 的计算中通常作为终止迭代过程的判断依据．随着质量残差的逐渐减少，压力修正 p'也将趋近于 0，此时得到收敛解：

$$p^*=p,\quad u^*=u,\ v^*=v.$$

第四步：当 CFD 模拟的流动涉及湍流问题或牵涉到多相流动相间的传热、传质时，进行这一步．在收敛检查之前，需要求解附加控制流动输运方程．如果不收敛，就返回第一步重新开始迭代，直到获得收敛为止．

我们用第 2 章中所提到的平行平板内稳态二维不可压缩层流 CFD 问题为例，可以很好地说明 SIMPLE 方法的应用．下面就是这个例子的描述．

例 4.5　考虑第 2 章中提及的两静止平行板间的二维稳态不可压缩层流问题(如图 4.17)．通过使用有限体积方法 CFD 程序对问题的求解，跟踪迭代过程中流道中心计算节点上 u，v，p，p'及质量残差的变化过程．

求解：问题描述如图 4.17 所示．

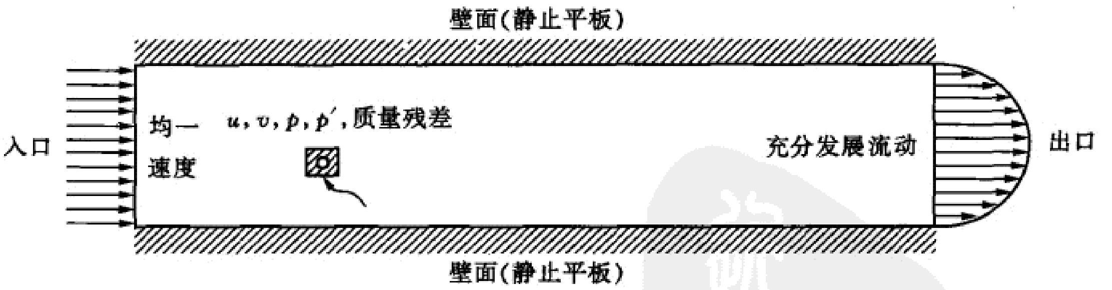


图 4.17　流道中心设有监控点的二维稳态不可压缩层流

为了说明 SIMPLE 算法的鲁棒性，初始假设 $p^*=0$，$u^*=0$，$v^*=0$，开始迭代．采用商业 CFD 软件中的默认迭代求解器求解控制动量和压力修正的离散方程．仍然采用与第 2 章相同的入口、出口和壁面条件．

基于方程(4.63)、(4.64)、(4.65)、(4.77)、(4.78)以及(4.80)，监视点上第一次迭代得到的压力 p、压力修正 p'、速度 u 和 v 以及质量残差为

$$\begin{bmatrix} p_{\text{monitor}}^{(1)} \\ p'^{(1)}_{\text{monitor}} \\ u_{\text{monitor}}^{(1)} \\ v_{\text{monitor}}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02043 \\ 0.06812 \\ 0.01033 \\ -0.1246\times10^{-4} \end{bmatrix}, \quad \text{质量残差} \Rightarrow 1.2\times10^{-4}\text{kg/s.}$$

上述第一次迭代的解作为下一次迭代的中间值，第二次迭代结果(见图 4.18 和图 4.19)为

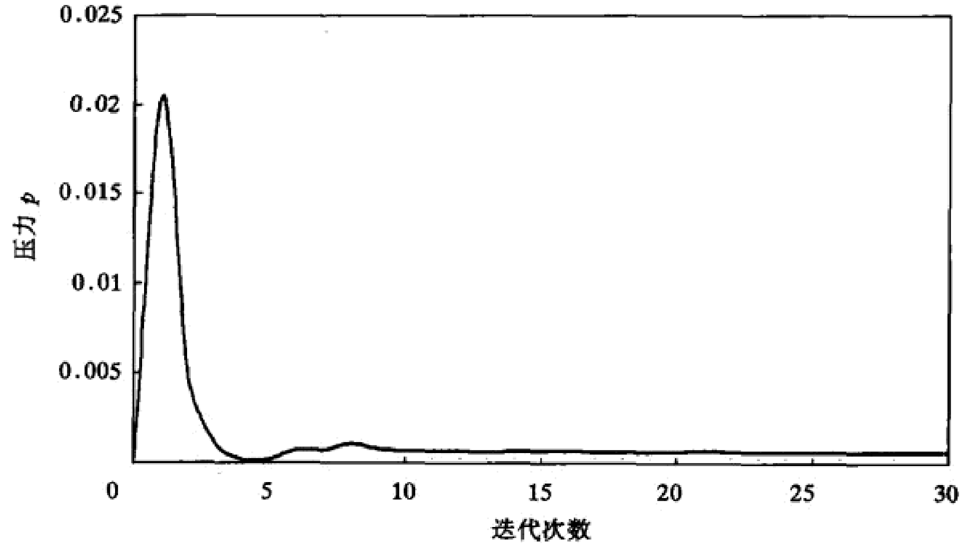


图 4.18 压力 p 收敛历程

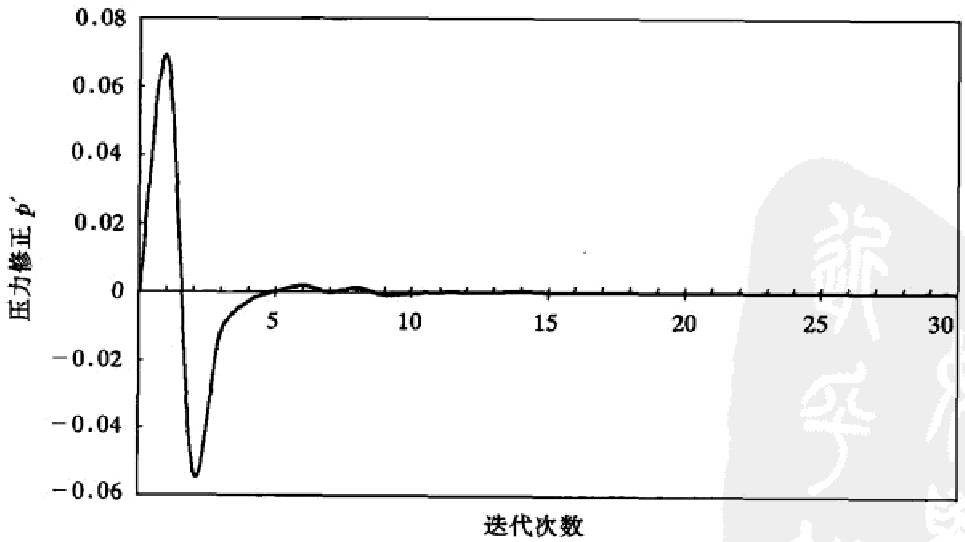


图 4.19 压力修正 p' 收敛历程

$$\begin{bmatrix} p_{\text{monitor}}^{(2)} \\ p'^{(2)}_{\text{monitor}} \\ u_{\text{monitor}}^{(2)} \\ v_{\text{monitor}}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.774\times10^{-3} \\ -0.0522 \\ 0.01181 \\ 1.104\times10^{-5} \end{bmatrix},\quad \text{质量残差} \Rightarrow 2.0494\times10^{-4}\text{kg/s}.$$

经过10次迭代和20次迭代后，压力 p、压力修正 p'、速度 u 和 v 以及质量残差(见图4.20和图4.21)分别为

$$\begin{bmatrix} p_{\text{monitor}}^{(10)} \\ p'^{(10)}_{\text{monitor}} \\ u_{\text{monitor}}^{(10)} \\ v_{\text{monitor}}^{(10)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.83\times10^{-4} \\ -4.944\times10^{-4} \\ 0.01419 \\ -2.963\times10^{-6} \end{bmatrix},\quad \text{质量残差} \Rightarrow 1.8639\times10^{-5}\text{kg/s};$$

以及

$$\begin{bmatrix} p_{\text{monitor}}^{(20)} \\ p'^{(20)}_{\text{monitor}} \\ u_{\text{monitor}}^{(20)} \\ v_{\text{monitor}}^{(20)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.626\times10^{-4} \\ 3.793\times10^{-6} \\ 0.01482 \\ 2.444\times10^{-7} \end{bmatrix},\quad \text{质量残差} \Rightarrow 5.061\times10^{-7}\text{kg/s}.$$

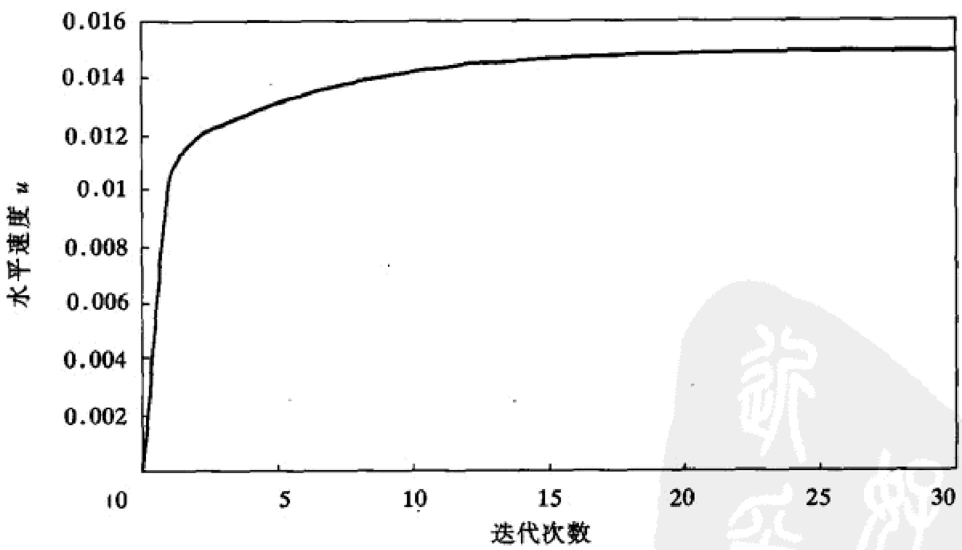


图4.20　水平速度 u 收敛历程

监视点上的垂直速度 v 理论上为0，而迭代过程确实趋向于预期的零值．从迭代过程中可见，该速度的中间值比其他控制变量要小得多；由于与其他变量收敛历程之间没有可比性，因此，该速度分量的收敛历程被省略．其他控制变量，包括压力 p、压力修正 p'、

水平速度 u 以及质量残差的收敛历程见图 4.18 至图 4.21.

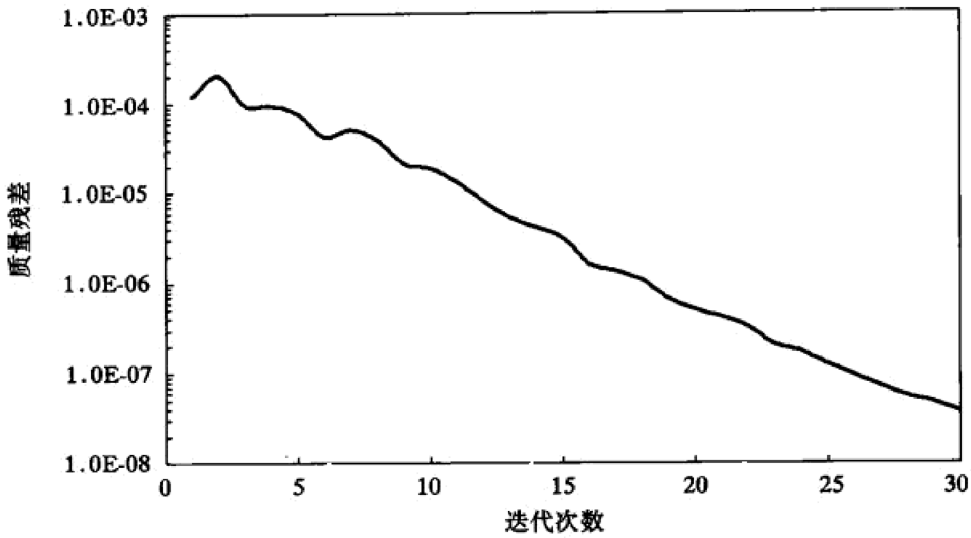


图 4.21 质量残差收敛历程

讨论：从上述流动实例中可见，SIMPLE 算法为不可压缩流动速度场和压力场的求解提供了高效的迭代方法. 从收敛历程中可见，经过 5 次迭代后，速度和压力迅速稳定，说明 SIMPLE 方法具有鲁棒性. 质量残差在压力修正方程(4.80)中作为源项出现，在迭代过程中持续减小，这再次证明了连续性方程是守恒的. 随后，压力修正 p' 也趋近于 0. 因此，需要更新速度场的修正量也趋近于 0. 该收敛历程的趋势清楚地表明可能获得收敛的稳定解.

读者应该了解其他类似于 SIMPLE 算法的压力-速度耦合算法，这些方法在 CFD 使用者自编程序或商业 CFD 软件中都有应用. 这些不同的 SIMPLE 算法的目的是为了更好地改进迭代过程的鲁棒性和收敛速率. 我们不打算向读者提供不同算法的所有细节，而只简要地说明对原始 SIMPLE 算法的改进.

Van Doormal 和 Raithby(1984)提出的 SIMPLEC(SIMPLE-Consistent)算法与 SIMPLE 算法具有同样的迭代步骤. SIMPLEC 与 SIMPLE 之间的主要区别在于对离散的动量方程进行适当的处理，使得 SIMPLEC 算法在速度修正方程中忽略的诸项比 SIMPLE 算法中忽略的那些项更不重要. 另一种普遍使用的压力修正方法是由 Issa(1986)提出的 PISO(Pressure Implicit with Splitting of Operators)算法. 这种压力-速度计算方法最初是从非稳定可压缩流体的非迭代计算中发展起来的. 然而，它已经成为稳态问题迭代求解的适合选择. 可以简单地认为，PISO 算法是增加了修正步骤的 SIMPLE 算法的扩展，该步骤包括一个附加压力修正方程以提高迭代的收敛性. Patankar(1980)提出了 SIMPLER(SIMPLE-Revised)算法，这种算法具有像 PISO 那样的两个修正步骤. 该方法中，在离散动量方程求解之前，给中间的压力场提供一个压力离散方程. 然后对压力修正进行求解，其中速度通

过类似于 SIMPLE 算法中的修正方程加以修正.

还有其他 SIMPLE 类的算法，例如 Spalding(1980)提出的 SIMPLEST(SIMPLE STened)算法、Van Doormal 和 Raithby(1985)提出的 SIMPLEX 算法以及 Acharya 和 Moukalled(1989)提出的 SIMPLEM(SIMPLE-Modified)算法，它们都具有相同的基本迭代思想. 上述压力-速度耦合算法的更多细节留给有兴趣的读者.

4.4 小 结

让我们回顾一下本章中给出的求解流体动力学控制方程的一些基本计算技术要点.

获得数值解的第一个阶段包括把控制方程转化为代数方程组. 这通常被称为离散阶段. 我们已经讨论了一些离散工具，例如有限差分法和有限体积法，它们形成了理解基本离散特征的基础. 这两种方法广泛应用于许多 CFD 应用软件之中.

第二个阶段包括应用数值方法求解代数方程组，这包括直接法或迭代方法. 直接方法，如高斯消元法和托马斯算法，这些直接方法已经成为求解三对角矩阵代数方程组的高效方法，并且是结构化网格中求解流体流动方程的标准算法. 本章中也描述了简单的迭代方法，如点对点的 Jacobi 法和 Gauss-Siedel 法. 然而，CFD 问题一般为多维，并包括大量的待求解方程. 有效的迭代方法，如 ADI 法和 Stone 的 SIP 法经常用来求解复杂的方程组. 为了更进一步增强计算求解的收敛性，应用前处理共轭梯度法或多重网格方法来加速迭代过程.

读者可以返回到图 4.1 去看一下计算求解过程的这两个阶段. 在数值方法中，对不可压缩流动，压力以及流场的迭代计算基于 SIMPLE 算法. 该方法的基本思想是在离散的动量方程中假设一压力场，进而产生中间速度. 压力修正形式中的连续性方程随之被求解，然后再修正速度场和压力场. 这些假设不断被改进，直到获得收敛. 读者可以参见图 4.16，该图对 SIMPLE 算法所包含的步骤进行了更为详尽的描述.

我们尚未对收敛进行深入的讨论. 实际上，从离散过程中得到的代数方程组，用于求解网格节点上的流动. 由 4.2.1 给出的截断误差，我们期望通过细化网格获得更高精度的解. 对于非稳态问题，通过采用更小的时间间隔也可以获得更高的精度. 然而，对于给定的求解精度，在粗糙网格上采用高阶近似来求解流体流动控制方程比在精细网格上使用低阶近似来得更经济. 这就是“计算效率”的概念. 数值过程的“求解相容性”“稳定性”等其他问题也是数值求解收敛中的重要方面. 所有这些，将在下章中进行研究.

复习题

4.1 流体流动问题的解析求解和数值求解的区别是什么？每种方法的优缺点有哪些？

4.2 通过有限差分法离散控制方程的主要优缺点是什么？

4.3 有限差分法更适合于结构化网格还是非结构化网格？为什么？

4.4 对于简单流动，考查如下有限差分公式：

$$\frac{\phi_{i-1}-2\phi_i+\phi_{i+1}}{2}=0.$$

流动为稳态还是瞬态问题？是一维、二维还是三维问题？节点空间是常数还是变化的？

4.5 采用有限差分法，说明稳态一维热传导方程 $k\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0$ 能否表示成 $\dfrac{T_{i-1}-2T_i+T_{i+1}}{2}=0$ 的形式.

4.6 如下给出的一阶导数的中心差分近似中，第二项称为什么？如何进行量度？

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j}}{2\Delta x}+o(\Delta x^2).$$

4.7 在向前差分、向后差分以及中心差分当中，哪一个精度最高？为什么？

4.8 通过有限体积法离散控制方程的主要优缺点有哪些？

4.9 有限体积法更适于结构化网格还是非结构化网格？为什么？

4.10 用有限体积法对控制方程的离散过程中，在控制体上控制方程积分的意义是什么？

4.11 对于如图 4.22 所示的控制体，说明在中心网格节点 P 上如何将一维稳定扩散项 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)$ 离散成为 $\left(\Gamma\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e A_E-\left(\Gamma\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w A_W$？

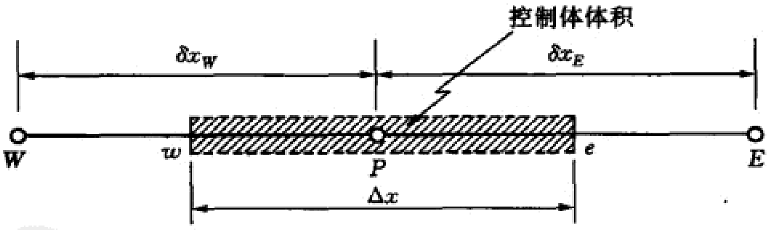


图 4.22

4.12 在有限差分方法中，数据是在节点上求得的，这与有限体积法有何不同？

4.13 稳态对流-扩散过程与纯扩散过程的区别是什么？

4.14 为什么迎风格式对于强对流流动非常重要？

4.15 为什么高阶迎风格式比一阶迎风格式更受欢迎？

4.16 对于非稳态对流-扩散过程，显式与隐式方法之间在时间逼近上有何不同？

4.17 直接方法和迭代方法在求解离散方程时有什么不同？

4.18 直接方法还是迭代方法更适于求解大型非线性方程组？

4.19 为什么 Gauss-Siedel 迭代方法的收敛速度比 Jacobi 方法快？

4.20 与连续超松弛相关的技术是什么？为什么使用该技术？

4.21 在同位网格上，流场变量位于何处？与交错网格有何不同？

4.22 写出对 x 方向上速度 u 的中心差分公式．在 Δx 项中，截断误差是什么？说明这种离散方法的阶数．

4.23 SIMPLE 算法的目的是什么？该方法是直接求解还是依靠迭代进行求解？

4.24 Gaussian 消元法的基础是什么？这种方法能否用于求解非线性代数方程组？

4.25 用 Gaussian 消元法求解下列方程组：

$$\begin{bmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 200 & 100 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 100 \\ -300 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

4.26 用 Thomas 算法求解下列方程组：

$$\begin{bmatrix} 100 & 0 & 200 & 0 \\ 200 & 0 & 300 & 0 \\ 100 & 100 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 400 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ -2000 \\ -200 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

4.27 用 Gauss-Seidel 方法求解下列方程组：

$$\begin{bmatrix} -1000 & -100 & 200 \\ -100 & -1100 & -100 \\ 200 & -100 & 1000 \\ 0 & 300 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ -2500 \\ 1100 \\ 1500 \end{bmatrix}.$$

4.28 用 Jacobi 方法求解问题 4.27 给出的矩阵．比较 Jacobi 方法和 Gauss-Seidel 方法收敛的迭代次数．

4.29 用 Gauss-Seidel 方法求解下述方程组：

(a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25, \\ 2x_1 - x_2 - 10x_3 - x_4 = -11, \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15. \end{cases}$

4.30 根据如图 4.23 所示的网格分布，离散如下表达式：

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}.$$

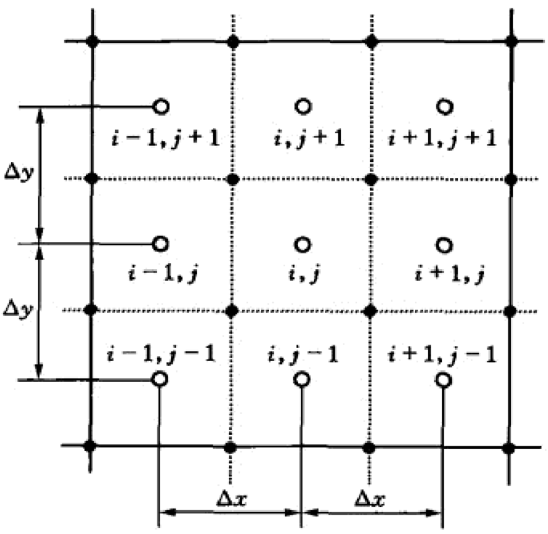


图 4.23

5 CFD 计算结果分析基础

5.1 概 述

计算结果分析是 CFD 中的一部分. 在第 4 章中，已经介绍了一些基本离散技术，读者熟悉了将偏微分控制方程转化成代数方程组的一般方法. 然后，用数值方法来求解代数方程组，得到控制方程的近似解. 这些近似解也可称为数值解.

在 CFD 中，最关心的问题是能否保证数值解逼近偏微分方程的精确解，以及在什么条件下会逼近精确解，即当微元趋近于 0 时，数值解收敛于精确解. 回顾第 4 章，将偏微分方程离散为代数方程组，其中时间微元为 Δt，空间微元为 Δx，Δy 和 Δz. 然而，收敛性一般难以直接证明. 间接证明收敛性涉及相容性(consistency)和稳定性(stability)等问题. 首先，要求经过离散得到的代数方程组与原始偏微分方程组具有相容性. 相容性意味着通过泰勒级数展开，离散后的代数方程可以恢复到原始的控制方程. 其次，为求解代数方程组而选择的任何数值解法必须稳定，稳定性与相容性同时具备才能确保收敛.

数值解的精度受到数值计算误差和不确切性的影响. 这些误差和不确切性可能来自建模或数值计算，必须加以评估和限制. 数值解的可靠性依赖于误差和不确切性的认定并与初始误差无关. 随着系统误差的减少，我们可以更好地描述真实的物理流动问题，也会增强使用 CFD 模拟程序求解问题的信心. 我们将通过网格收敛检验(Verification)以及与实验结果或精确解比较验证(Validation)的办法来评估 CFD 中的计算误差和不确切性.

在本章的最后，精心选择了一些研究实例，通过应用与 CFD 计算结果分析相关的相容性、稳定性和精度等，来证明计算结果的可信性. 通过这些要点的讨论，读者可以了解到求解特定流动问题数值方法的各个方面. 这些问题的每一个方面都有其物理意义，作者假定读者已经具有流体流动和热量传输过程的基础知识，可以较好地理解数值模拟所代表的物理意义.

5.2 相容性

相容性表面上带有修辞色彩. 然而，它是关系到偏微分方程离散的一个重要性质. 当时间步长 Δt，网格间距 Δx，Δy 及 Δz 均趋近于 0 时，得到的离散方程应接近或成为原始精确的偏微分方程. 在 4.2.1 节有限差分法中，对于单一节点，截断误差可以通过泰勒

级数展开来衡量离散逼近程度．截断误差在本质上是代表离散方程与真实方程之间的差距．因此，离散方程加上残差(即截断误差)，就等于初始偏微分方程．这一误差主要用于衡量离散的精确度，以及当时间步长和(或)网格空间步长减少时，用于确定误差减小的速率．

对于任何相容的数值方法，当时间步长 $\Delta t\to 0$ 和(或)网格空间 Δx，Δy 和 $\Delta z\to 0$ 时，截断误差也趋于 0．该误差通常与步长的 n 次方成正比．如果最重要项与 $(\Delta t)^n$ 或 $(\Delta x_i)^n$ 成正比，那么对于 $n>0$，数值方法就是原方程关于 n 阶的近似值．理想的情况是将控制方程中的各项按相同的精度离散．然而，实际上有些项(如高雷诺数流动中的对流项)可能起主导作用，这些项要比其他项具有更高的精度，需要高阶近似．

通过下面的例子对相容性这一基本思想作进一步的说明．

例 5.1 对不可压缩稳态二维连续方程：$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$，采用例 4.1 结构化网格进行离散．讨论与原始偏微分方程相关的残差或截断误差．

求解：二维结构化网格的单元控制体如图 5.1 所示．控制体的质心由 P 表示，其周围控制体质心分别为 E，W，N 和 S．质心为 P 的控制体各侧面分别为 e，w，n 和 s．

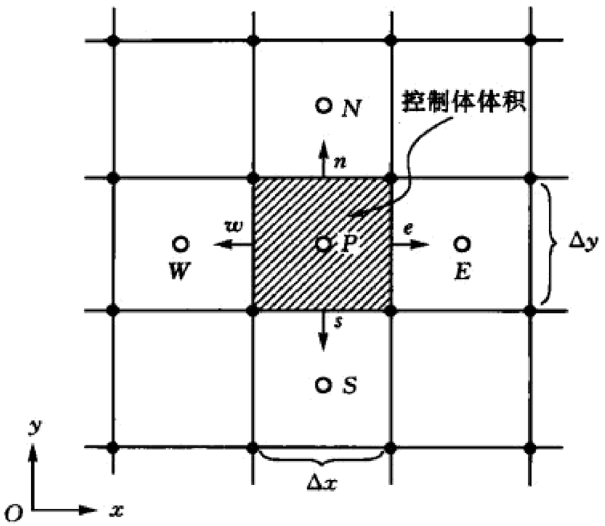


图 5.1 二维连续性方程问题的控制体体积

通过有限体积方法得到的离散形式如下：

$$\frac{u_e-u_w}{\Delta x}+\frac{v_n-v_s}{\Delta y}=0.$$

控制体表面速率 u_e，u_w，v_n 和 v_s 定义在每两个控制体质心的中间，通过质心物理量的插值就可以确定控制体表面的速率．因此

$$u_e=\frac{u_P+u_E}{2},\quad u_w=\frac{u_P+u_W}{2},\quad v_n=\frac{v_P+v_N}{2},\quad v_s=\frac{v_P+v_S}{2}.$$

将上述表达式代入一阶导数的离散形式，我们可以得到

$$\frac{u_E-u_W}{2\Delta x}+\frac{v_N-v_S}{2\Delta y}=0.$$

为了恢复偏微分方程的原始形式，可以把 4.2.1 节中方程(4.3)和(4.8)用泰勒级数展开，得到截断误差，将上述方程重写为

$$\frac{u_E-u_W}{2\Delta x}+\frac{v_N-v_S}{2\Delta y}+[\underbrace{o(\Delta x^2,\ \Delta y^2)}_{\text{截断误差}}]_P=0.$$

由于数值方法导致二阶截断误差，对网格节点 P 的近似值为二阶精度.

讨论： 当网格空间 Δx 和 $\Delta y \to 0$ 时，原始偏微分方程可以从包括截断误差的离散方程中得到恢复(满足相容性条件). 对于上述的二阶近似，若将网格空间一分为二，截断误差会减少到原来的四分之一.

例 5.2　讨论一维瞬时扩散方程的离散形式. 假设热扩散系数 $\alpha(=k/(\rho c_p))$ 为常数，讨论 DuFort-Frankel(DuFort 与 Frankel，1953)瞬时热传导方程差分的残差或截断误差.

求解： 一维瞬时扩散方程可表述为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0. \tag{5.1}$$

对上式应用 DuFort-Frankel 差分，可得

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{\alpha}{\Delta x^2}(\phi_{i+1}^n - \phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1} + \phi_{i-1}^n) = 0.$$

方程(5.1)左侧第一项表示关于第 i 个节点的时间偏导，与二阶空间中心差分相似，即

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1}}{2\Delta t} + \underbrace{o(\Delta t^2)_i}_{\text{截断误差}}.$$

方程(5.1)左侧第二项表示方程(4.9)对空间的二阶偏导，可得如下截断误差：

$$\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(\phi_{i+1}^n - \phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1} + \phi_{i-1}^n) + \underbrace{o(\Delta x^2)_i}_{\text{截断误差}}.$$

将精确解的泰勒级数展开代入一维瞬时热传导方程中，忽略高阶项，则有

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \alpha \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right]_i + [\underbrace{o(\Delta t^2,\ \Delta x^2)}_{\text{截断误差}}]_i = 0.$$

讨论： 正如 Fletcher(1991) 证明的那样，相容性要求当 Δt，$\Delta x \to 0$ 时，$\Delta t/\Delta x$ 必须以相同的速率趋于 0. 也就是要求 $\Delta t \ll \Delta x$，如果 $(\Delta t/\Delta x)^2$ 为大值，结果也不准确. 从实用的角度出发，使用 DuFort-Frankel 方法时，必须有效地约束 Δt 的大小. Dirichlet 边界条件设置在两端，即 $\phi(t,\ x=0)=1$，$\phi(t,\ x=1)=0$. 对于固定热扩散系数 $\alpha=0.5$，步长 $\Delta x = 1/10$，当时间步长为 $\Delta t = 1/10$ (实线)和 $\Delta t = 50$(虚线)时，方程(5.1)的稳态解是不同的，其变化见图 5.2. 精确解在图 5.3 中给出. 可以清楚地看到，与小的$(\Delta t/\Delta x)$值得到的解相比，大的$(\Delta t/\Delta x)$值得到的解与精确解并不一致.

从上面的例子可知，如果近似解想收敛到偏微分方程解的话，相容性是必须满足的. 但这并不是收敛的充分条件. 当微元趋近于 0 时，即使离散方程能与偏微分方程等同，也不意味着离散方程的解一定趋近于偏微分方程的解. 后面将证明例 5.2 中大的$(\Delta t/\Delta x)$得到的解是不正确的.

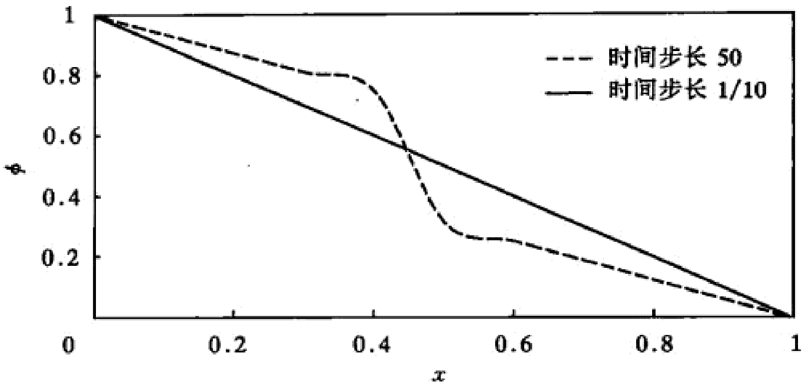


图 5.2　$\Delta x=1/10$ 时，$\Delta t=1/10$ 和 $\Delta t=50$ 两种情况下的稳态解

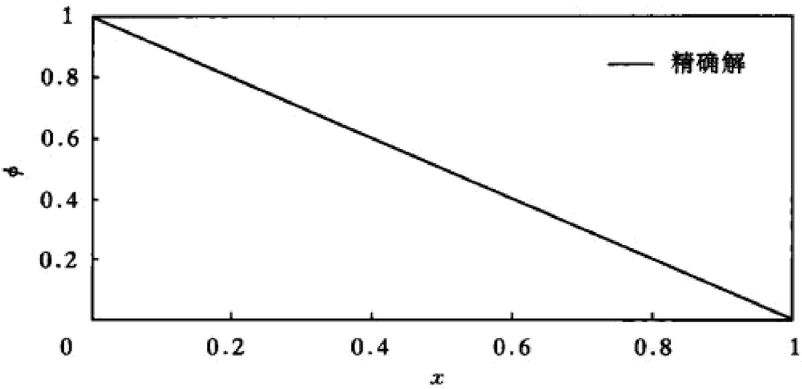


图 5.3　方程(5.1)的精确解

5.3　稳定性

除了相容性之外，另一个影响数值求解方法的重要性质是稳定性．这一特性关心的是计算过程的任何阶段产生的计算误差是增大还是减小．这里提到的误差不是由数学逻辑错误引起的，而是在完成每一计算步骤时，由计算机硬件提供的有效数字的舍入和不准确的初始条件引起的．如果在数值求解过程中计算误差不增加，那么可认为该数值求解方法是稳定的．如果精确解有解，那么稳定性能保证数值解也是有解的．在迭代过程中，稳定性保证解不发散．

稳定性的研究可能会相当困难．当存在边界条件和非线性问题时，这一问题更为突出．基于这一原因，数值方法的稳定性通常用无边界条件的常系数问题来研究．尽管有一些例外，但用这种方法得到的结果常常被用于更复杂的问题．然而，当求解复杂、非线性以及含有复杂边界条件的耦合方程组时，很难推断出求解的稳定性．在这种情况下，我们不得不依靠经验和直觉来保证数值计算的稳定．大量的求解方法都要求时间步长设成低于

某一限定值或在代数方程组中采用欠松弛方法(under-relaxation). 我们将在 5.4.3 中讨论这些问题，并提供一些选择适当时间步长以及与之匹配欠松弛因子的方法.

对于线性问题的稳定性分析，最常用的两种方法是矩阵方法和 Neumann 方法. 这两种方法都是通过预测数值方法的精确解(即准确的数值解，它与精确的物理解不是一个概念)与实际计算结果之间的误差是否在扩大来判断稳定性，并考虑到计算机有效数字舍入的影响. 下面的例子将说明 Neumann 稳定性分析方法在对流方程中的应用. 其他有关稳定性问题的例子也在下面给出.

例题 5.3 考查一维对流方程：$\frac{\partial \phi}{\partial t}+u\frac{\partial \phi}{\partial x}=0$. 说明应用 Neumann 方法分析线性偏微分方程的稳定特性.

求解：稳定性判据的精确形式依赖于方程的特定差分方式. 若使用有限差分方法，用向前和中心差分来近似时间和空间项，则对流型方程的离散形式为

$$\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^n}{\Delta t}+u\frac{\phi_{i+1}^n-\phi_{i-1}^n}{2\Delta x}=0. \tag{5.2}$$

式中，u 为速度.

为了分析上述方程的稳定性，每一网格节点引起的误差为

$$\xi_i^n=\phi_i^n-{}^*\phi_i^n. \tag{5.3}$$

式中，ϕ_i^n 为数值方法的精确解；${}^*\phi_i^n$ 为该数值方法的实际计算解. 作为离散方程，我们实际计算：

$$\frac{{}^*\phi_i^{n+1}-{}^*\phi_i^n}{\Delta t}+u\frac{{}^*\phi_{i+1}^n-{}^*\phi_{i-1}^n}{2\Delta x}=0.$$

将方程(5.3)代入上面方程，应用方程(5.2)可得

$$\frac{\xi_i^{n+1}-\xi_i^n}{\Delta t}+u\frac{\xi_{i+1}^n-\xi_{i-1}^n}{2\Delta x}=0. \tag{5.4}$$

对于线性计算方法，在大部分的教科书(Fletcher，1991；Anderson，1995)中，将误差 ξ_i^n 处理成 Fourier 级数有限项组合中的一项，由下式给出：

$$\xi_i^n=\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x}. \tag{5.5}$$

式中，a 为常数；k_m 为波数(wave number). 将上式代入方程(5.4)，可得

$$\frac{\mathrm{e}^{a(t+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x}-\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x}}{\Delta t}+u\frac{\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m(x+\Delta x)}-\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m(x-\Delta x)}}{2\Delta x}=0.$$

经过一些算法处理以及应用三角关系式，上面的方程可简化为

$$\mathrm{e}^{a\Delta t}=1-\mathrm{i}C\sin(k_m\Delta x).$$

式中，$C=u\Delta t/\Delta x$. 若要 Neumann 稳定，放大因子(amplification factor)应满足：$|\mathrm{e}^{a\Delta t}|\leqslant 1$，因此，$C$ 的判据为：$C^2\leqslant 2\Gamma$(扩散因数). 基于这一判据，对于非黏性流($\Gamma=0$)，

无论参量 C 中 Δt 为何值，离散方程(5.2)的解都是不稳定的．这种情况称为无条件不稳定．

如果我们用节点 $i+1$ 和 $i-1$ 之间的平均值来代替方程(5.2)中的时间变量 ϕ_i^n，即

$$\phi_i^n=\frac{1}{2}(\phi_{i-1}^n+\phi_{i+1}^n).$$

将上式代入到方程(5.2)，离散形式变为

$$\frac{\phi_i^{n+1}-\frac{1}{2}(\phi_{i-1}^n+\phi_{i+1}^n)}{\Delta t}+u\frac{\phi_{i+1}^n-\phi_{i-1}^n}{2\Delta x}=0. \tag{5.6}$$

我们得到与方程(5.4)形式相似的误差方程：

$$\xi_i^{n+1}=\frac{\xi_{i-1}^n+\xi_{i+1}^n}{2}-C\frac{\xi_{i+1}^n-\xi_{i-1}^n}{2}.$$

将方程(5.5)代入上式，经过一些算法处理，放大因子变为

$$\mathrm{e}^{a\Delta t}=\cos(k_m\Delta x)-\mathrm{i}C\sin(k_m\Delta x).$$

此时，只要参数 $C\leqslant1$，Neumann 稳定条件 $|\mathrm{e}^{a\Delta t}|\leqslant1$ 就能够得到满足．

讨论： Neumann 在简单线性方程中的稳定性分析，为应用各种差分格式获得稳定性提供了一些基本原则．在方程(5.2)中采用的时间向前差分格式不能满足稳定性要求的条件 $|\mathrm{e}^{a\Delta t}|\leqslant1$．然而，可以巧妙地使用相邻网格节点间的平均值表示变量 $\phi(t)$ 的一阶差分(如方程(5.6)中的形式)来代替时间导数，当 $C\leqslant1$ 时，稳定条件 $|\mathrm{e}^{a\Delta t}|\leqslant1$ 能被满足．这种表示时间项差分的方法被称为 Lax 方法，是以首先提出该方法的数学家 Peter Lax 命名的．本例中多次出现的参数 C 通常被称为 Courant 数．它表示当 $\Delta t\leqslant\Delta x/u$ 时，数值解将是稳定的．此外，C 也被称为 Courant-Friedrichs-Lewy 条件，一般简写为 CFL 条件，它是对流方程稳定性的一个重要判据．

例 5.4 再次考查例 5.2 中描述的一维瞬时扩散方程．应用有限差分方法离散方程，讨论使用显式欧拉(Euler)方法数值求解的稳定性．采用两种时间步长，分别为 $\Delta t=1/100000$ 和 $\Delta t=1/1000$，网格间隔固定为 $\Delta x=1/100$．用一阶向前差分和二阶中心差分来近似时间和空间导数．初始条件设为 $\phi(t=0,\ x)=1-x+\sin(2\pi x)$，其中 $0\leqslant x\leqslant1$．Dirichlet 边界条件为 $\phi(t,\ x=0)=1$ 及 $\phi(t,\ x=1)=0$．热扩散系数 α 设定为常数，其值为 0.5．

求解： 本例中，使用显式欧拉方法对扩散方程进行有限差分离散，其形式为

$$\phi_i^{n+1}=\phi_i^n+\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(\phi_{i+1}^n-2\phi_i^n+\phi_{i-1}^n).$$

根据 Neumann 稳定性分析，当 $\Delta t\leqslant\Delta x^2/(2\alpha)$ 时，上述方程是稳定的．由于 $\alpha=0.5$，所以稳定条件为 $\Delta t\leqslant\Delta x^2$．$\phi$ 的瞬时结果如图 5.4 和图 5.5 所示．

讨论： 对于应用显式欧拉方法求解扩散型方程，时间步长对于基于时间推进的数值解

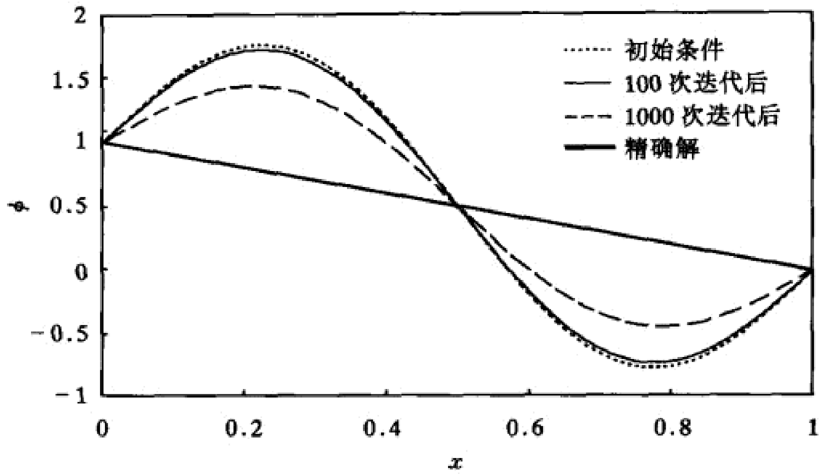


图 5.4 $\Delta t = 1/100000$ 和 $\Delta x = 1/100$ 条件下，ϕ 随时间的变化

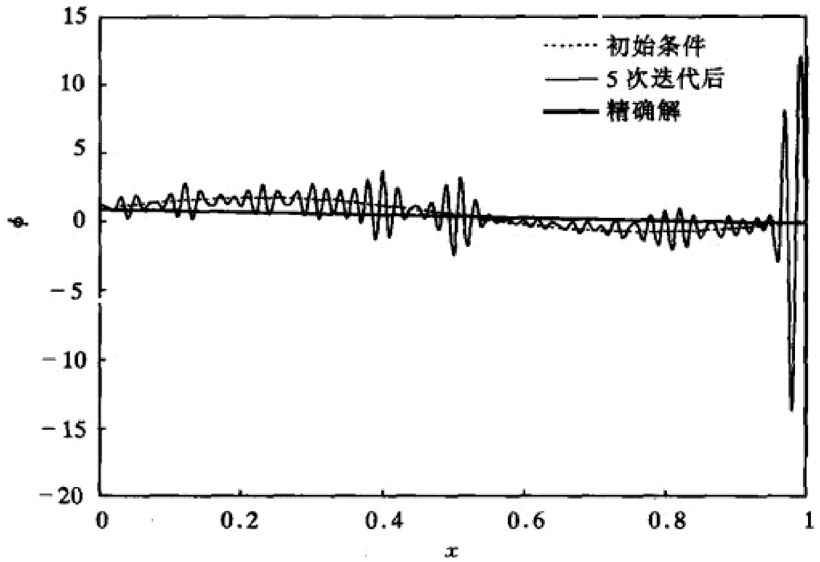


图 5.5 $\Delta t = 1/1000$ 和 $\Delta x = 1/100$ 条件下，ϕ 随时间的变化

非常敏感．就这一特定例子而言，稳定性条件由 $\Delta t \leqslant \Delta x^2$ 给出．在图 5.4 中，当时间步长 Δt 远小于网格尺寸 Δx 时，计算过程进入稳定状态，并显示出收敛的趋势．经过 1000 迭代之后，中间结果逐渐逼近方程的精确解．然而，当如图 5.5 中采用的时间步长 Δt 大于稳定性要求的步长时，计算过程表现出极不稳定的特征．这种现象在 5 次迭代之后就突显出来．

例 5.5 再次考查例 5.3 中的对流型方程．应用有限差分方法离散方程，在固定时间步长 $\Delta t = 1$ 以及两个不同的网格间距 $\Delta x = 1$ 和 $\Delta x = 1/2$ 条件下，讨论显式欧拉方法数值求解的稳定性．分别采用一阶向前差分和向后差分近似时间和空间导数．初始条件按高斯(Gaussian)分布设置(与 Hu 等人 1996 年提出的初始条件相似)：

$$\phi(t=0,\ x)=\exp\left[-\ln2\left(\frac{x-50}{3}\right)^2\right].$$

式中，Dirichlet 边界条件为 $\phi(t,\ x=0)=0$.

求解：应用显式欧拉方法，对流型方程离散有限差分为

$$\phi_i^{n+1}=\phi_i^n-u\frac{\Delta t}{\Delta x}(\phi_i^n-\phi_{i-1}^n).$$

若要求解稳定，则 CFL 必须小于或等于 1，即 $C\leqslant1$. 假定 CFL 为常数，那么 $\Delta t\leqslant\Delta x/u$. 如果速度 u 为 1m/s，当 $\Delta t\leqslant\Delta x$ 时数值计算是稳定的. ϕ 的瞬时结果如图 5.6 和图 5.7 所示.

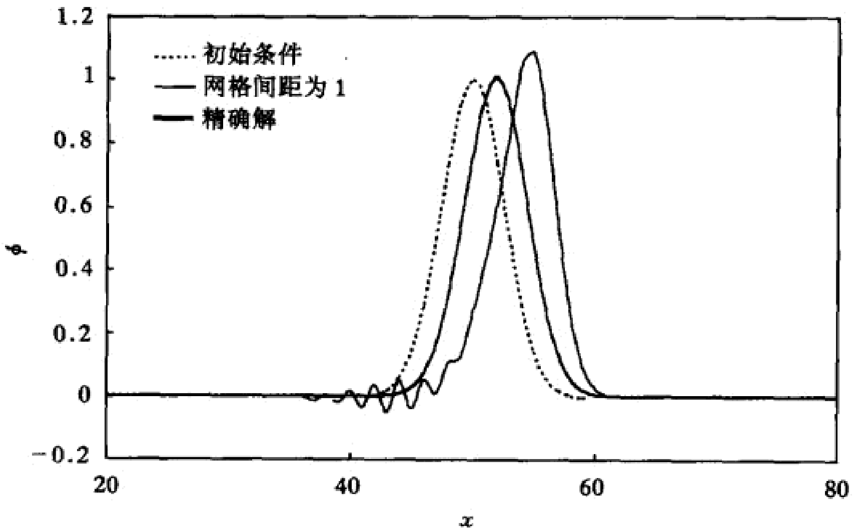


图 5.6　$\Delta t=1$，$\Delta x=1$ 条件下，ϕ 的时间演化

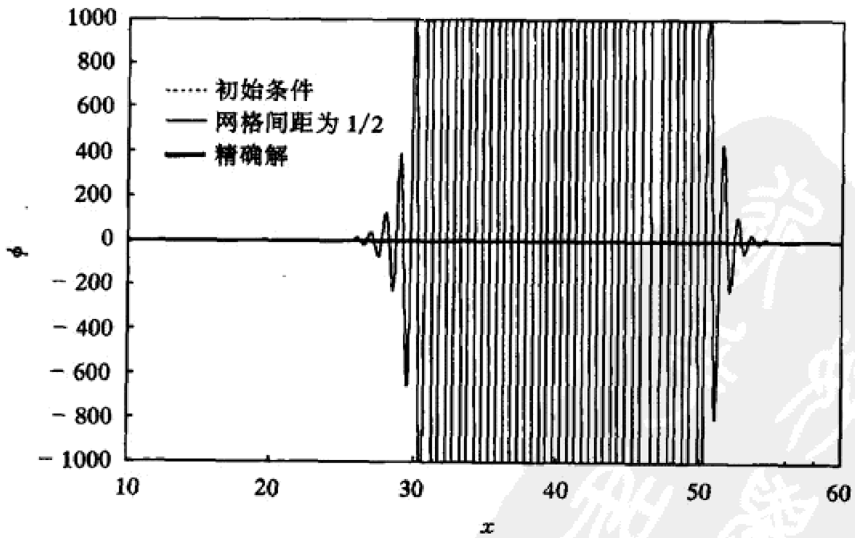


图 5.7　$\Delta t=1$，$\Delta x=1/2$ 条件下，ϕ 的时间演化

讨论： 采用显式欧拉方法对对流型方程求解，当时间步长 Δt 一定时，网格尺寸 Δx 对时间推进过程十分敏感．这个例子说明了 CFL 数对数值求解过程的重要影响．图 5.6 是在 $\Delta t=\Delta x$ 条件下得到的，尽管在数值计算过程中有一些跳动，但计算过程是相对稳定的．通过设定更小的时间步长，能够避免这些跳动的出现．但是，正如图 5.7 显示的那样，当 $\Delta t>\Delta x$ 时，随着时间的推进，数值求解过程明显是不稳定的．图 5.7 中的求解案例清楚地表明，当 $\Delta t>\Delta x$ 时，显式时间推进(time-marching)方法违反了 CFL 条件．

我们在此重点讨论了上述例子中的显式数值计算过程的稳定性问题．因为中间解对稳定性产生重要影响，因此显式时间推进过程为有条件稳定．而隐式时间推进过程通常则为无条件稳定．这是因为隐式推进在同一时间步长内计算值被不断代替，变量值被不断更新，而不是像显式那样简单地使用前一时间步骤的变量值．由于隐式具有固有稳定性，因此现在大多数商业 CFD 软件都采用隐式推进方法．然而，在方程组迭代过程中，程序的不稳定性并非由时间推进引起，而是由于方程组中诸变量不是同时求解，按顺序一个一个地求解而引起了求解的不稳定．为保证收敛，欠松弛因子的引入有助于提高方程组迭代求解的稳定性．下节中，将对此进行深入的讨论和讲解．

5.4 收　敛

5.4.1 何谓收敛

如果某一数值方法能满足相容性和稳定性这两个重要特性，我们通常会发现该数值方法是收敛的．数值求解过程的收敛可表述为：在相同的初始条件和边界条件下，当网格尺度不断减小时(网格收敛)，代数方程组的精确解逼近偏微分方程的精确解．对于用有限差分近似的线性偏微分方程初值(时间推进)问题，这里不加证明地给出 LAX 等价定理(LAX equivalence theorem)．这一等价定理表述为：给定初值问题和有限差分近似，收敛的充分必要条件为相容性和稳定性．也就是说，相容性＋稳定性＝收敛．我们还可以补充为，对于几乎所有 CFD 应用中的非线性偏微分方程计算问题，都可以使用这一定理，尽管这一结论并未得到直接的证明．

在大部分商用 CFD 软件中，代数方程组一般采用迭代方法求解，收敛应遵守三个重要原则．第一，当所有离散方程(连续性方程、动量方程、能量方程等)在每个节点处达到设定的误差时，离散方程即可被认为收敛．第二，随着迭代次数的增加，数值解不再变化．第三，总体的质量、动量、能量等标量均获得平衡．离散方程的不平衡量(误差)，通常称为代数方程组的残差(residuals)．它们在求解过程中被监测，当被监测的代数方程残差有上升趋势并超过某一限定值时，计算过程被强迫终止．在计算过程中，残差应不断减少，才能满足收敛条件．平衡量也可能增加，即残差值增大，此时，数值解被认为不稳定(发散)．我们注意到，迭代收敛不同于网格收敛．网格收敛是为了寻求与网格无关的逼近

精确解的数值解．我们将在后面对此作进一步的讨论．此外，在5.4.2节的数值求解过程中，将讨论残差和收敛误差的概念．

例5.6 对例5.4中描述的一维瞬态扩散方程，采用显式欧拉方法求解，时间步长取$\Delta t=1/100000$，网格间距取$\Delta x=1/100$，讨论在相同初始条件和边界条件下获得的数值解的收敛情况．热扩散系数α仍然设为常数，取值为0.5．

求解：变量ϕ瞬时变化的计算结果如图5.8所示．

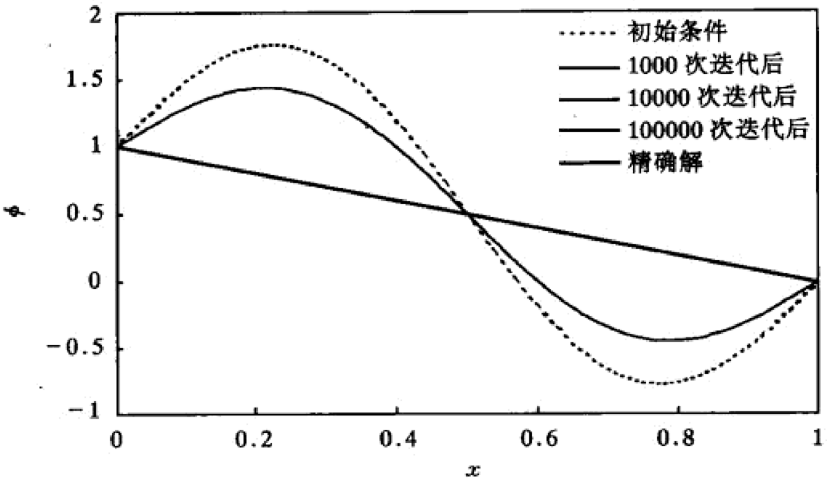


图5.8 $\Delta t=1/100000$，$\Delta x=1/100$时，变量ϕ的瞬时变化图

讨论：举这一简单例子来说明：相容性＋稳定性＝收敛．首先要考查稳定性，可以看出在数值计算过程中没有遇到不稳定的问题．再考查收敛问题，经过100000迭代，数值解收敛到精确解．由于离散方程和真实方程之间的差别可以忽略，因此截断误差很小，满足相容性．

5.4.2 残差和收敛条件

对任何输运变量ϕ，与4.3.3节中方程(4.63)、(4.64)相似，偏微分方程的离散可写成如下形式：

$$a_P\phi_p = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b_P. \tag{5.7}$$

在方程(5.7)中，中心点系数a_P和相邻点系数a_{nb}通常依赖于其他流场变量的值，包括随时间-空间变化的流体流动特性．在迭代过程中，这些系数被不断更新．在每一迭代步骤开始时，方程(5.7)两端将不再相等．因此，引入一个不平衡变量，叫做残差R_P，方程(5.7)重写为

$$R_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b_P - a_P\phi_p. \tag{5.8}$$

从上述方程中，我们将残差引入到输运方程组每一离散方程之中．对于适定(well-posed)方程，随着迭代次数的增加，残差将忽略不计．在CFD中，残差用来监视数值计

算过程，提示求解收敛或发散的趋势．我们注意到，在4.3.3中介绍的质量残差（mass residual)概念以及在例4.5中使用的残差概念与在此处定义的残差的概念是不同的．前者是压力修正方程中的一个源项，而后者属于方程(5.8)迭代过程中的不平衡量．

方程(5.8)中出现的残差实际上是描述单一单元体积在节点 P 处的不平衡量(误差)．实际上，被跟踪的是所有网格节点上局部残差 R_P 的总和，即整体残差 R，为

$$R = \sum_{\text{grid points}} |R_P|. \tag{5.9}$$

当整体残差 R 满足指定精度，即 $R \leqslant \varepsilon$ 或 $\sum_{\text{grid points}} |R_P| \leqslant \varepsilon$ 时，可认为离散方程(5.7)收敛．变量 ε 通常被称为代数方程组的收敛精度．如何选择合适的收敛精度，在这里给出一些实用建议．我们注意到，选择较小的收敛精度会大量增加迭代步数才能达到收敛．另一方面，选择较大的收敛精度会使迭代过程过早结束，此时代数方程的数值解可能过于粗糙或者并未充分收敛．通常，监测的残差通常是按数量级来设定的．一般说来，迭代过程中残差减少3个数量级至少表明为定性收敛(qualitative convergence)．此时，主要流动特性被认为是充分收敛的．然而，对于有些输运变量，比如能量和各个标量，则需要更严格的收敛标准．推荐能量残差收敛精度减小到 10^{-6}，而标量物质组分收敛精度可能只需减小到 10^{-5}，此时能量和标量分别获得收敛．对于定量收敛(quantitative convergence)，所有流场变量的变化都被监测．读者应明确，在这些残差被监测的过程中，要确保物性守恒．

例5.7 考虑两个静止平行平板(长 $L=0.5\text{m}$，间距 $H=0.1\text{m}$)间二维不可压缩层流流动的CFD算例．说明通过监测方程(5.8)中输运变量 u 和 v 的残差以及方程(4.80)中压力修正系数 p' 的代数形式的残差，来反映收敛过程．其中，工作流体为空气(密度 $\rho=1.2\text{kg/m}^3$，黏度 $\mu=4\times10^{-5}\text{kg/(m·s)}$)．入口速度定为 $u_{\text{in}}=0.01\text{m/s}$．出口和壁面边界条件与第2章中采用的相同．

求解： 流动示意图与例4.5完全相同．应用自编CFD程序中默认的迭代求解器求解动量和压力修正的离散方程．速度 u 和 v 以及压力修正 p' 的收敛历程如图5.9所示．每一输运变量的残差并不相同，数值模拟的收敛精度 ε 设为 10^{-7}．

讨论： 前面的例5.6中，是用显式方法描述和确定收敛的．而本例中，则用隐式方法描述收敛．速度 u，v 和压力 p' 的残差逐渐减小，数值解的适定性明显．当所有残差值都小于收敛精度 $\varepsilon=1\times10^{-7}$ 并满足方程(5.9)的条件时，即为收敛．然而，有些时候在模拟流道流动时会发生不收敛的情况．图5.10即为这种情况的典型表现形式：在迭代过程中残差增大的趋势导致残差值急剧增加．这一不适定变化趋势(ill-posed)(相对于适定变化趋势)的数值解是为了说明问题而特别设计的．上述情况是由于在控制数值计算时，采用了不正确的欠松弛因子造成的．下节中将进一步讨论通常在隐式方法中采用的欠松弛因子及其重要性．

5.4.3 收敛难点和欠松弛的使用

前面章节和本章讨论的管道流动的例子中，连续方程(压力修正)和速度分量的残差都

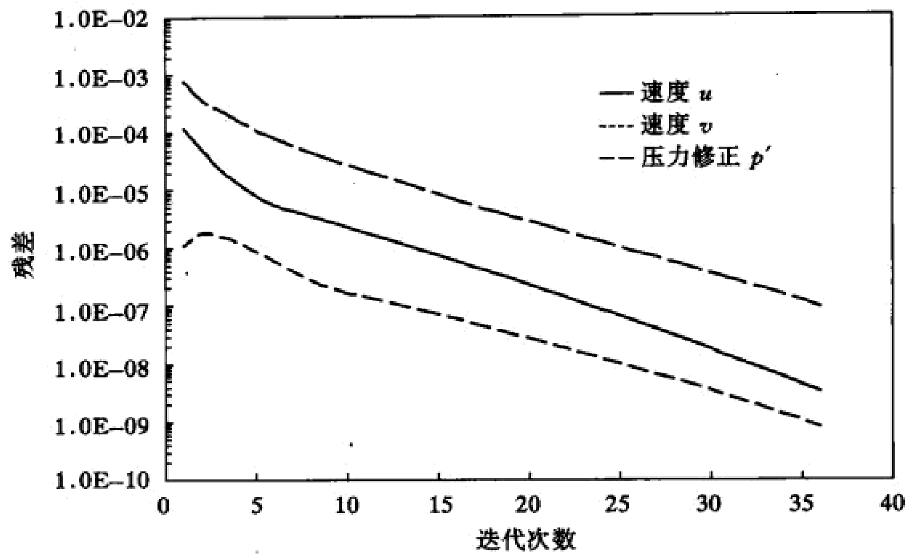


图 5.9 水平速度 u、垂直速度 v 以及压力修正 p' 的收敛历程

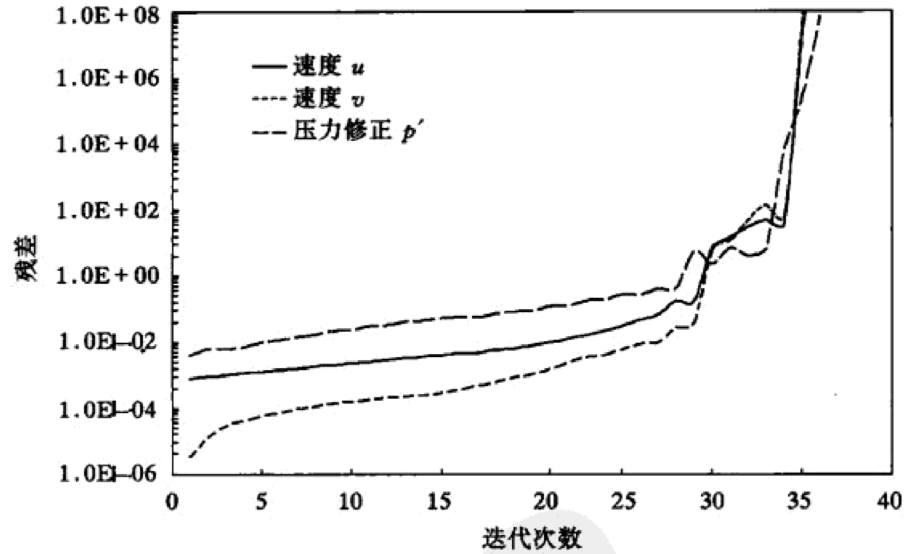


图 5.10 水平速度 u、垂直速度 v 以及压力修正 p' 的发散历程

是有用的指标，可以用于连续评估数值计算的收敛趋势．无论是对流动系统中节点处残差的局部跟踪还是对局部残差总和的整体跟踪，不断减少的残差值显示了收敛趋势，可以确保满足质量和动量守恒定律(见例 5.7)．由于这些守恒定律是对流体动力学的物理描述，因此要消除不平衡量．在某些流动情况下，局部解可能是已知的，因此可以直接将收敛解与已知解进行比较，进而对计算解进行校对和评估．在数值求解过程中，可以通过对某些物理量的评估来判断计算的收敛性．例如，空气流过机翼时，其牵引系数或升力系数是判断计算收敛性的指标，通过计算该系数就可以确定流动系统的收敛性，因此也可以确定计

算过程在何时终止.

在任何数值求解过程中，对离散方程的求解都可能发生数值求解的不稳定. 质量不好的网格，不适当的求解设置，不符合物理特性的边界条件以及选择了不正确的计算模型等，都是导致数值计算不收敛的典型原因. 不收敛通常表现在迭代过程中残差增加(发散)或者居高不下(见例 5.7). 残差的发散意味着守恒方程中不平衡量不断增加，这明显违反了流体流动的物理定律. 不收敛的计算结果会对 CFD 计算者产生误导.

然而，可以采用一些实用的修正步骤来克服上述困难以获得收敛. 对于劣质网格，可以增加网格节点的数量，对流动区域进行再划分. 对于长宽比过大或严重扭曲的网格，通常采用这种方法. 对于要求高阶近似的情况，在计算初期采用低阶近似是明智的选择. 数值计算过程中，低阶近似的扩散特性使得大的不平衡量迅速耗散，这有利于求解过程的稳定. 当流动求解建立起来之后，再换到高阶近似，获得较高的数值求解精度.

另一种改进收敛性的方法是使用欠松弛因子. 不良的初始流场假设或流动区域中存在未知大的梯度都可能导致迭代过程的发散. 将欠松弛因子引入到代数方程组中，通过限制迭代步骤之间每一输运变量的变化量来明显地减缓迭代过程. 引入欠松弛因子 α，在单元体中心节点处，相邻两次迭代步骤之间输运变量 ϕ 值的变化可描述如下：

$$\phi_P^{\mathrm{New}} = \phi_P^{\mathrm{Old}} + \alpha(\phi_P^{\mathrm{New}} - \phi_P^{\mathrm{Old}}). \tag{5.10}$$

在 CFD 中，非线性控制方程组的输运变量方程常常依赖于其他变量方程，例如，在浮力流动中温度影响到速度，欠松弛常常被引入到其中以稳定控制方程的数值计算. 方程(5.10)中的欠松弛因子 α 控制着迭代过程中输运变量 ϕ_P 的变化. 当指定欠松弛因子为 0.5 时，意味着前一次迭代到后一次迭代之间，ϕ_P 的变化量限定为 50%. 因此，当采用更小的欠松弛因子时，迭代过程中 ϕ_P 的变化将进一步受到限制. 例 5.7 中的数值求解，压力变化的欠松弛因子为 0.3，为 SIMPLE 算法(Ferziger 及 Peric′，1999)采用欠松弛因子的典型数值，以保证迭代过程的稳定和收敛.

在多数商业 CFD 软件中，欠松弛因子的默认设定通常适用于一般问题的求解. 在数值计算的初期，一般推荐使用默认的欠松弛因子. 然而，更可行的方法可能是通过采用更小的欠松弛因子来减少输运变量的变化，以保证收敛. CFD 用户在解决 CFD 问题时，常常会面对如何确定最优欠松弛因子(它们通常事先是未知的)的困扰. 最好的方法是从 CFD 实践和应用中学习设置适当的欠松弛因子.

5.4.4 加速收敛

下面探讨一些实用的加快数值求解收敛的方法. 对于大多数流动问题的处理，提供良好的初值或初始条件是必不可少的，这有利于迭代过程的收敛. 初值可以从类似的已知物理流动中获得或采用已有的收敛解作为初值. 不适当的初始条件通常会导致收敛减缓，甚至会产生发散. 好的初始条件能提高计算效率，减少计算资源消耗. 前节中，采用欠松弛因子来提高迭代过程的稳定性. 商业 CFD 程序中的欠松弛因子(或者 Courant 数)的默认

值通常适用于多种流动问题．不过，对于特定流动，可以增加欠松弛因子值(Courant 数)来加速收敛．然而，过高的欠松弛因子值会产生意想不到的不稳定问题．读者可能希望采用某一种方法，在不断增加欠松弛因子的过程中，存储中间结果．在进行随后的计算之前，可以周期性地采用该方法．这种方法可以使计算量保持最小化，更为重要的是不需要从初始状态重新计算该问题．在第 4 章中，描述了很多求解 CFD 问题中日益广泛应用的加速技术．在很多商业 CFD 软件中，为加速迭代过程的收敛，采用默认的多重网格求解方法．该方法采用 Jacobi、Gauss-Siedel、SIP 等迭代方法和直接解法，伴以不同粗细层次的网格间的循环(具体见 5.6 和 8.2.4 节)来求解代数方程组．用户可以根据不同的应用需要来改变多重网格的设置．通常，默认设置已经十分充分，不必再作改动．

5.5 计算精度

前述对收敛性、相容性和稳定性问题的讨论中已初步探讨了有限量，如时间步长 Δt 以及网格间距 Δx，Δy 和 Δz 趋于 0 时的求解情况．由于控制流动和能量交换的输运方程的离散形式总是在有限的网格中求得数值解，并且湍流对流动的影响通常采用近似理论模型，因此，得到的解总是近似的．所以，对应的计算精度是数值计算中重点考虑的另一个问题．

5.2 节中的相容性由截断误差直接显示出来．如前所述，截断误差是表示离散方程与原始偏微分方程之间的差别，它为偏微分方程求解计算精度提供了一个评估手段．如果网格间距足够小、初始边界条件和辅助边界条件足够平滑，那么截断误差的阶数与解的误差阶数应当一致．这通常意味着，对于充分细小的网格，高阶近似可以改进计算精度．与低阶近似相比，高阶近似通过细化网格常常会获得较高的计算精度．然而由于计算能力的限制，耗时的高阶格式未必能达到理想的精度．

对于有限网格上的特定算法，其计算精度评估的一种方法是将其应用到相关但相对简单的有精确解的问题当中．然而，计算精度通常与问题相关，某种算法对一种模型问题是精确的，但对另一种更复杂的问题就不一定是精确的了．评价计算精度的另一种可行方法是预先设定精度值，在不断细化的网格(网格收敛)上进行求解，直到解的变化量小于设定的精度值为止．这种方法假设：当微元减小时，近似解将收敛到精确解，最细网格上的近似解可以代替精确解；这样，就能得到独立于网格的解．假如能估计近似解的计算精度，那么如何改进方程的离散精度是需要考虑的一个重要问题．可以期待使用高阶近似或网格细化来获得更精确的解．当然，这样的选择必须综合考虑计算时间和计算效率．

读者必须意识到，收敛解不一定是精确解．这需要分析数值求解代数方程组时产生计算误差的根源，这个问题将在下节中讨论．如果想将这些误差减到最小，那么，必须进行一些系统的数值分析，如网格独立性以及数值模型的自身网格收敛以及精确解验证等．

5.5.1 计算误差源

读者不仅应该认识到数值求解中存在误差，而且必须弄清各种误差之间的区别．本节将说明应用 CFD 方法时可能遇到的误差源．因为流体流动和热传导问题的数值求解为近似求解，因此必然会产生计算误差．涉及数值求解的常见误差源可分为：

- 离散误差；
- 舍入误差；
- 迭代或收敛误差；
- 物理模型误差；
- 人为误差．

在详细介绍 CFD 中的这些误差源之前，我们希望读者能够清楚由《计算流体力学模拟验证指南》(AIAA，1998 年出版)一书中提出的误差(error)和不确切性(uncertainty)之间的差别．误差可定义为非认知缺乏引起的可预见性缺陷，而不确切性则可定义为由知识缺乏产生的潜在缺陷．尽管这种定义看起来有些咬文嚼字，但在下面的进一步探讨中，CFD 中的这些误差源将会变得清晰．

5.5.1.1 离散误差

该误差是由于模型方程的精确解与在有限时间步长和有限空间步长下获得的数值解之间的差别而产生的．这些误差的出现是因为无法获得求解方程的精确解，而只能用数值解来近似．对于相容代数方程的离散，当网格单元数量增加时，计算结果更接近于模型方程的精确解．然而，网格节点的密度和分布极大地影响着计算的结果．

我们可以鉴别以下两种离散误差：局部误差和累计误差．为了从概念上理解局部误差和累计误差，考查在特定网格节点处，以泰勒级数展开的输运变量 ϕ 对空间与时间微商的有限差分近似：

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j}}{\Delta x}+\underbrace{o(\Delta x)}_{\text{截断误差}} \qquad (\text{空间微商}), \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=\frac{\phi_{i,j}^{n+1}-\phi_{i,j}^{n}}{\Delta t}+\underbrace{o(\Delta t)}_{\text{截断误差}} \qquad (\text{时间微商}). \tag{5.12}$$

泰勒级数在方程(5.11)和(5.12)中终止展开产生的近似即是所谓的截断误差．

局部误差与单一迭代步骤相关，据此可对算法精度进行评估．对此误差，数值计算精度主要涉及空间微商的近似．对于瞬时问题，解的精度集中在输运变量 ϕ 随时间的变化上，这通常由累计误差描述．图 5.11 对局部误差和累计误差进行了描述．从图中可见，瞬变问题中网格尺寸或时间步长越小，累计误差就越小，因此，近似解的精度就越高．

我们通过下面的选例来说明离散误差的意义．

例 5.8 考查瞬态一维对流型方程，进一步说明离散误差的概念．这里对空间微商采

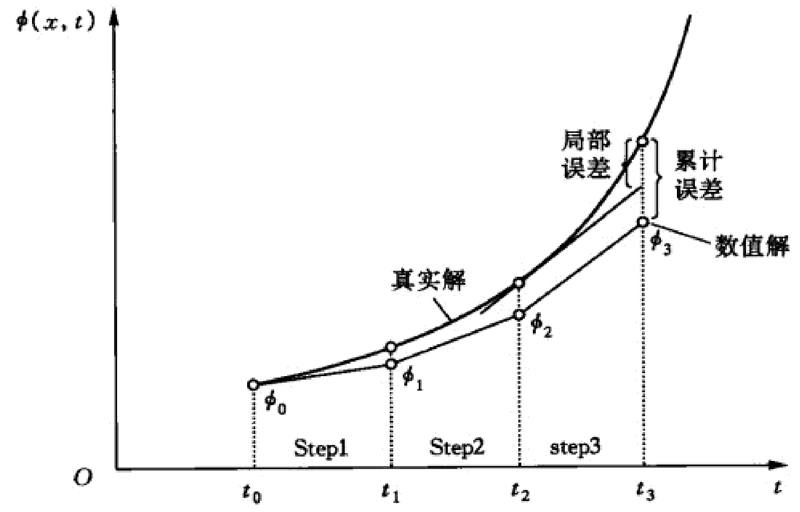


图 5.11 特定网格节点上有限差分方法引起的局部和累计离散误差

用四阶中心差分以获得更高的精度，通过时间微商的一阶和二阶近似获得数值解．固定时间步长 $\Delta t=1/128$，改变网格步长 $\Delta x=1$ 和 $\Delta x=1/2$，使用欧拉显式方法证明其离散误差.

求解：通过沿 x 方向增加网格节点，应用泰勒级数展开，得到如下四阶有限差分近似：

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{-\phi_{i+2}+8\phi_{i+1}-8\phi_{i-1}+\phi_{i-2}}{12\Delta x}+\underbrace{o(\Delta x^4)}_{\text{截断误差}}.$$

将上述近似表达式与对时间微商的一阶向前差分联立，得到如下代数方程：

$$\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^n}{\Delta t}-u\cdot\frac{-\phi_{i+2}+8\phi_{i+1}-8\phi_{i-1}+\phi_{i-2}}{12\Delta x}=0.$$

采用二阶中心差分对时间微商进行二阶近似，可得

$$\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^{n-1}}{2\Delta t}-u\cdot\frac{-\phi_{i+2}+8\phi_{i+1}-8\phi_{i-1}+\phi_{i-2}}{12\Delta x}=0.$$

上述方程与著名的 Leap Frog 方法相似.

两种不同网格尺寸一阶和二阶时间近似计算结果与精确解的比较见图 5.12 和图 5.13.

讨论：在网格尺寸 $\Delta x=1$ 条件下，时间导数的差分从一阶增加到二阶，我们发现，二阶差分格式随时间推进可抑制数值计算结果的震荡，对时间推进不敏感(试比较图 5.12 与图 5.13 中的计算结果)．而通过减半网格尺寸至 $\Delta x=1/2$，数值求解是稳定的．二阶时间微商的数值解可收敛到精确解，但一阶时间微商的数值解仍然围绕着精确解曲线周围震荡，并且远未达到收敛状态．本例表明了减小网格尺寸以及对时间微商采用高阶近似可减少局部和累计离散误差.

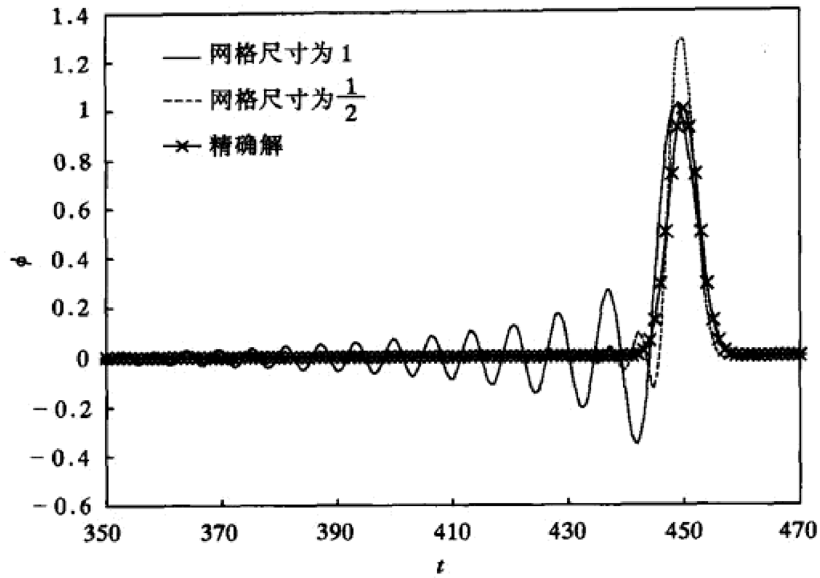


图 5.12 时间步长 $\Delta t = 1/128$，网格尺寸 $\Delta x = 1$ 和 $\Delta x = 1/2$，对流型方程四阶网格近似、一阶时间近似输运变量 ϕ 随时间的变化

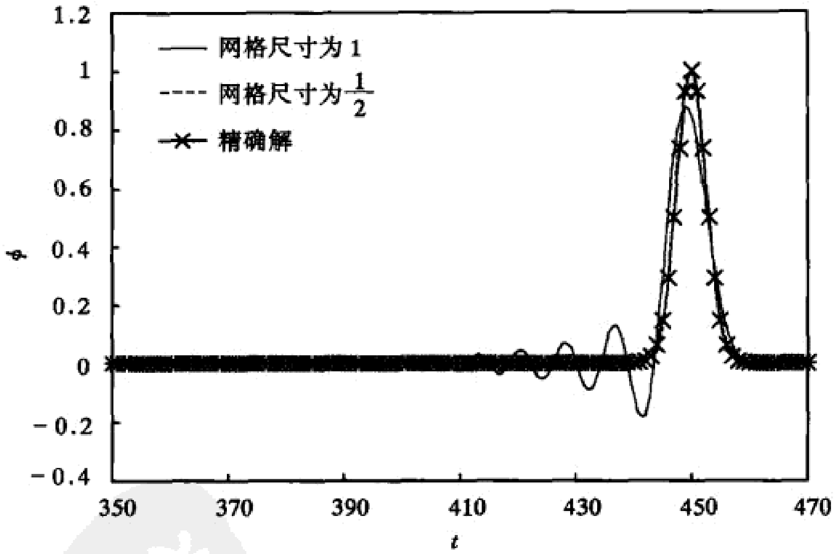


图 5.13 时间步长 $\Delta t = 1/128$，网格尺寸 $\Delta x = 1$ 和 $\Delta x = 1/2$，对流型方程四阶网格近似、二阶时间近似输运变量 ϕ 随时间的变化

5.5.1.2 舍入误差

这种误差是由计算机计算精度与变量真值之间的差别而产生的．因为每台计算机都有一定的有效数字位数．大多数计算机的默认有效数字为 7 位，即通常的单精度计算机．双精度计算机的计算精度为 15 位有效数字．由于计算机存储字节的限制而引起的误差称为

舍入误差．该误差实际上是随机的，因而不易预测．它与计算数字、舍入方法、舍入类型甚至与计算的顺序有关．

考查计算机上一简单单精度算术运算的例子．给定 $a=8888888$，$b=-8888887$ 和 $c=0.3333341$，求 $D=a+b+c$ 和 $E=a+c+b$ 的值．D 的算术运算过程为

$$
\begin{aligned}
D &= 8888888-8888887+0.3333341 \\
&= 1+0.3333341 \\
&= 1.333334 \quad \text{（正确解）},
\end{aligned}
$$

而 E 的运算过程为

$$
\begin{aligned}
E &= 8888888+0.3333341-8888887 \\
&= 8888888-8888887 \\
&= 1.000000 \quad \text{（误差为 25\%）}.
\end{aligned}
$$

在代数学中，我们知道，$a+b+c=a+c+b$ 是被数学证明的命题，但在计算机上运行时，正如上面的例子说明的那样，就并不一定是正确的．我们注意到，单精度计算机上进行的计算，由于计算顺序不同，两步产生的计算误差就达到 25%．试想，成千上万连续不断的运算，舍入误差会积累起来，在没有任何预先警示信号的前提下，会产生严重的计算误差．如果怀疑计算机舍入误差造成较大的计算误差，那么应使用双精度或具有更高浮点数精度的计算机进行运行测试．通过不断细化网格使时空步长不断减小或许是可行的，但对于复杂的运算，有时是不可能的．我们注意到，与离散误差相比，舍入误差在求解误差源中一般并不是主要的因素．有关 CFD 问题中的舍入误差，将在 5.7.1 节的研究实例中详细说明．

5.5.1.3 迭代或收敛误差

这种误差是由于有限数量网格节点上的完全收敛解与未完全收敛解之间存在差别而产生的．大多数商业 CFD 软件采用迭代方法求解离散方程组的稳态解．如果要求某一时间步骤的准确中间解，那么可采用瞬态迭代法．我们希望在迭代过程中得到的解逐渐接近精确解，并且在每一局部网格单元及整个求解区域上满足给定的边界条件和控制方程．如果迭代过程提前结束，那么就会产生较大的误差．因此，收敛误差可能因为下述两个原因而产生：设置的迭代次数太少，导致求解算法未能完全达到最终的收敛解；或是采用的收敛精度过于粗糙，在 CFD 解远未达到稳定收敛时就结束了迭代过程．

5.5.1.4 物理模型误差

这种误差是由于数学模型的不确切性以及模型简化造成的．在此，我们对上述的不确切性进行进一步的定义．Navier-Stokes 方程可认为是精确的，而对于大多数工程感兴趣的流动，因为缺乏足够的建模知识，对其精确求解是不可能的．在物理建模中，不确切源为：

(1) 流动现象并未完全理解；

(2) 模型中采用的参数有一定程度的不确切性；

(3) 由于模型的简化而产生不确切性；

(4) 模型的实验验证是不可能的或者是不完全的.

对于湍流，常常需要建模，如果对流动直接模拟的话，需要大量的计算资源. 其他物理过程如燃烧、多相流动、化学过程等现象，很难实现精确描述，需要引入近似模型. 牛顿(Newton)定律和傅里叶(Fourier)定律本身也是来自对多种流动实验观察的一种模型. 此外，尽管采用的数学模型接近精确，但某些流体物性参数可能并不精确. 这些参数与温度、浓度，可能还与压力等密切相关，忽略这种依赖关系将会产生模型误差(例如，用Boussinesq波代替自然对流). 在有些时候，即使可以较确切地描述某一物理过程，但为了提高计算效率，在CFD程序中可能也会采用一些简化模型. 可以通过针对特定模型的验证研究，来检测和确认物理模型的误差. 关于模型检验的概念和定义，将在5.5.3节中详细介绍.

5.5.1.5 人为误差

与人为误差相关的误差主要有两种. 一是计算机程序误差，包括直接由编程者造成的编程中的错误，这是程序员的直接责任. 这些错误可以通过子程序和整个程序的调试、检验运行得到的结果以及检查插入程序来去除. 我们将在5.5.3节中讨论误差检验的概念. 二是由于程序中使用不精确或不适当的方法造成的错误. 由于缺乏使用CFD软件的经验，会出现采用错误的计算域(比如不正确的几何结构或网格生成方法)或不恰当的边界条件等问题. 选择不恰当的数值格式或计算模型来模拟特定流动问题时，会产生意想不到的错误. 读者应该注意到，随着CFD中选择项的增多，出现使用错误的可能性也在增加. 当然，通过适当的训练、分析和经验积累，使用错误能够控制在最小程度之内. 在下一章中，我们将给出一些实用的指导意见.

5.5.2 计算误差的控制

在工程实践中应用数值方法时，CFD使用者最好要检查任何可能存在的问题. 数值计算误差主要是离散误差和舍入误差. 这些误差在计算过程中有逐渐累积的趋势，因而可能会产生不符合物理意义的CFD结果. 那些整体上看来相当合理的计算结果，事后可能发现在流动域中的特定位置上存在相当大的误差. 因此，计算误差的控制是获得可靠和有意义CFD结果的重要环节.

我们现在把注意力集中在数值计算产生的离散误差和舍入误差的大小上. 当网格尺寸或时间步长减小时，从图5.14中可见，离散误差随步长尺寸减少而减少，而舍入误差反而随步长尺寸减少而增加. 离散误差和舍入误差之和的总误差显示，持续减少步长尺寸并不意味着能获得更精确的计算结果. 事实恰好相反，在很小的步长尺寸处，因为舍入误差的快速增加，计算精度反而下降. 因此，为了抑制这一误差，我们应避免对非常小的数字进行大量计算.

实际上，我们不能确定数值方法中包含误差的大小．从上述分析可以看出，离开对舍入误差的正确估计，单独的离散误差分析就失去了意义．为更好地评估计算结果的精度，这里推荐一些实用的方法．

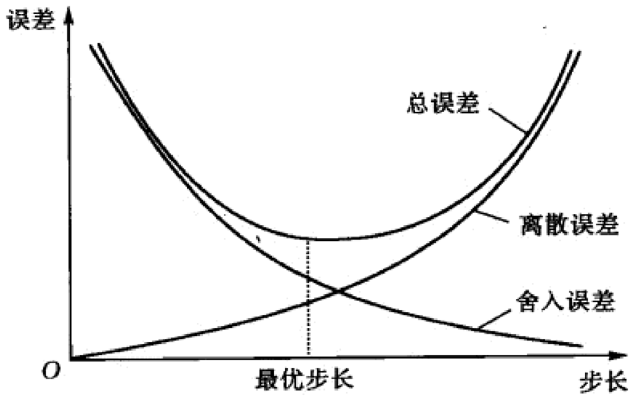


图 5.14　网格尺寸和/或时间步长与离散误差、舍入误差、总误差的函数关系

首先，要探索网格独立性．我们可以基于已有的经验，选择合理的网格尺寸 Δx，Δy 和 Δz(瞬时问题要选择合理的时间步长 Δt)，开始求解流动问题．计算结果看起来可能相当不错，但我们假设在每个方向上将网格尺寸减半，即网格尺寸为 $\Delta x/2$，$\Delta y/2$ 和 $\Delta z/2$，网格节点增加 8 倍后(三维问题)再次计算．如果计算结果与最初的网格下得到的结果没有显著的变化，那么我们能确定离散误差处在可接受的水平上．如果输运变量的值与第二次计算的结果差距很大，那么数值解就是网格节点数量的函数．在所有实际算例中，网格需要通过增加节点数目得到细化，直至数值解没有明显变化为止．这表明离散误差被减少到可接受的程度，数值解与网格大小无关．这一问题将在 5.7.1 节的算例中进一步研究．

其次，CFD 的主要计算通常在单精度计算机上运行，以避免占用过多的计算资源．然而，如果发现舍入误差明显存在，则在保持网格尺寸(以及瞬态问题的时间步长)不变的情况下，可以使用双精度对流动问题重新进行计算．如果计算结果无明显变化，我们则认为在 CFD 求解中不存在舍入误差问题．如果计算结果的变化超出预期，我们可以尝试通过增加网格尺寸或者改变求解精度的阶数，如采用高阶近似粗网格来估计对流项的一阶空间微商和/或守恒方程中的一阶时间微商，减少总的计算量．从图 5.14 中可见，离散误差随网格尺寸的增加而增加，因此，读者应该认识到这一重要的变化趋势，并且寻求某种合理的折中．

第三，选择合适的湍流模型或其他近似模型，特别是尝试将物理模型误差最小化是一项艰难的任务．由于模型控制特定流动并与流动的物理特性密切相关，因此要使模型既能充分描述物理流动问题，又做到尽量简化也不是一件容易的事情．此外，CFD 中几何建模和边界条件选择的粗心大意经常会出现人为误差．在下一章中，将讨论消除这些问题的实用方法．

5.5.3　数值求解的检查和验证

除误差之外，计算的不确切性随数值模拟的运行也会发生．这可能是由于不正确的物理模型所致，例如对现象的错误理解而采用的错误假设或对控制流体动力学参数的错误近似和简化等．为获得可信的 CFD 计算结果，需要对模拟计算中的模型以及数值计算的不

确切性进行仔细的分析和量化．检查和验证过程是对固有误差和不确切性的量化并对CFD解进行评估．

数值求解的检查和验证具有完全不同的定义．尽管在定义细节上尚未达成共识，但在使用时有一些共同标准．本书关注那些不能忽略或常常被忽视的数值误差和不确切性．

需要明确的是数值求解的检查和验证应用在截然不同的方面．下面我们来说明检查和验证的差别．检查(verification)可定义为：对数值模拟不确切性的评估过程，当条件许可时，估计误差的正负、大小以及误差评估的不确切性．这一过程主要涉及几何参数的输入、初始条件和边界条件的确定．这些输入参数需要仔细检查和系统分析．对空间步长、时间步长敏感性的研究也很重要，看看空间步长是否不够小，时间步长是否太大，迭代步骤是否太少，或者计算程序是否有误等，以便对误差进行限制．这些都与原始偏微分方程采用的离散近似有关．而验证(validation)可定义为：通过标准实验数据来评估数值模型不确切性的过程，当条件许可时，评估模型本身误差的正负和大小．简单地说，就是在一定的物理条件下比较CFD计算结果和实验数据，确认数值计算是否正确．该过程是评估模型应用可行性的最后阶段，也是确认计算模型与所模拟的真实物理流动问题之间一致性的一个阶段．

我们会在5.7节的例子中进一步阐述数值求解的检查和验证．

5.6 求解效率

计算机硬件和计算资源的快速发展以及成本的迅速下降，给CFD的应用带来了革命．当今的CFD用户拥有很多机会使用商业和共享的计算机程序．由于可以构建高质量网格来求解物理流动的结构，因此，CFD能够解决越来越多复杂的工程问题．这些流动问题通常需要在整个计算区域内划分足够多的网格节点，才能获得足够精确的解．如果网格要进一步细化，那么几乎所有迭代求解方法的收敛速度都会下降．收敛的速度依赖于特定的数值方法，很多方法的迭代次数与每一坐标方向上的网格节点数目成正比．这一特性是基于迭代过程信息要穿过计算域往复传递多次，网格越多，需要传递的次数就越多．

为克服收敛过程中的这一问题，多重网格方法得到了前所未有的广泛重视以提高CFD求解效率．在第4章中，我们注意到多重网格使用了多层网格，在最简单的例子中，粗网格只是细网格的子集．在第4章中讨论的SIMPLE方法等是求解泊松(Poisson)类压力或修正方程的理想方法．多重网格方法处于传递变量的中心，从精细网格到粗糙网格通常称为约束(restriction)，从粗糙网格到精细网格称为延伸(prolongation)．最简单的多重网格方法为如图5.15所示的V型循环五重网格（细节见第8.2.4节及其中给出的参考文献)．其他循环(如W型循环)也可用于粗糙网格与精细网格之间的循环．采用V-W组合或其他组合形式，实现从一个网格到另一个网格的转换，可能会提高求解效率．参数的优化选择随问题而定，但对多重网格计算的影响就不像对单一网格方法的影响那么大．

提高计算效率的另一个方法是并行计算．单处理器计算机的计算能力几乎达到了顶峰．目前，要进一步提高计算机运算速度，就需要多处理器，即并行计算机．与传统的向量超级计算机相比，并行计算机的优点之一是计算规模易于扩大．并行计算机采用标准处理芯片，因此易于获得廉价的高性能计算机．商业上可以实现的并行计算机可具有上千个处理器，数十亿字节的内存，浮点计算能力按十亿计．并行计算的基本思想包括将计算域划分成若干子域，再将每个子域分配给一个处理器进行处理．这样，同一个计算程序可以在所有处理器中运行．由于每一个处理器都需要其他计算子域中的数据，因此，处理器间的数据交换和交叉存储是必不可少的．这说明，并行计算环境要求对算法重新设计．所以，好的并行运算需要对求解方法进行修正．

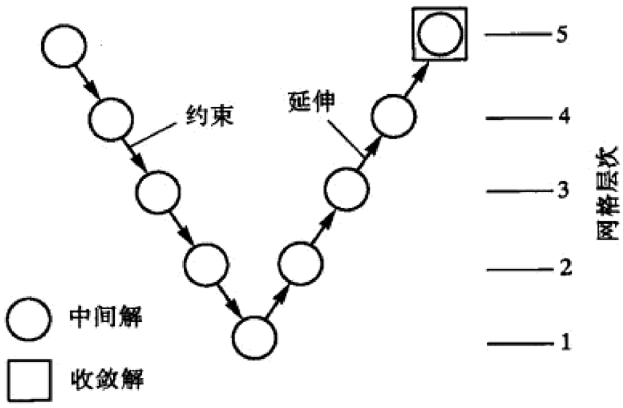


图 5.15 使用 V 型循环的多重网格方法示意图

因为所有运算器的运算都基于前面时间步长得到的数据，因此，对于并行计算，显式推进方法相对容易，只需要确保在每一迭代步骤进行之后，完成相邻子域交界处数据的交换即可．一个和多个处理器中运行的顺序和结果都是相同的．当然，对 Poisson 型压力方程的求解仍然是一个难题．对并行运算，隐式推进方法更为困难，其原因在于，在串行计算中，有用的迭代方法并不适用于并行运算．有些处理器能够并行运算，并且能像在单一处理器上一样按照相同的计算顺序进行运算．然而，这些算法效率低下，而且子域间通讯量所造成的额外计算量异常庞大．

对于隐式推进方法的并行运算，一种可行的方式是数据并行或对计算区域进行子域分解．对稳态流动问题，空间域的分解是为获得最大的计算效率．将求解区域分成许多子域，为每个处理器分配相同的计算工作量．通用的方法是将中心系数 a_P 和邻近系数 a_{nb} 组成的整体系数矩阵分解为一个个对角块矩阵．每一个对角块矩阵分配到一个处理器中，计算数据在两个通讯层之间传递．相邻块信息在处理器之间进行局部通讯，主处理器进行整体通讯，获得来自所有块的信息，同时将有关信息反馈到各个处理器中．对于瞬态流动问题，计算域的空间划分也均等地应用到时间上．对于多重网格方法和并行计算技术的更多内容，有兴趣的读者可参见 8.2.4 节和 8.2.5 节以及该节给出的参考文献．

5.7 实例研究

本节中选择的研究实例是为了说明计算求解中的相容性、稳定性、收敛性以及计算精度．这些例子将分别显示流动中的两个或三个误差：离散误差(截断误差)、迭代或收敛误

差(网格收敛)以及物理模型误差(包括边界条件、几何模型以及湍流模型等CFD模型的不确切性). 算例还包括与解析解以及实验数据的比较，即求解的检查与验证. 应注意本节使用特定计算程序求解的算例并不表明对这些程序的认可或接受. 同样，对这一算例未用到的其他程序，也不说明它们对这一特定应用是不适合的.

5.7.1 例1：管道内流动

本算例是用自编有限体积CFD计算程序计算的.

模型描述：研究问题为先前曾用到的例子，即两平行平板间二维层流流动. 本例中，流道高 $H=0.1\text{m}$，长 $L=1.0\text{m}$，工作流体为空气.

网格：在网格上离散控制方程. 速度和压力同图4.12设定. 沿通道高度和长度方向上生成均匀网格. 控制体划分为5×10，10×20以及20×40个网格进行网格独立性检验.

模拟特性描述：数值模拟基于有限体积方法离散. Navier-Stokes方程的求解算法采用隐式压力-速度耦合方程，如SIMPLE算法. 通过自编CFD程序的默认迭代求解器求解压力修正Poisson方程. 为克服压力场的非物理振荡以及难于获得收敛解等困难，采用了Rhie和Chow(1983)提出的插值方法.

流体为不可压缩流体，其密度和黏度分别为 1.2kg/m^3 和 $4\times10^{-5}\text{kg/(m·s)}$. 入口速度定为 0.01m/s，基于该入口速度和流道高度，对应的雷诺数为30[见第3章方程(3.30)].

计算结果：如例5.7所证明的那样，随着迭代次数的增加，残差不断减小，获得稳定的收敛解. 对于控制体5×10的粗糙网格、10×20的中等网格以及20 ×40的精细网格，残差的减小趋势都显示出预期的稳定性和收敛性. 三种网格都获得收敛解，图5.16显示了精细网格所获得的残差. 当所有的速度残差、压力修正残差和质量残差均小于设定的收敛精度 $\varepsilon=1\times10^{-7}$ 时，三种网格数值计算结束. 由于压力修正残差与质量残差是相同的，所以图5.16中只显示质量残差.

数值解再次验证例3.4中得到的精确解. 回顾第3章中方程(3.26)，在 $-H/2\leqslant y\leqslant H/2$ 范围内，水平速度由下式确定：

$$u(y)=\frac{3}{2}U_{\text{m}}\left[1-\frac{y^2}{(H/2)^2}\right].$$

式中，U_{m} 为平均速度，与均匀入口速度 $u_{\text{in}}=0.01\text{m/s}$ 对应. 图5.17为三种网格数值解与充分发展流域内解析解的比较. 通过这种参数研究，可以基本上说明空间离散对求解误差的控制. 网格的细化使近似解更趋近于精确解. 由于截断误差随网格的增加而减少，故相容性得到满足. 表5.1给出了四种不同网格条件下最大水平速度的数值解与解析解以及相应的计算误差. 结果表明，网格划分为20×40和40×80个控制体体积的数值解获得了精确的结果. 流道划分40×80个控制体体积与划分20×40个控制体体积所获得的近似解相同，可见，流道超过40×80个控制体体积时，解不依赖于网格，网格独立性得到确认.

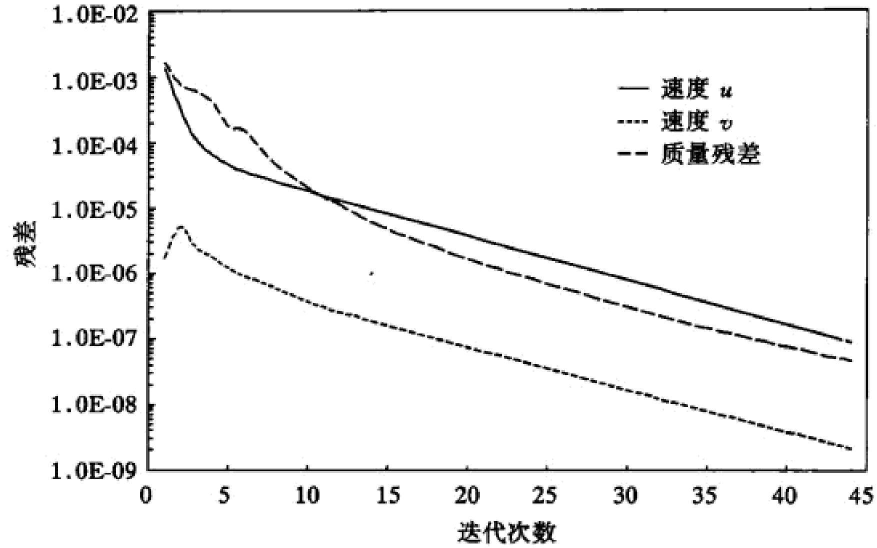


图 5.16 精细网格分布条件下水平速度、垂直速度以及质量残差的收敛历程

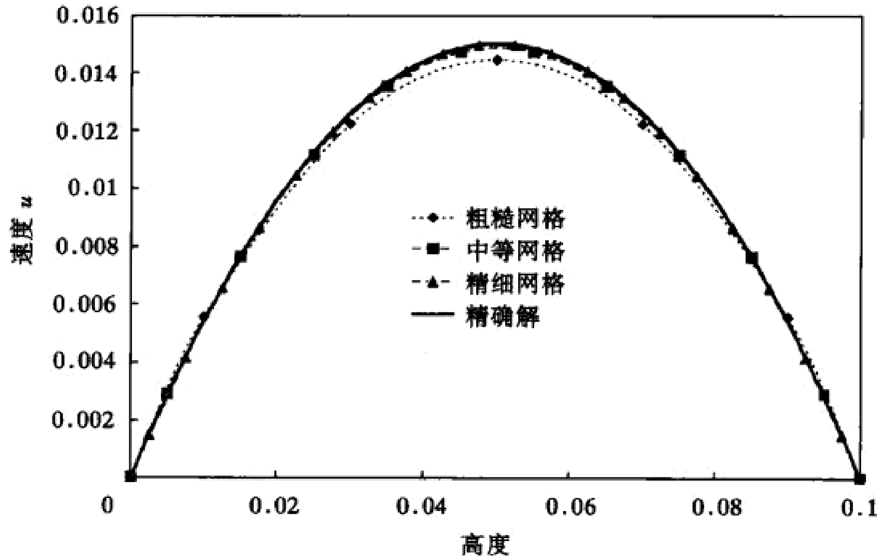


图 5.17 三种不同网格分布的数值解和解析解在充分发展区域内的速度变化

如表 5.1 所示，即使网格进一步细化，即控制体从 20×40 个增加到 40×80 个，但求解误差已经稳定，其中，求解误差低于 1%．由于计算过程中存在舍入误差，因此数值解的误差不可能完全消除．该舍入误差是由于数值计算中单精度设置而引起的．由图 5.14 可知，进一步细化网格可能会导致舍入误差的增加．减少舍入误差的有效方法是在运算过程中采用双精度来增加运算的有效数字，但设置双精度会带来额外的计算量．实际上，为获得数值计算的快速求解，通常需要对求解精度作某些折中，对复杂流动问题的求解更是如此．

表 5.1　　不同网格分布最大速度的预测解和解析解以及计算误差

网格	预测的最大速度 u	解析的最大速度 u	误差 $=(u_{解析解}-u_{数值解})/u_{解析解}\times100\%$
5×10	0.01444	0.015	3.73
10×20	0.01472	0.015	1.87
20×40	0.01496	0.015	0.27
40×80	0.01496	0.015	0.27

结论：本例中对二维通道流动问题，简单阐明了相容性、稳定性、收敛性以及计算精度等概念．通过评估离散误差或截断误差来研究数值求解的误差情况．网格划分的增加证明了两个重要结果：第一，当空间离散误差变小时，可以得到独立于网格的计算结果；第二，近似解与解析解之间极好的一致性证明了所采用的数值计算方法能够提供可信的数值解．

5.7.2　例 2：90°弯管内的流动

本算例采用商业有限体积 CFD 软件 ANSYS-FLUENT 6.1 计算．

模型描述：本算例为流经 90°弯管三维湍流流动问题．图 5.18 为实验装置的示意图，为一开循环 90°弯管引风系统，其水平管长 3.5m，半径比为 1.5，垂直管长 1.8m．空气流过 10mm 厚的有机玻璃正方形截面管，通过变频控制器调节气流速度 U_b．应用流动显示和激光多普勒风速仪(LDA)系统在实验装置上测量得到实验数据．

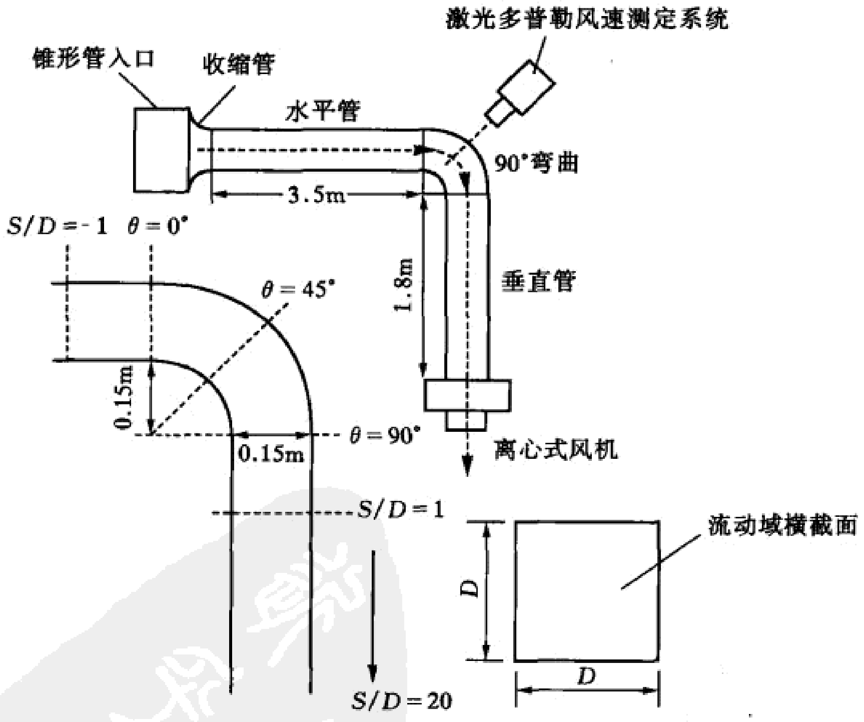


图 5.18　90°弯管实验装置示意图

网格划分：对于 90°正方形截面弯管，计算域从距离弯管入口上游 2D 处到弯管出口

下游 20D 止，D 为弯管截面宽度．在整个计算流域内，沿流动方向、宽度方向和高度方向都采用结构化网格，共生成 325×43×41 个控制体．

模拟特性描述：采用标准 k-ε 模型(Launder 和 Spalding，1974)以及雷诺应力模型(Launder 等，1975；Launder，1989)计算 90°弯管内的分离流动，并通过计算结果和实验数据的比较来验证数值计算，说明选择湍流模型的重要性．

采用基于速度-压力隐式耦合关系的 SIMPLE 算法求解 Navier-Stokes 方程．由默认迭代求解器(在 ANSYS-FLUENT 软件中一般为多重网格求解器)来求解压力修正 Poisson 方程．控制方程由有限体积离散近似．为避免出现压力场非物理性振荡及同位网格布置收敛困难，采用 Rhie 和 Chow(1983)提出的插值方法．

在模拟计算中，计算程序中采用的工作流体为空气，视为不可压缩流体，并采用该商用软件默认的初始条件．

边界条件：在入口处，所有变量采用 Dirichlet 条件．来流速度 U_b 为常量，其值为 10 m/s．空气的密度和黏度分别为 1.2kg/m^3 和 2×10^{-5}kg/(m·s)，与入口速度和管道高度对应的雷诺数为 90000．湍动能 k 及耗散率 ε 由实测的湍流强度 I(在管道横截面积中心处约为 1%)决定．对于雷诺应力，对角线上元素取 $2/3k$，非对角线上元素置为 0(假设为各向同性湍流)．在出口处，对所有输运变量均采用 Neumann 边界条件．对于空气流动，固体壁面处采用非平衡壁面函数(non-equilibrium wall function)(将在下章中介绍)，因为该函数能更好地处理压力梯度急剧变化处的流动分离、再附着以及冲击等复杂的流动问题．

计算结果：弯管出口($\theta=90°$)和距弯管出口 0.5D 处空气纵向平均速度与来流速度比值的实验数据和计算结果见图 5.19．采用雷诺应力模型预测的流动速度比采用标准 k-ε 模型的预测结果更符合实际，这是因为雷诺应力模型具有对 90°弯管分离流动区域的各向异性行为的捕获能力．

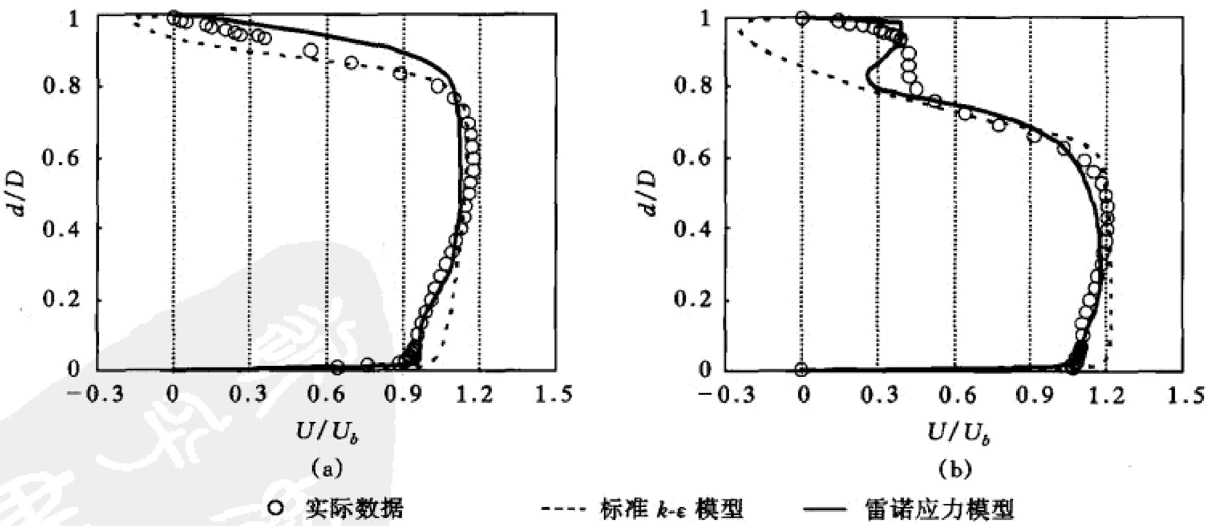


图 5.19 测量与计算得到的纵向平均速度/U_b 的比较

(a) 弯管出口处($\theta=90°$)的速度分布；(b) 距弯管出口 0.5D 处的速度分布(具体描述见图 5.18)

应用雷诺应力模型，对管道中心平面上不同位置处纵向平均速度进行了计算，并与实测数据进行比较，见图 5.20. 在弯管入口处($\theta=0°$)，湍流模型成功地预测到空气在近内壁处的加速流动，也捕捉到了贴近管道外壁的由于负压力梯度引起的流动减速. 更为重要的是，湍流模型在弯管入口之后的 $\theta=30°$，$\theta=45°$和 $\theta=60°$处，充分再现了纵向速度扭曲变化的速度分布.

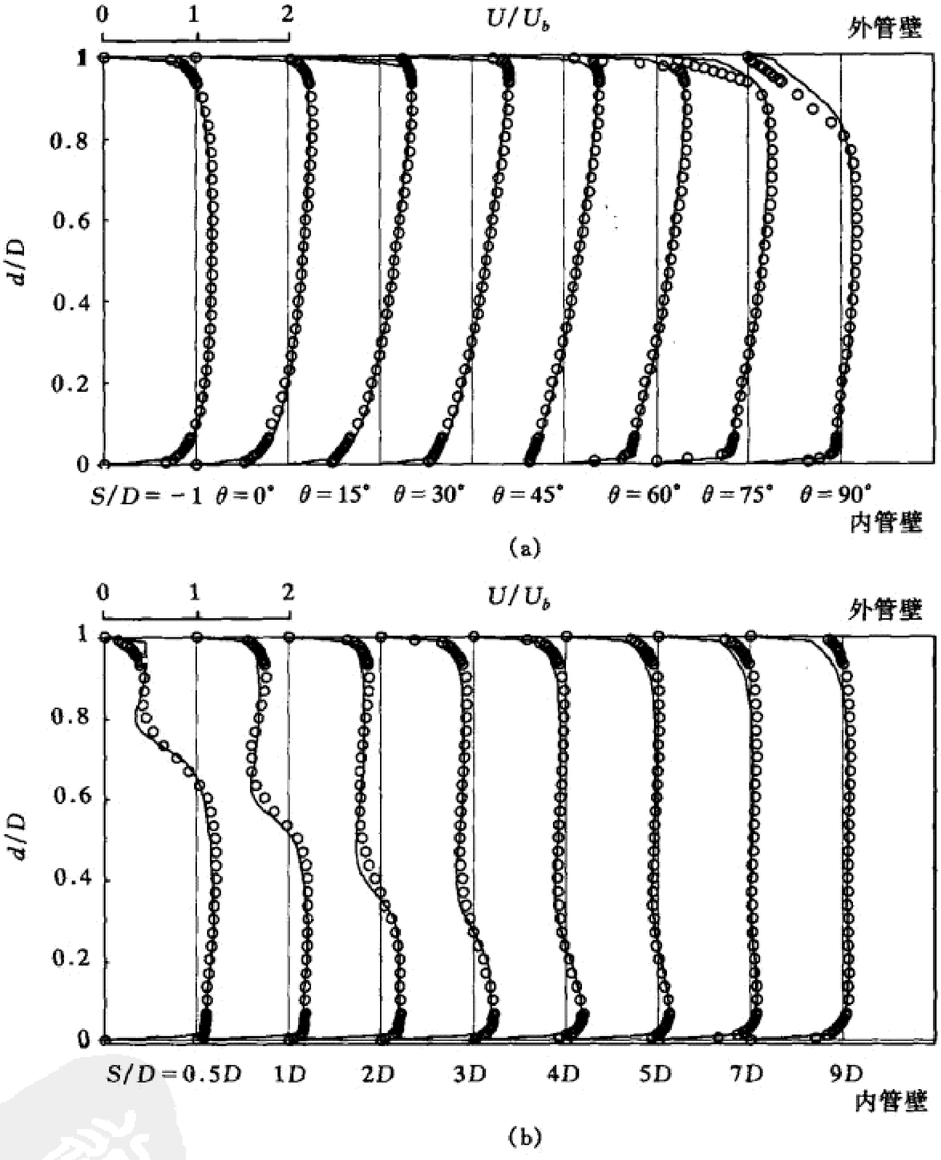


图 5.20　管道中心平面不同位置上测量和计算得到的纵向平均速度/U_b 的比较

(a) 弯管入口和出口之间不同位置上的速度分布；

(b) 弯管出口下游不同位置上的速度分布(具体描述见图 5.18)

为了更清楚地表现 90°弯管中的流动特征，图 5.21 中显示了雷诺应力模型获得的管

道不同横截面上空气流动的速度矢量和压力分布．图 5.21(a)和(b)显示了管道中间平面上空气流动速度矢量和压力分布．在弯管入口处，近内壁处压力梯度为正，近外壁处压力梯度为负．正负压力梯度的出现是由弯管处重力和径向压力梯度引起的(Humphrey 等，1981)．这一物理现象是弯曲管道流动的典型现象．穿过流线的径向压力梯度直接产生了二次流(Secondary flows)．图 5.21(c)、(d)和(e)分别描述了 $\theta=45°$，$\theta=90°$以及弯管出口后 $3D(S/D=3)$三个位置正方形横截面上预测到的二次流矢量．

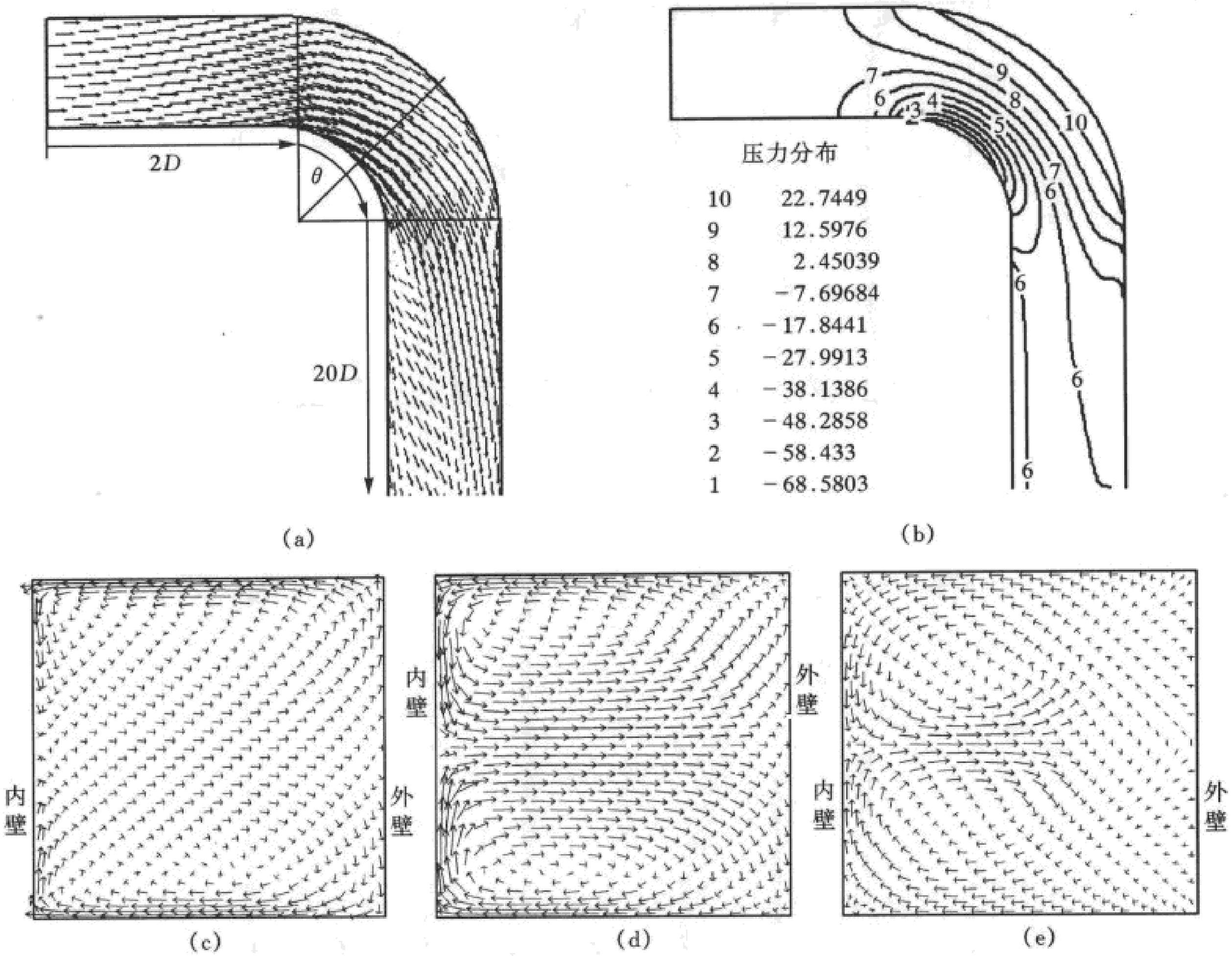


图 5.21　计算流场

(a) 管道中间平面上的空气流动；(b) 管道中间平面上的静压力分布；
(c) 流动区域 $\theta=45°$处横截面上的二次流；(d) 流动区域 $\theta=90°$(弯管出口)处横截面上的二次流；
(e) 流动区域管出口 $S/D=3$ 处横截面上的二次流

结论：本算例集中讨论了使用近似湍流模型来预测 90°弯管内湍流流动的物理特性．由于无解析解，通过预测结果与实验数据的对比来验证数值解，以确定模拟模型的精确性，以及模型与真实物理流动相符合的程度．尽管 90°弯管几何形状简单，但其内部流动结构却相当复杂，这是由于弯曲流域内存在二次流，流动实际上是各向异性的．由于标准

k-ε 模型假定流动各向同性，因此与标准 k-ε 模型相比，雷诺应力模型更好地反映了流动的各向异性行为.

5.8 小 结

本章中，通过考查相容性、稳定性、收敛性以及求解精度等概念，对数值计算的可信度进行了分析和评估．一般说来，流动控制方程的离散形式是否相容，离散后的代数方程是否稳定，都是可以证明的．然而，收敛则需要相容性和稳定性同时存在，即相容性+稳定性=收敛性．在任何数值计算中，误差和不确切性影响到数值解的精度．误差和不确切性必须有效地被减小，数值解才能更真实地描述求解的物理流动.

应用泰勒级数展开处理控制方程的离散形式得到的截断误差为显式形式(见 5.2 节)．该误差反映了有限差分法或有限体积法近似的精度，并确定误差随时间步长和/或网格空间减小而减小的速率．因为截断误差和求解误差密切相关(见 5.5.1 节)，因此，减小截断误差就有可能减少解的误差.

本章的目的是通过求解偏微分方程离散形式的大量实例，更好地阐述了相容性、稳定性、收敛性以及求解精度的概念．此外，更为重要的是，数值解应该进行严格的检查和验证，通过两个计算实例对此进行了论证．例 1 中，简单的二维通道流动问题，用解析解来验证数值解是可行的．然而，对于三维计算域内更复杂流动问题的数值解，由于没有解析解，因此需要用可靠的标准算例或者实验数据或用两者来验证数值解．这一点在例 2 中三维空气流经 90°弯管的流动得到体现．该例中，我们证明了使用好的湍流模型可以更好地描述 90°弯管内的流动机制．这表明，使用不当的湍流模型会引起求解的不确切，这一点将在下一章作进一步探讨．为使读者能够更好地处理和求解 CFD 问题，第 6 章中将进一步讨论更多的实用方法.

复习题

5.1 为什么数值计算结果与精确解析解存在差别？这些差别产生的原因是什么？

5.2 在 CFD 结果分析中，相容性意味着什么？

5.3 相容性的关键方面有哪些？

5.4 当网格空间趋近于 0 时，如果代数方程组等效于偏微分方程，这是否意味着代数方程的解也将趋于偏微分方程的精确解？为什么？

5.5 解释下面一维瞬时热传导方程泰勒级数展开不具有相容性的原因：

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\alpha\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right]_i=0.$$

5.6 试述稳定性的概念.

5.7 从 Neuman 分析中，稳定性的标准是什么？

5.8 何为 Courant 数，其功能是什么？

5.9 考查下述离散方程，确定其 Courant 数以及 Courant-Friedrichs-Lewy 稳定条件：

$$\phi_i^{n+1}=\phi_i^n+\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(\phi_{i+1}^n-2\phi_i^n+\phi_{i-1}^n).$$

5.10 给出收敛的定义.

5.11 叙述 Lax 收敛等价定理. 该定理能否应用于非线性问题？

5.12 认定迭代收敛的三要素是什么？

5.13 何谓输运离散方程的残差？

5.14 局部残差与累计残差的区别是什么？

5.15 当残差随迭代的增加小到可以忽略时，意味着什么？

5.16 通常推荐的残差精度标准是多少？

5.17 欠松弛因子的定义是什么？说明采用小的欠松弛因子的优缺点.

5.18 讨论加速收敛的途径.

5.19 收敛解是否即为精确解？为什么？

5.20 讨论导致求解错误的一些误差类型.

5.21 离散误差产生的原因是什么？局部离散误差与总体离散误差的区别是什么？

5.22 减少离散误差的方法有哪些？

5.23 舍入误差产生的原因是什么，以及对何种类型的计算影响最大？

5.24 何种方法能使舍入误差最小化？

5.25 网格独立性检验的意义是什么？

5.26 检查与验证的差别是什么？在结果分析中，为什么这两个步骤都很重要？

5.27 简单讨论如何应用多重网格方法来提高求解 CFD 问题的效率.

5.28 简单讨论如何使用并行运算来提高计算效率.

5.29 基于如下代数方程：$a_P\phi_P=\sum a_{nb}\phi_{nb}+b$，这里 a_P 是对角元素，a_{nb} 是相邻元素（见第 4 章）. 在所有节点处的收敛条件为 $\sum|a_{nb}|/a_P\leqslant 1$，这意味着所有相邻元素被对角元素相除的总和必须小于 1. 试分析下列两种情况的收敛性：

$$\begin{cases}\phi_1=0.5\phi_2+1.5, & (1)\\ \phi_2=\phi_1+2. & (2)\end{cases}$$

重新排列上述方程，有

$$\begin{cases}\phi_1=\phi_2-2, & (2)\\ \phi_2=2\phi_1-3. & (1)\end{cases}$$

6 CFD 模拟与分析实用技巧

6.1 概 述

在使用 CFD 时，我们常常要面对一些挑战，比如，需要了解被处理流动问题的物理特性、求解控制方程的基本数值方法以及现有计算条件下获得最精确计算结果的方法等. 本章就是针对 CFD 中的这些问题而专门编写的，目的是为 CFD 模拟、计算结果的评估和分析提供一些实用指导.

第 2 章中，网格生成被看成是前处理阶段中继计算区域定义之后最为重要的一步. 网格生成是数值计算中的一个重要问题，对于给定的流动，网格选择的类型将决定能否成功地获得数值解. 基于此，网格生成在 CFD 中已经自成一体. 网格生成的原则是：网格必须足够精细才可能充分获得重要的流动特性和流动结构. 对于具有壁面边界的流动问题，建议对邻近壁面边界处网格进行局部细化或加密，以适应对黏性边界层中回流区或流动变化剧烈区域的求解. 对于具有高剪力和/或高温度梯度的流体流动，也要有高的网格密度. 此外，网格的品质对数值模拟的收敛性和稳定性以及数值解的精度有着重要的影响. 所有这些网格生成问题，将在下节中阐述.

在第 2 章中，我们特别关注过 CFD 问题中给定的边界条件. 封闭流体流动方程的各边界条件的物理意义在第 3 章中已作了说明. 边界条件对 CFD 解有重要的影响. 这就要求定义合适的边界条件来模拟流体流动的真实物理状态. 在很多实际应用中，定义流动域入口和出口边界条件的某些细节往往是非常困难的. 对流动入口边界的湍流特性(湍流强度和湍流尺度)的描述就是一个典型例子. 因为在很多 CFD 问题中，这些条件是任意设定的. 然而，通过进行不确定性分析，读者能认识到边界条件适当与否对 CFD 问题求解的影响. 下面将对不同类别问题的入口边界、出口边界、壁面边界以及其他边界条件进行检验和讨论，并给出有用的建议.

绝大多数工程流动为湍流流动，在第 3 章中，简单介绍了处理湍流的经典两方程模型，描述了标准 k-ε 模型基本方程. 然而，在第 5 章 90°弯管内流动例子中，我们证明了采用雷诺应力模型能更好地捕获弯管区域内流动分离的各向异性特征. 湍流模型用于封闭时均流动控制方程. 目前，两方程模型和雷诺应力模型是众多商业计算软件、用户共享软件和自编 CFD 程序中湍流计算的基础. 另一方面，由于标准 k-ε 模型自身的某些局限，人们在标准模型中引入了很多变量，进而发展了用于特定流动问题的其他模型. CFD 使

用者在实际计算时需要选择合适的湍流模型，因此有必要给出一些建议．尽管很多工业问题能够应用标准 k-ε 模型进行求解，但对于特殊的流动问题，只能对各湍流模型进行逐一验证来确定最佳适用模型．有关湍流建模问题，稍后将在本章中探讨．

随着我们对 CFD 的不断了解，本章将综合前面章节的基础知识，实现对 CFD 的模拟和分析．我们首先探讨网格生成问题．

6.2 网格生成

6.2.1 网格生成概述

网格生成是数值方法求解 CFD 问题偏微分控制方程中的重要步骤．采用结构良好的网格会对数值计算产生良好的影响．它不仅可以避免可能产生的计算不稳定性或不收敛问题，而且还可增加获得 CFD 问题最终收敛解的可能性．

CFD 需要在计算区域内划分大量的网格，用小的网格单元来覆盖整个几何区域．因此，通常希望通过对离散区域网格足够精细的划分来反映流动区域中的物理性质，并且捕获到其中的所有流动细节．设计合适的网格绝不是一件无足轻重的事情，寻求结构良好的网格如同流动问题物理特性的描述一样，应该受到足够的重视．

详细说明各种网格生成方法并不是本书的目的．有很多书籍专门集中讨论这一问题，如，Thompson(1985)、Arcilla(1991)以及 Liseikin(1999)．我们也注意到，现有市场上很多商用软件都有它们各自内置功能强大的网格生成器，同时，还有大量的独立网格生成软件可供读者研究阅读，如 Pointwise (www.pointwise.com)的 GRIDGEN、Program Development Company (www.gridpro.com)的 GRIDPRO．尽管这些独立的网格生成软件包以及各种商业软件中内置的网格生成器具有用户界面友好、易于使用的特点，但精通这些软件包的先决条件仍然依赖于读者使用它们的能力．

我们倾向于集中精力综述一下很多 CFD 问题中出现的各类网格．更为重要的是，我们希望读者关注于网格应具有的诸多重要特性上来，如网格品质以及将在下面进一步讨论的局部网格细化的必要性．

网格技术：当流动区域为简单和规则的几何形状时，如图 6.1 所示，可在直角坐标系下直接采用正交网格．其中，网格线平行于坐标轴方向．这种网格一般被称为结构化网格(structured mesh)．回顾第 2 章中图 2.6，两静止平行平板间流体流动的例子，即是采用了这种形式的网格．相似形式的结构化网格也可以应用到如图 6.2 所示复杂一些的几何形状之中．为了将结构化网格应用到具有倾斜边界的求解区域中，可以采用发生非正交变形的贴体网格(body-fitted grid)．其中，允许网格单元表面平行于计算边界的表面．读者应该认识到，无论是二维四节点倾斜矩形单元，还是三维八节点变形六面体单元，这些单元仍然保持着规则的形状．

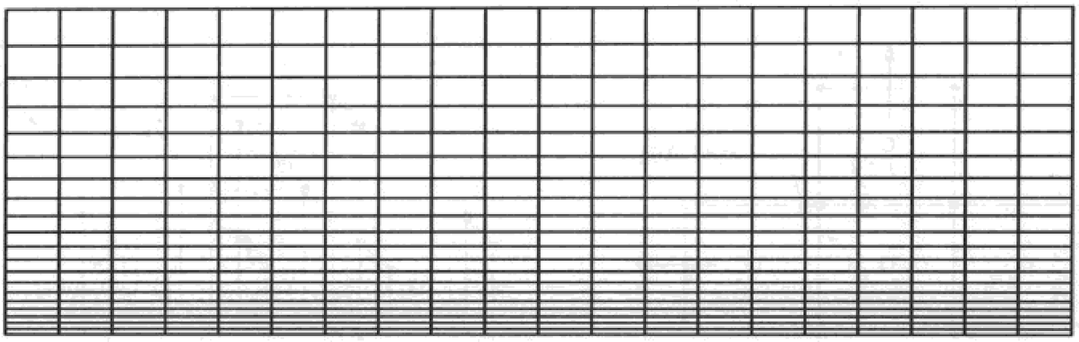


图 6.1 正交结构化网格

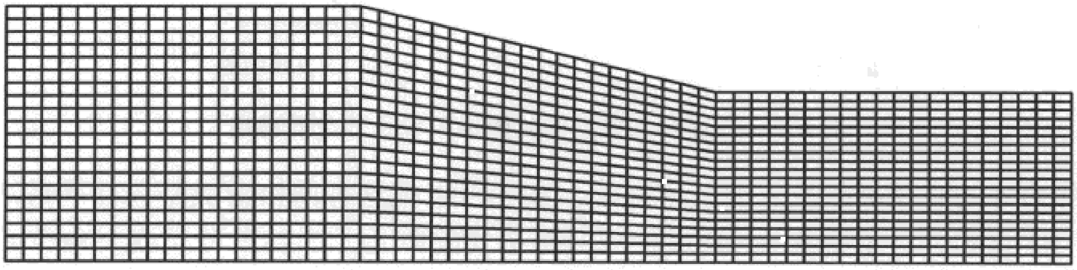
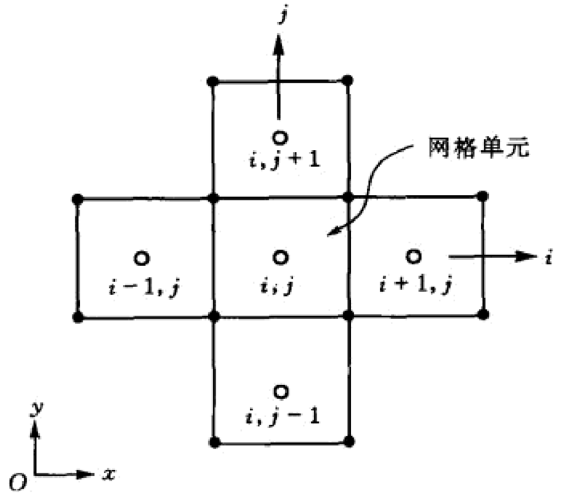


图 6.2 贴体结构化网格

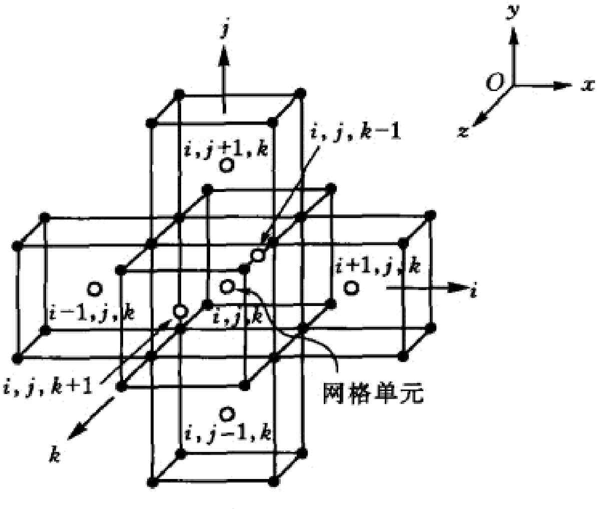
在网格生成方面，应用结构化网格具有明显的优点和缺点. 这种网格的优点是：网格单元的节点很容易地用二维坐标(i, j)(二维网格)和三维坐标(i, j, k)(三维网格)来确定. 如图 6.3 所示，由于网格之间是直接连通的，给定表面间的相邻网格单元能用坐标确定，并且单元的边缘形成了连续的网格线，这些网格线的起始和终了都在对面的单元表面上. 在二维网格中，中心网格单元与 4 个邻近单元相连；在三维网格中，中心单元与 6 个相邻单元连接. 这样数据管理方便，网格连接规范，从而容易编程. 结构化网格的缺点是：对于复杂几何形状的计算域，非正交或倾斜网格增多，在控制方程的坐标变换时可能产生非物理解. 非正交坐标系下的变换方程将贴体坐标变换成规则坐标系(比如直角坐标系)时将包含一些附加项，因而增加了数值计算的时间和编程的难度. 这种网格因此也影响到数值运算的精度和效率.

在 CFD 应用中，非结构化网格的使用已经越来越广泛. 当今的大部分商业计算软件都采用非结构化网格. 其中，网格单元在计算域内可以自由组合而不必考虑网格线的连续性. 因此，单元每个表面连接的相关信息需要以某种表格形式加以储存. 二维中最典型的非结构化单元为三角形单元，三维中最典型的非结构化单元为四面体单元. 当然，任何其他形状的单元也是可以的，包括四边形或六面体单元，甚至有一种发展趋势是用多面体单元布满计算区域. 多面体网格单元的应用仍然处于起步阶段，然而，该网格形式在数值计算的精度和效率方面已经显示出比四面体网格具有优越性.

通常，结构网格并不要求网格交界面匹配. 图 6.4 与图 6.1 具有相同的几何形状，但



(a) 二维问题



(b) 三维问题

图 6.3　二维和三维结构化网格中单元节点的确定

接近底部边界的直角网格交界面就不匹配．我们可以把这种网格看成是局部网格细化的特例．我们注意到，对于图 6.4，通过使用其他形式的单元，如三角单元或三角单元和四边形单元的组合，同样可以获得局部区域细化．非结构化网格特别适于处理任意几何形状的计算域，特别适合处理高曲率边界的计算域．图 6.5 显示了圆筒内部结构化网格和非结构化网格划分的情况．对于这样的几何形状，因为计算域内必须满足几何边界的强制约束，因而，如图所示贴体非正交结构网格 4 个顶点处的单元将产生很大的变形．这种类型的网格一般会产生数值计算的不稳定性以及计算结果的恶化．最好采用如图 6.5(b)所示的非结构化三角网格重新进行网格划分．

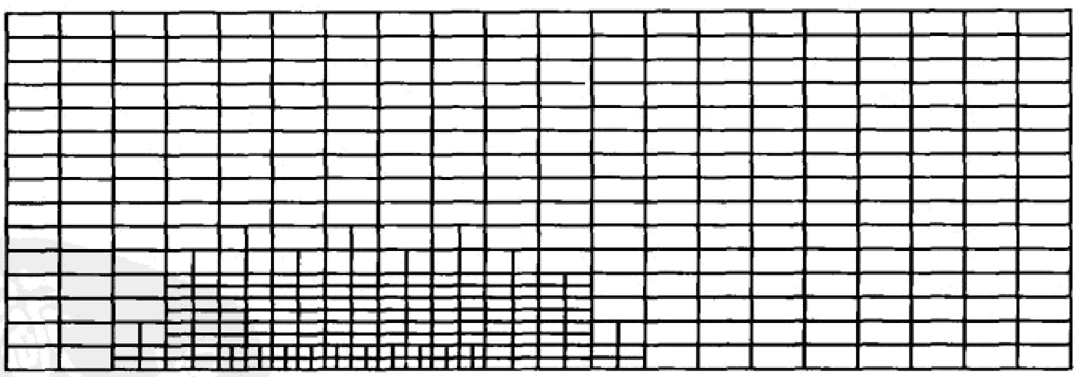


图 6.4　非结构化直角坐标网格

尽管在 CFD 模拟中应用非结构化网格有很多优点，读者也应该清醒地认识到它的缺点．与结构化网格相比，非结构化网格单元的节点不易用二维坐标(i, j)或三维坐标(i, j, k)来处理和确定．一个单元可以有任意数目的相邻单元，这使得数据处理相当复杂．非结构化网格的三角单元(二维)或四面体单元(三维)在求解壁面边界层时，其效率远

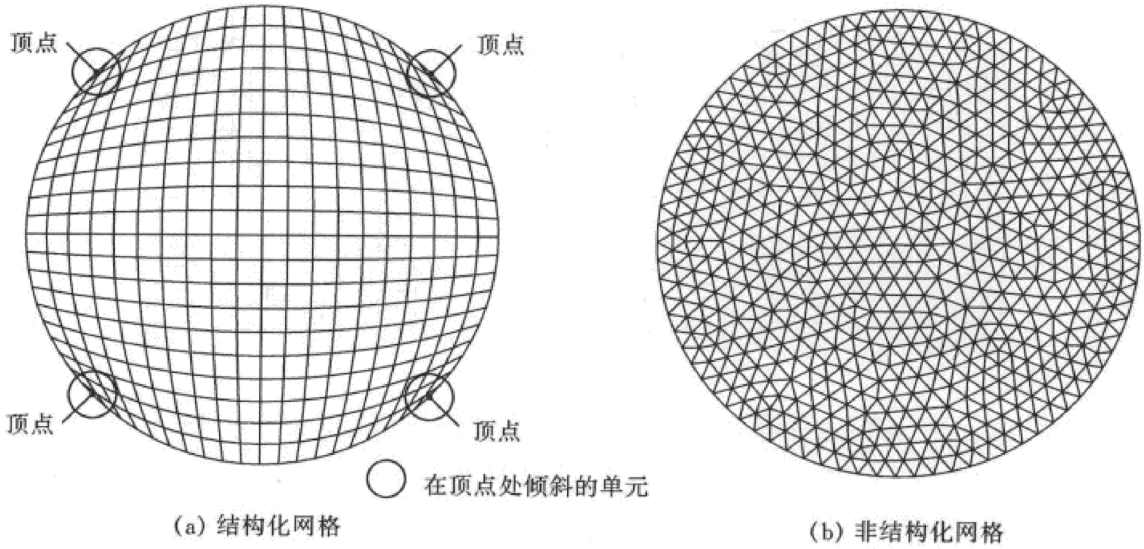
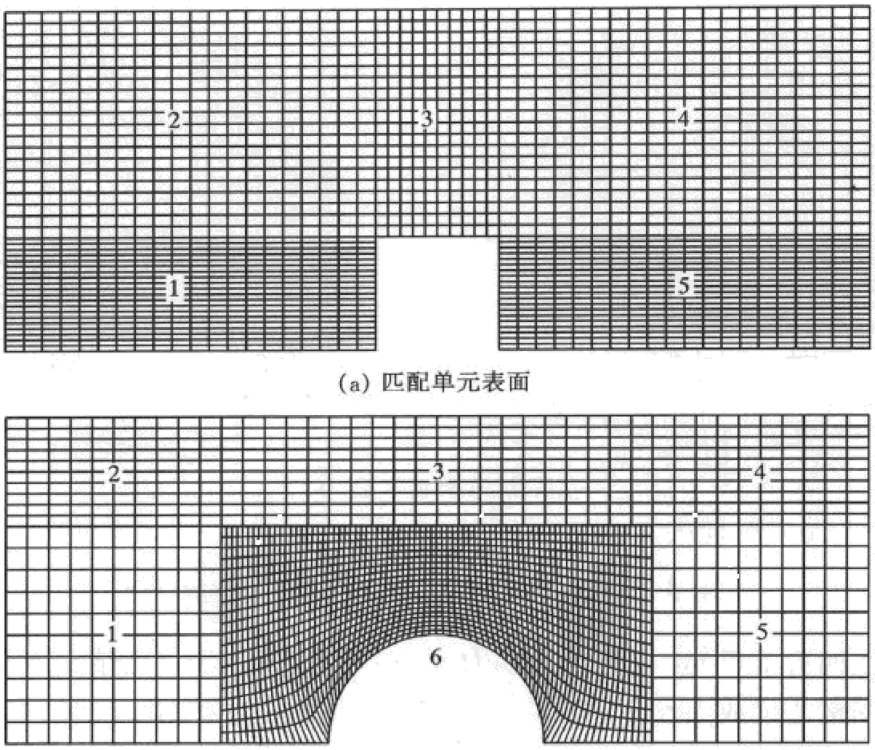


图 6.5 圆筒内结构化网格和非结构化网格的划分

低于结构化网格四边形单元(二维)或六面体单元(三维). 在大多数情况下，临近壁面边界处，非结构化网格会生成细长的三角单元或四面体单元，在扩散型通量的近似中会产生严重的问题. 对非结构化网格，与数据处理和单元网格关联性有关的另一缺点是需要更复杂的求解方法来求解流场内的变量. 这可能导致求解时间的增加以及计算效率的下降.

块结构化或多块网格(multiblock mesh)是一种特殊的结构化网格. 这种网格是由几个相互联结的结构化网格块组合而成. 如图 6.6 所示，邻近块间每个网格单元的连接可以是规则的(交界面匹配)或者是任意的(交界面不匹配). 在整个计算域内，要想生成适应整个计算域的网格，多块结构网格，尤其是交界面不匹配的多块网格的生成比单一块贴体网格生成要简单得多. 这种方法为每一子块选择最佳网格分布提供了可能. 读者可以选择合适的 H 型、O 型或 C 型结构化网格，或者选择四面体或六面体非结构化网格，充填到每个子块之中. 图 6.7 所示为计算交叉排列管组对称部分流动所设计的 H 型网格的例子. 也可以用如图 6.8 中所示的 O 型网格替换图 6.5 圆筒中的高度倾斜的网格.

在处理复杂几何形状的流动区域时，在网格块边界处，使用互相重叠的多块结构化网格代替相邻的不重叠互相连接的多块结构化网格来覆盖不规则流域，从而产生了另一种网格生成方法. 计算域内，矩形、圆柱形、球形或者非正交网格都可用来与主正交网格进行组合. 图 6.9 是处理汽缸中进、出口管道结构化重叠网格的例子. 该方法的诱人之处在于结构化网格块可以任意布置在计算域中，以适应任何几何边界条件，同时还能满足基本的求解需要. 通过插值方法可以获得不同网格块间的信息. 具有重叠网格块的块结构化网格有时被称为混合网格(Chimera grids). 使用这种网格的优点是易于处理复杂的流域，还能用于跟随滞止环境中的动态物体. 这一点可以从 Tu 和 Fuchs(1992)以及 Hubbard 和 Chen (1994, 1995)的研究中找到例证. 使用这种网格的缺点是各块间的边界处通常难以维持守



(a) 匹配单元表面

(b) 不匹配单元表面

图 6.6 匹配与不匹配单元表面的多块结构化网格

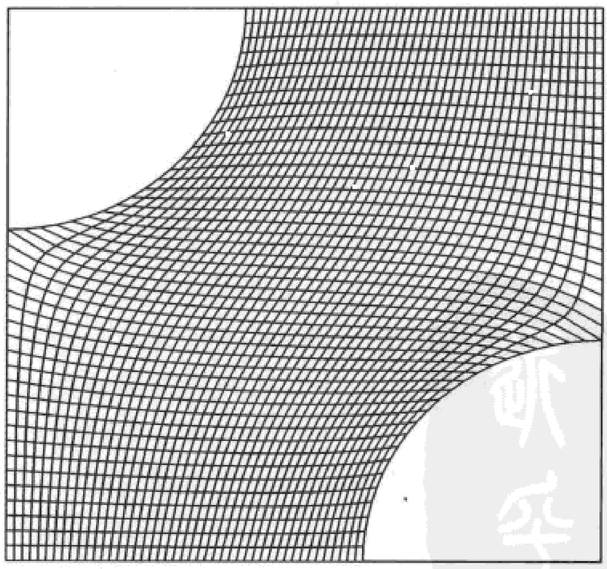


图 6.7 计算交叉管组对称部分流动的结构化 H 网格

恒性，如果解在交界处有强烈变化，那么插值方法可能引起计算误差或带来不收敛等问题.

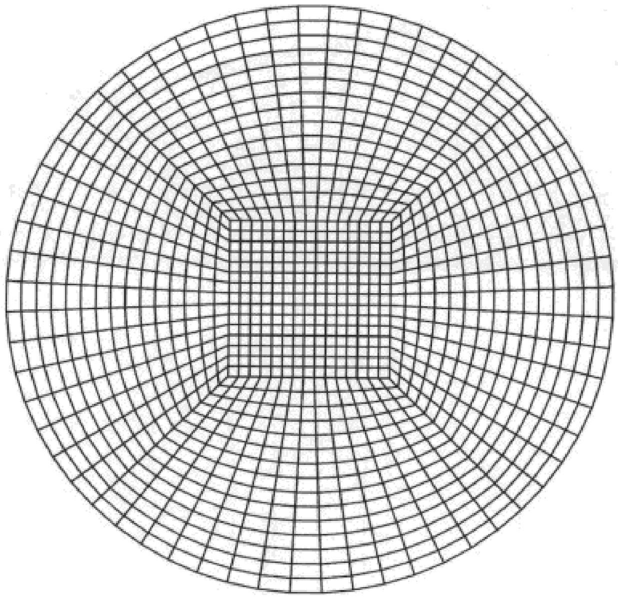


图 6.8 圆筒内结构化O型网格

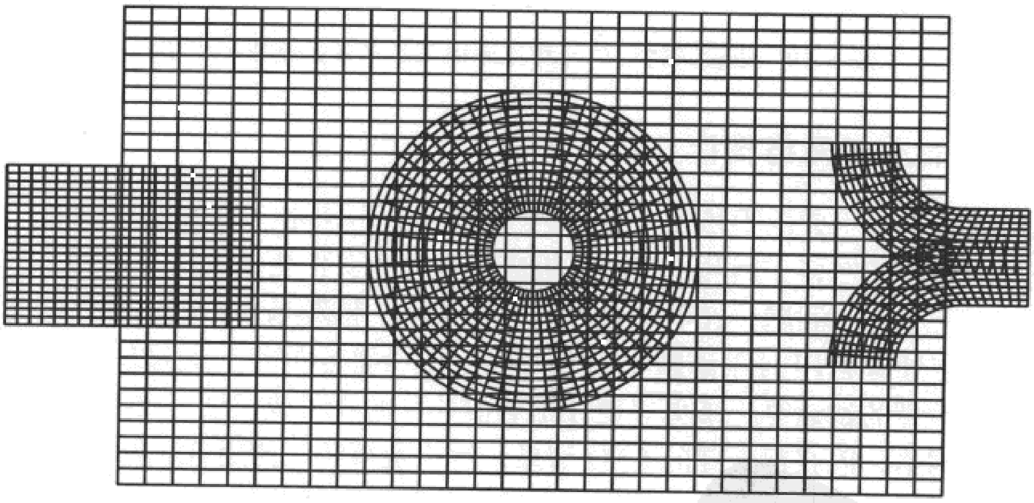


图 6.9 汽缸中入口-出口管道的结构化重叠网格

不同形式的网格单元，如二维的三角形单元和四边形单元以及三维的四面体、六面体棱柱和棱锥等，可以组成混合网格，其使用可以最大限度地使网格单元与边界表面相匹配，使各种形式的网格分配到复杂流动区域中的各个部分．在实际使用时，近壁边界层设置四边形或六面体单元，流域的其他部分采用三角形或四面体单元，这样可以提高网格品质，使数值方法获得高的求解精度以及更好地收敛．图 6.10 与图 6.2 贴体网格中的几何图形相同，但近壁采用四边形单元，在流域的其他部分中采用三角形单元．关于网格品质和网格设计，将在后面讨论．

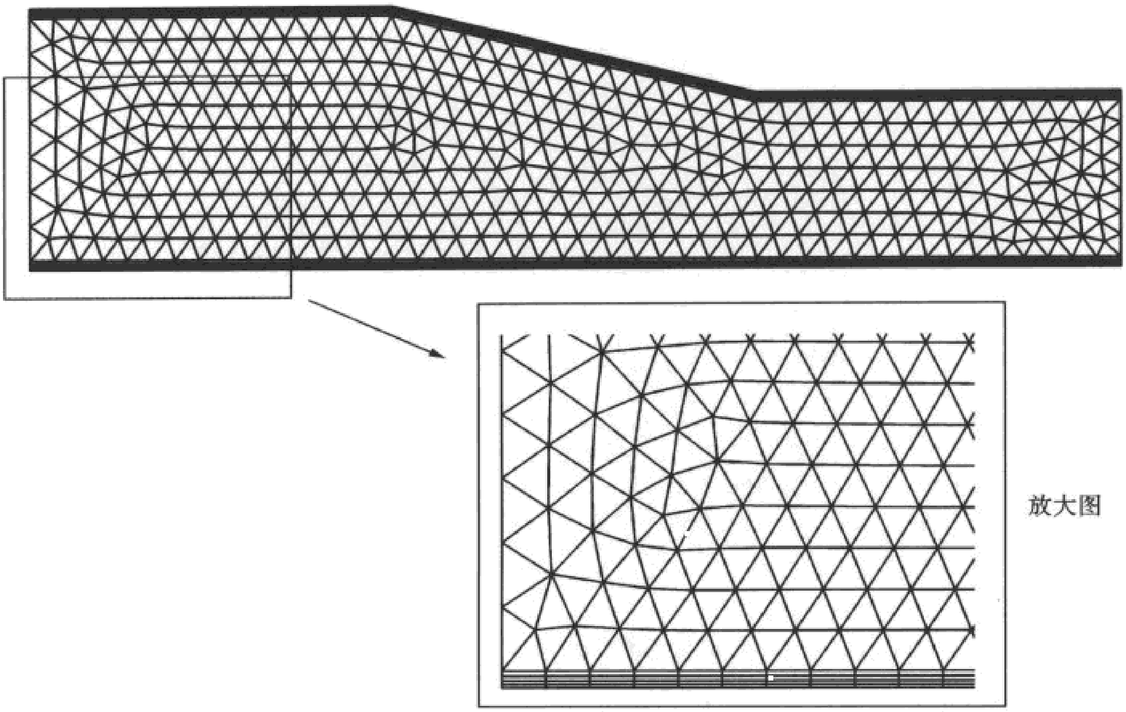


图 6.10 近壁四边形单元和流域中三角形单元组成的网格

6.2.2 网格品质与网格设计

如前所述，网格生成绝不是无足轻重的工作．对于不同 CFD 问题特定的几何形状来说，均需要相适应的网格，因此，在网格生成过程中需要作更多的考虑．

首先，对一个实际问题，在网格设计的开始阶段，推荐采用粗糙网格，因为这样可以有机会评估特定计算程序的存储量和运算时间．更为重要的是，通过使用适当的粗糙网格，可以进行大量的试运算，来更好地评估数值计算的收敛或发散．求解收敛后，再在计算区域中细化网格，以获得最终的 CFD 结果．对于发散解，使用者需要探究其中的问题，找到数值计算过程中引起求解发散的原因．我们注意到，在粗糙网格上进行的试运算也提供了矫正可能的求解误差源的机会，比如物理建模以及在数值计算过程中出现的人为误差．

显然，不提倡在精细网格上进行试运算，因为这可能需要数小时甚至几天才能检验数值结果．也应该注意，不要一开始就草率地采用精细网格，因为迭代过程中可能出现似是而非的发散趋势．让我们用输运方程中的对流项(一阶微商)和扩散项(二阶微商)在直角坐标系中的离散近似实例来阐述这一观点：

$$u\frac{\partial\phi}{\partial x}\approx u\frac{\Delta\phi}{\Delta x},\quad v\frac{\partial\phi}{\partial y}\approx v\frac{\Delta\phi}{\Delta y}\quad 且\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\approx\frac{\Delta^2\phi}{\Delta x^2},\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\approx\frac{\Delta^2\phi}{\Delta y^2}. \tag{6.1}$$

在精细网格中，网格间距可能非常小，因此

$$\frac{\Delta^2\phi}{\Delta x^2}\gg u\,\frac{\Delta\phi}{\Delta x},\quad \frac{\Delta^2\phi}{\Delta y^2}\gg v\,\frac{\Delta\phi}{\Delta y}. \tag{6.2}$$

若初始条件设置不当，方程(6.2)在首次迭代时，我们会发现 ϕ 的网格步长变化小，而二阶导数项的值可能变得非常大．这可能导致随后的求解错误和迭代发散．为克服不良初值假设或流动域内存在大的梯度变化带来的问题，一种实用的方法就是使用5.4.3节中讨论的欠松弛因子来减少迭代步长的变化．在很多商业软件中采用的另一策略是在开始求解问题时采用粗糙网格，然后将粗糙网格得到的解赋值到精细网格上，这样有助于收敛并提高数值求解的稳定性和效率．

其次，生成网格的品质依赖于单元的形状：纵横比、倾斜、弯曲角度或相邻表面的夹角等．

对于如图6.11所示的网格间距 Δx 和 Δy、单元网格线夹角 θ 的四边形单元，我们可以定义网格单元的纵横比为 $AR=\Delta y/\Delta x$．在网格生成过程中，一定要避免在流动域内的重要部位出现大的纵横比网格．因为这将降低求解的精度，并且可能导致迭代收敛困难(或不收敛)．这当然与使用的数值求解方法有关．只要有可能，在计算域内推荐 AR 保持在 $0.2<AR<5$ 范围内．当然，对于近壁面边界，AR 的条件则可以放宽．如果流体沿 y 方向流动，则需要在 x 方向适当选择小的 Δx 网格间距，这将导致 $AR>5$．在这种情况下，一阶和二阶梯度的近似只与 y 方向有关，其原因在于：

$$\frac{\Delta^2\phi}{\Delta x^2}\ll\frac{\Delta^2\phi}{\Delta y^2}\quad 且\quad \frac{\Delta\phi}{\Delta x}\ll\frac{\Delta\phi}{\Delta y}. \tag{6.3}$$

如果流体沿 x 方向流动，当 $AR<0.2$ 时也会出现同样的情况．方程(6.3)对减轻收敛困难、提高求解精度可能有所帮助，特别适用于在流动垂直方向上存在快速变化的壁面边界层问题．

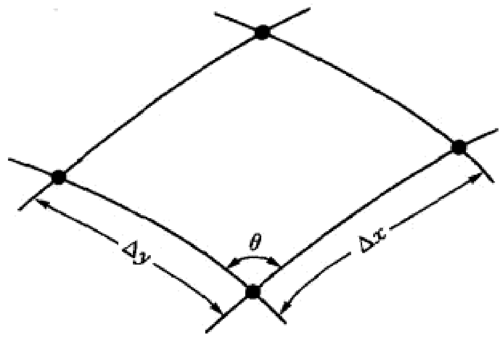


图6.11　网格尺寸为 Δx 和 Δy、网格线夹角为 θ 的四边形单元

另一个与单元形状有关的是网格扭曲或偏斜，它与如图6.11所示的网格线夹角 θ 有关．我们希望网格线夹角最好接近90°(垂直)．如果网格线夹角 $\theta<45°$ 或 $\theta>135°$，那么网格中包含的这些高度倾斜单元常常会使计算结果变坏或者导致求解不稳定．从布满非正交结构化网格的图6.5中可以发现高度倾斜的网格单元．对于某些复杂的几何形状，产生的网格中极有可能含有倾斜角接近上述限制的单元．由于坐标变换控制方程的离散形式中存在附加项，这将对求解产生严重的影响，这样的网格可能妨碍求解的收敛．使用欠松弛因子可以增加系数矩阵中的对角优势，从而慢慢改进迭代过程中的中间解．在接近几何壁面处也应避免出现非正交单元．网格线与计算域边界的夹角，特别是在壁面、进口或出口边界，应尽量接近90°．对于远离计算域边界的网格线，网格线夹角的要求可以适当放宽．

如果采用非结构化网格，则要特别注意保证三角形单元表面间的夹角(图 6.12 中的 β 角)不大于 75°．网格偏离共面(co-planar faces)越大，可能导致严重的收敛问题并使计算结果变坏．在很多网格生成程序中，通过网格光滑化算法来改进单元间夹角来克服这一问题．只要有可能，在壁面边界层处，应避免使用四面体单元．由于棱柱形或六面体单元形状规则，并且可以按照近壁湍流模型要求进行调节，因此被视为首选．关于这个问题，将在后面的章节中作进一步的讨论．

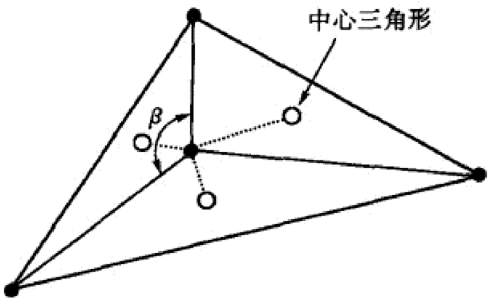


图 6.12　两相邻三角形表面成 β 角的三角形单元

第三，如 6.2.1 节中介绍的 H 网格、O 网格或 C 网格等特殊网格设计，以及块状网格交界面分析，有助于全面改进多块结构化网格的整体品质．存在高流动梯度或大剪切力的临界区域内，应该极力避免块网格交界处出现任意网格耦合、非匹配单元交界面或者网格单元类型的突然变化．无论如何，在几何形状变化剧烈或者隐含计算误差较大的临界区域内，应该采用更细小的和更规则的网格．在所有的情况下，在具有高流动梯度和较大变化的临界区域内设置网格时，建议 CFD 使用者要检查网格设计时的预想结果与实际计算结果是否一致，如果有必要，需要重新布置网格节点．

最后，要进行网格独立性研究，对不同类型的问题要分析网格的适用性并估计数值模拟的计算误差．最好是对三种以上不同网格密度进行求解．严格地讲，可以通过在每个方向上网格数目加倍来进行计算，然后再应用 Richardson 外推法(Roache，1997)加以比较．如果这样做是不可能的，那么可以在临界流动区域内选择网格的局部细化，这将在下一节中讨论．此外，读者可以尝试在相同网格上采用不同的空间离散阶数，然后比较计算结果，这将在 6.5 节中详细说明．

6.2.3　局部网格细化和自适应性求解

在临界流动域内，选择适当的网格密度对计算过程的稳定性和收敛性有着重要的影响，对数值计算的最终解的精度影响也很大．本节着重说明使用局部网格细化和自适应求解的必要性并给出诸多建议，以更好地捕获重要的流动特性．

在很多 CFD 应用中广泛使用的一种局部细化技术是在临近流域壁面附近采用延展网格(stretched grid)．对于以固体壁面为边界的黏性流动，在物理边界层内划分大量网格的目的不只是为了缩小空间网格间距以获得最小的截断误差，更是为了真实地反映实际流动的物理特性．让我们回到前面章节提到的两静止平行平板间流动的实例中．如图 6.13 所示，在实际流动中，当流体进入左侧边界并沿流域的底面流动时，存在一个不断发展并变厚的边界层．如果边界层的局部厚度用 δ 表示，其中 $\delta=\delta(x)$，很明显，粗的均匀网格基本上漏掉了物理边界层．由于在底面上采用无滑移边界条件，我们可以预测充分发展区

域内与黏度有关的速度分布．相反，粗的延展网格很难捕捉到真实物理边界层的基本特征．由此可见，边界层内的网格分布对求解精度有重要的影响．下面我们对第5章中讨论的相容性概念作进一步的研究．对于二维不可压缩质量守恒方程，截断误差为

$$\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\Delta y^2}{6}\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}. \tag{6.4}$$

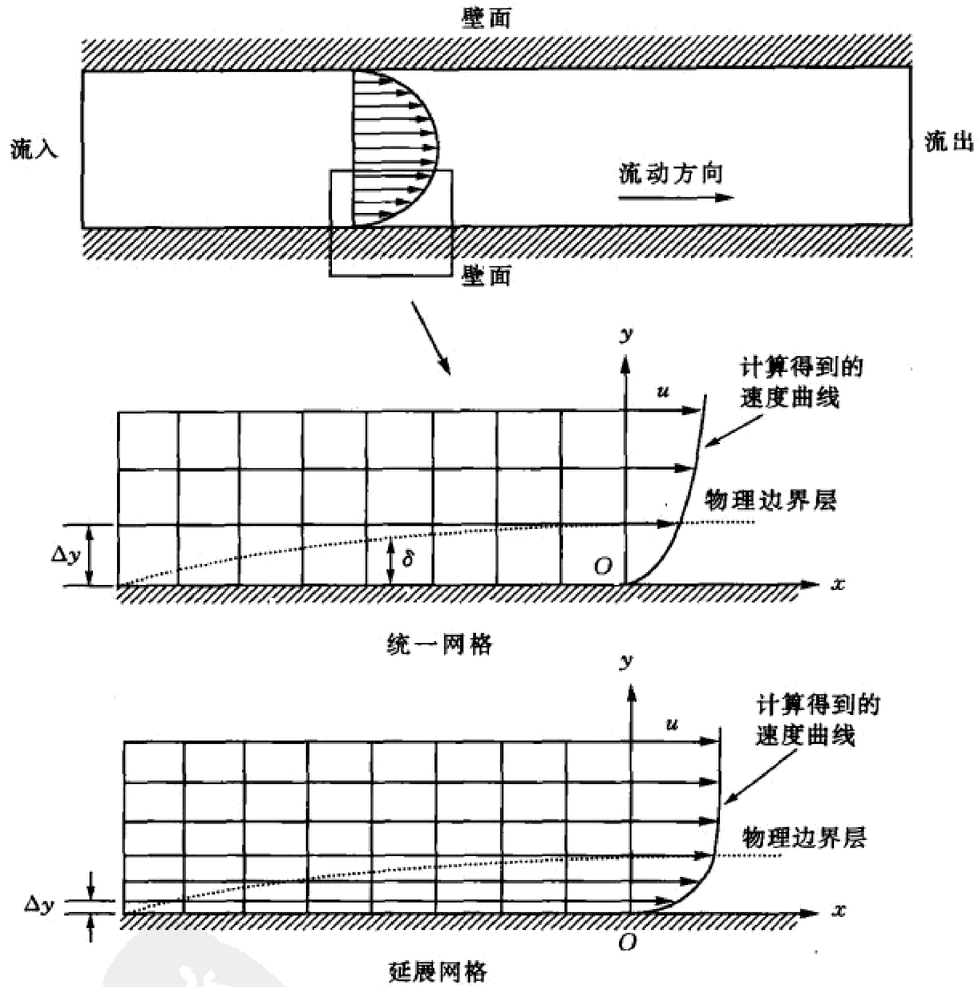
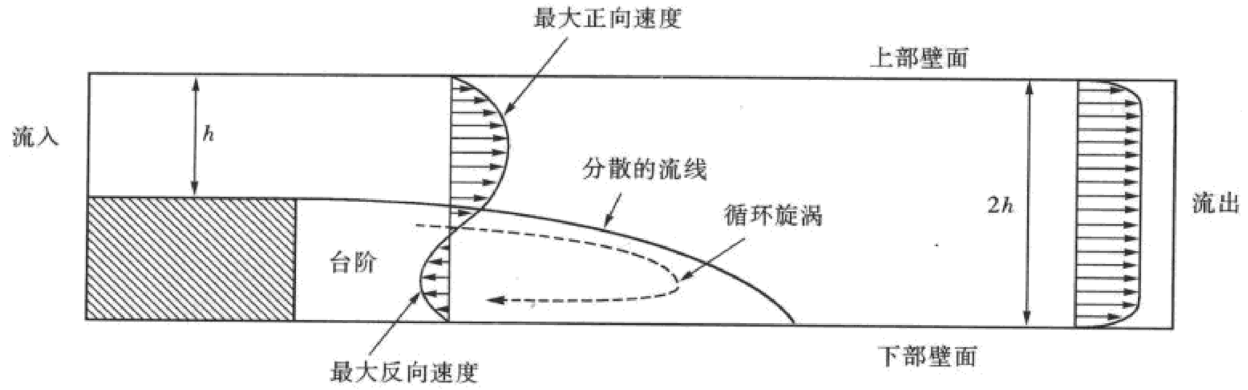


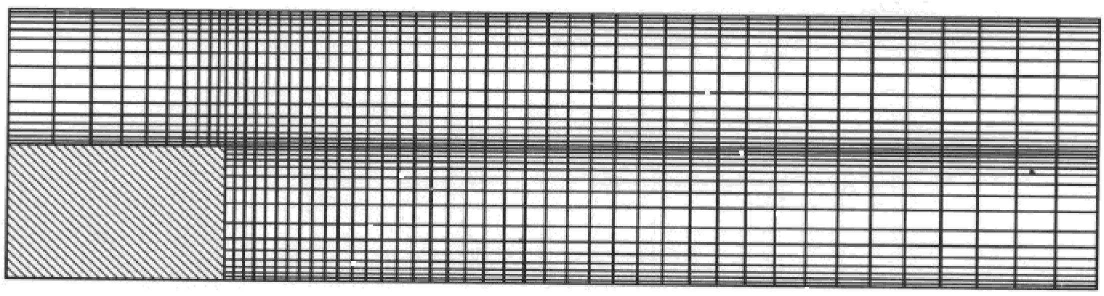
图 6.13　为求解接近底面的物理边界层的局部网格细化

如果求解误差与截断误差相关，那么，要确定计算流域内速度梯度变化剧烈处的速度分布，就必须对网格进行适当的细化．这有助于截断误差以及求解误差的最小化．对一些特殊的流体动力学问题，如上游滞止流动(upward stagnation flow)和后向台阶(backward-facing step)几何形状，局部网格细化也显得非常重要．后向台阶广泛应用于多种工程领域之中，用于分析流动分离、流动再附着(flow reattachment)以及自由剪切喷流等现象．图6.14显示了水平和垂直方向上延展网格的布置，以捕获循环旋涡的基本特性．

然而，上面描述的延展网格，其应用必须注意避免网格尺寸的突然变化．网格间距



(a) 流动示意图



(b) 计算网格

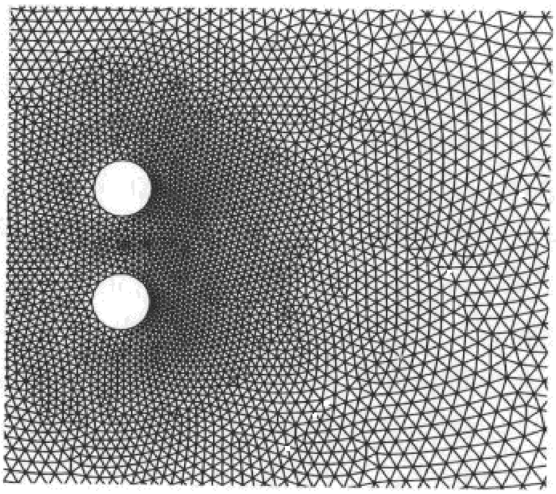
图 6.14 后台阶(迭坎)几何结构以及为捕获循环旋涡基本特性的计算网格示意图

应连续变化，在流动变化大的区域内尽可能避免网格尺寸的间断性变化，特别是在使用多块网格与任意网格相耦合且单元表面不匹配，或多块网格单元类型变化时，更是如此．间断网格尺寸在临界流动区域内造成截断误差的累积，使计算过程产生不稳定．这些误差一般包含方程(6.1)中所描述的扩散项(二阶微商)，而二阶微商的离散要求网格变化非常平滑．保证远离计算域边界网格和流域内部网格缓慢、平滑变化将有助于减少数值计算的发散趋势．值得一提的是，大多数内嵌于商业软件中的网格生成器以及独立的网格生成软件包都能预先确定合适的网格延展率(相邻网格尺寸的变化率)．当生成适当的延展网格时，延展率应该在程序要求的范围内．

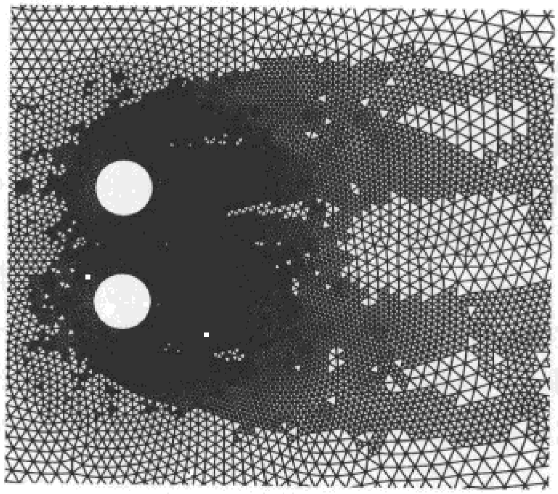
通过延展网格结构，局部细化技术可以实现重要流动区域内网格节点的增加，而不重要的区域可以减少甚至不设网格节点．然而，必须注意的是，延展网格是在流场计算之前使用代数方法生成的一种网格．需要仔细考虑的是生成的延展网格能否充分捕捉到流体的流动行为，需要考虑的另一个问题是延展网格域内求解的预估流动是否与真实流动相去甚远．后者将引出本节中的下一个主题，即求解的适应性．

求解适应性(Solution adaptation)：通过使用自适应网格，在流域内梯度大的地方自动地聚集大量的网格节点．因此，它是根据流场的求解结果来确定物理流动区域内网格节点的位置．在求解过程中，物理流动域内的网格节点能适应流动过程的演变，迁移到流动

变化剧烈的地方．因此，在流场的求解过程中，网格节点实际上在不断移动，直到求解逼近某一准稳态时，网格节点才稳定不动了．可见，自适应网格与流场求解密切相关，并随流场发展而变化，这就不同于前面讲述的延展网格，其产生与流场求解完全无关．自适应网格特别适用于自动生成各种尺寸的三角形或四面体单元等非结构化网格，求解临界流动区域内的流动．图 6.15 是求解适应性的一个实例．该例子是第 2 章中探讨的应用三角形网格求解流体流经两圆筒的流动问题．对于这一特定流动问题，通过进一步细化尾迹区网格，捕获两个圆筒后面旋涡形成与脱落的基本形态．



(a) 原先的网格划分



(b) 适应性求解的网格划分

图 6.15 使用三角形网格对流体流过两个圆筒流动问题的适应性求解实例

如果一种求解方法可以采用各种形状的非结构化网格单元，那么就有可能使用适应性网格．在局部网格细化过程中，没有细化的相邻单元尽管保持了原来的形状，但其单元表面已经被一组子表面所取代，变成了一个多面体．多面体单元适应性网格既对 CFD 提出了挑战，也给 CFD 带来了潜在的发展前景．适应性网格的优点有二：对于固定的网格节点数目，可以提高求解的精度；对于给定的计算精度，可使用更少的网格节点．现在绝大多数商业软件都提供某种形式的自动适应网格技术．然而，读者应该记住，使用这些软件不可能改进网格品质(倾斜和/或纵宽比)．在 CFD 中，适应性网格的使用日益增多．本节中描述的适应网格概念并不详尽．著者鼓励读者参看其他书籍和文献，以深入理解其内涵(见 8.2.2 节以及有关参考文献)．

6.3 边界条件

6.3.1 边界条件设置概述

设置适当的物理边界条件同局部网格细化和适应性求解一样，控制着求解 CFD 问题

的计算稳定性及计算的收敛性．在很多实际应用中，一般很难确定计算域入口和出口的边界条件．对于流体流动，其速度场与压力分布耦合，使边界条件变得更为复杂．在 CFD 中，定义的边界条件通常包括两类：Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件．这两种边界条件的物理意义在第 3 章中已经进行了描述．简单地讲，Dirichlet 边界条件可以表示为输运变量 ϕ 在边界上的特定物理量，即

$$\phi = f \quad (\text{解析式}), \tag{6.5}$$

而 Neumann 边界条件则要求给定边界处输运变量的导数：

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \tag{6.6}$$

实际上，流入边界广泛采用的方法是将输运变量设为均匀来流或在边界面上设置某一预设的分布(Dirichlet 边界条件)；而对于出口边界，输运变量在边界面上的法向导数为 0 (Neumann 边界条件)，边界上的输运变量可沿流动方向外推得到．然而，在某些特定的应用中，使用这种方法并不一定简单易行．应用上述进口及出口边界条件可能出现一些问题，例如，流出信息返回到计算域中的非物理反射(non-physical reflection)(Giles，1990)，这是由于出口边界可能处在高旋涡、大曲率或大的压力梯度区域内，流体会重新进入到计算域中，这将对迭代过程的收敛产生重要影响．在处理这类旋流问题时，采用压力场径向平衡的假定比出口旋流的恒定静压假定更适合一些．同样，当有大的压力梯度出现时，对流入和流出边界有时需要采用特定的无反射边界条件(Giles，1990)．

其他一些需要注意的重要问题包括规定适当的入口湍流强度、流动尺度、湍流进入流动域的湍动能及其耗散，正确描述壁面以及入口处的边界层速度分布，以及流入边界处密度的精确分布．CFD 使用者必须全面了解这些问题，对这些边界条件的确定性或非确定性有正确的认识．

为保证边界条件与 CFD 模型的一致性，边界条件充分反映流动实际是至关重要的．在此提出一些建议．如果可能，检验一下修正计算域的可能性，可以将计算域边界从一个位置移动到另一个位置上，而这个新边界应更容易、更精确地给定边界条件．还要留意计算域上游或下游是否存在流动障碍物，如流道的弯曲、收缩、扩张以及存在叶栅等，这些因素会对流动产生重要的影响．计算域上游或下游的这些影响因素的信息常常不完全甚至完全不知道．而计算中应包含这些相关部分，才可能获得对流动的合理预测．在处理各种不同的 CFD 问题中，进行敏感性分析(sensitivity analysis)可能是有益的．在敏感性分析中，在一定范围内逐渐改变边界条件，检查计算结果有否重大变化．如果改变边界条件对模拟结果产生重大的影响，导致数值模拟的巨大变化，那么就需要得到更准确的边界条件数据．在使用商业 CFD 软件时，计算边界的边界条件由默认给出，使用者通常不需要规定任何边界条件．但使用者仍需要确认边界条件适合于所要求解的问题．我们在下面集中讨论入口、出口、壁面、对称和周期性边界条件．

6.3.2 入口边界条件

由于边界条件影响CFD计算域内的流动，因此，强烈推荐进行边界条件的敏感性分析，即在一定范围内改变入口边界条件，考查边界条件对计算结果的影响，进而对边界条件的敏感性进行分析．本节的目的是确保在流入边界处采用合适的边界条件．根据流动问题，仔细考查某些关键参数以确定入口边界条件设置得是否合适．应该检测的参数有：

- 入口流动速度的方向和大小；
- 单一参数的均匀分布或按规定分布，如均匀入口速度或某一预先给定的入口速度分布；
- 物理特性的变化；
- 入口处湍流特性的变化．

读者应注意，入口边界表示流体流动的“质量来源”（mass source），那么出口边界必然用来表征流域内流体流动的“质量沉积”（mass sink）特性．如果没有出口边界，质量就不能守恒．毫不疑问，这种情况下的CFD运算将被快速“放大”（blow up）．

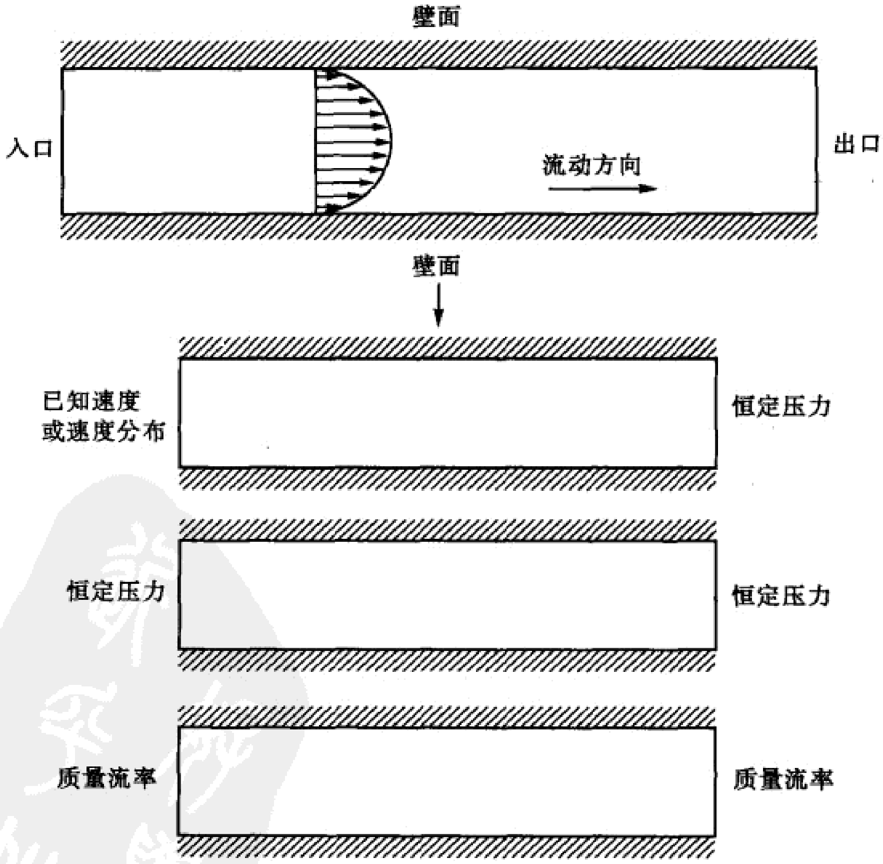


图6.16 两静止平行平板间流动边界条件的设置

再次回到两静止平行平板间流体流动的例子中，考虑不同入口边界条件和出口边界条件的组合形式．图 6.16 给出了常用入口边界条件和出口边界条件的设置方式．第一种设置：入口为给定速度分布，出口为恒定压力，在很多 CFD 计算中常常采用．为快速收敛并保证计算的鲁棒性(robustness)，几乎所有的商业软件都推荐这种边界设置形式．但在 CFD 计算之前如能提供合适的初始条件，其他组合方式同样是可用的．在稳态条件下，所有这些边界条件设置形式都将获得相同的速度分布，特别是在接近出口的充分发展区域内更是如此．

对于特定的几何形状，需要特别注意上游流动入口边界条件的规定．在预先设定的入口位置处，实际分布可能是未知的．可以移动入口边界到计算域内的另一个位置上，此处流体流动已充分发展，这样就可以进行边界条件检验．让我们考查前面 6.2.3 节中描述的背向台阶几何形式的典型流动问题．如图 6.17 所示，为了获得高的计算精度，有必要使用离扩张区域不同距离的上游入口进行敏感性研究，以证明求解不受入口位置的影响．如果入口太接近台阶，那么在流动膨胀区域前的速度分布沿流动方向将发生变化，这将严重影响流动旋涡以及之后的附着长度．这样的解当然是不可信的，这时必须重新设置入口位置．

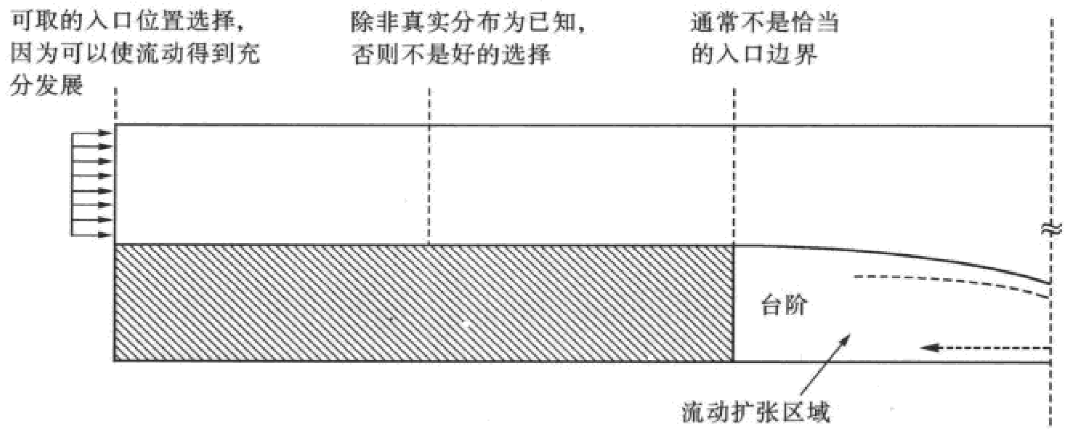


图 6.17　背向台阶流动问题的入口位置设定

6.3.3　出口边界条件

出口边界条件设置的重要基础是假定出口对上游影响很微弱．如图 6.16 所示，最合适的出口边界条件是恒定压力，如出口截面的静压力．只要有可能，边界条件应设置在尽可能远离感兴趣的区域并且避免设置在几何变化剧烈的地方或者有循环的尾迹区域．让我们再举背向台阶流动问题的例子来说明出口边界设置不当的潜在危害．

图 6.18 显示了台阶下游典型的速度分布，以及选择合适的出口边界位置．如前所述，在很多 CFD 计算中，出口边界设置常常采用 Neumann 边界条件，其中，垂直于边界面的对流微商设置为 0，而边界值是基于输运变量沿流向外插(stream-wise extrapolation)得到

的. 如果出口设置在位置1处, 出口平面通过循环尾迹区域(如图6.18所示). 这样, 设置出口边界不仅不正确, 且由于流体循环将流回边界, 还会使计算出现问题. 在下游稍远一点的位置2处没有循环流动, 但速度分布在流动方向上还处在变化之中, 法向梯度为0的条件得不到满足, 因此在此设置出口边界也不合适. 作为一种实用指南, 出口边界应设置在相当远的下游处, 至少10倍于台阶高度的距离位置3处, 以获得精确的求解结果. 还有, 必须确保和验证求解结果不受出口边界位置的影响. 台阶和出口边界之间的距离必须不断加大, 直到内部流动的求解结果没有明显的变化为止.

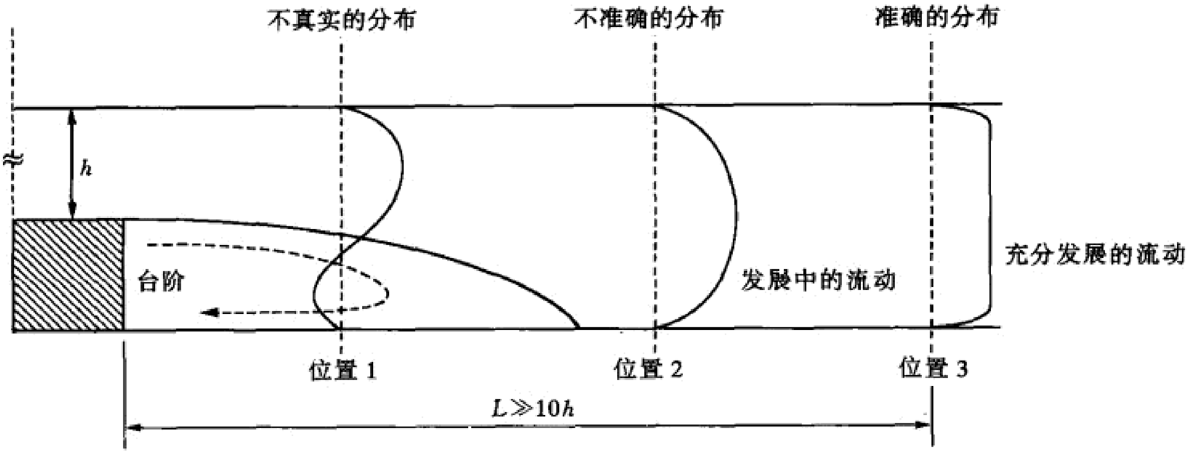


图6.18 背向台阶流动问题的出口位置选择

对于某些CFD问题, 流域内很难重新布置出口边界. 这时应不断检查通过出口边界流回计算域的流动是否存在以及能否导致计算过程持续的不稳定性, 或产生不正确的计算结果. 如果存在上述情况, 就需要改变几何模型, 对计算区域重新规划, 将边界条件设置在远离感兴趣区域的位置上. 当然, 如果流出边界条件允许流动重新流回计算区域, 则应对所有的输运变量设置恰当的Drichlet边界条件.

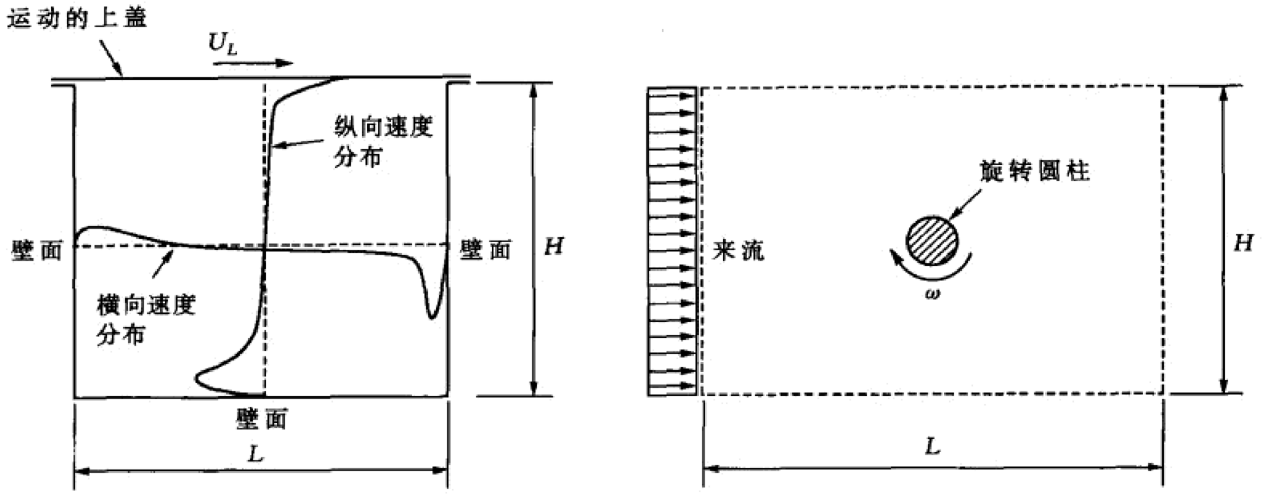
6.3.4 壁面边界条件

壁面边界条件通常是用于约束流动域的固体壁面. 应保证设置于壁面的边界条件既要与数值计算模型相一致, 又要与流动的实际物理特性相一致. 对于图6.13中的两静止平行平板间的流体流动, 流道壁面要设置壁面边界条件. 当然, 壁面边界条件也常常用于流体及固体区域, 如图6.14中流动域内台阶的边界描述以及图6.15中开放流动环境中的两圆筒的边界描述.

对于静止的壁面, 默认为无滑动条件(no-slip condition), 这意味着在固体壁面处流体速度设置为0, 即流体在固体壁面处是静止的. 我们也可以尝试在固体壁面处建立自由滑动边界条件(free-slip condition), 即假设壁面处的流体流动平行于壁面. 这种边界条件与连续性方程中的流体黏度相关, 对于黏性流动, 当流体接近壁面连续模型被破坏时, 采用

这种边界条件．对于一般流体流动问题，当流域内热量传递占主导时，在数值模型的固体壁面上必须设置特定的边界条件(如绝热壁面或局部热流量)，来恰当地反映真实物理模型固体壁面的传热特性．

对于具有运动或旋转的壁面，边界条件需要与固体壁面一同运动．上盖运动的空腔以及流体中的旋转圆筒如图 6.19 所示，它们是 CFD 中运动边界的典型实例．对于这类边界问题，允许空腔上边界设置正的或负的切向速度，在旋转圆柱表面周围设置顺时针或逆时针圆周速度．对于其他更为复杂的 CFD 问题，如容器内搅拌液体的旋转叶轮或者海浪对船体的冲击等，则需要应用滑动网格(sliding meshes)或动网格(moving meshes)来模拟其中的运动．滑动网格或动网格的使用已经超出了本书的介绍范围，有兴趣想了解更多内容的读者可参考其他资料 (Ferzige，Peric，1999)．



(a) 上盖运动的空腔 (b) 流体中的旋转圆筒

图 6.19 具有运动或旋转壁面的流体流动实例

6.3.5 对称和周期性边界条件

当流动问题的几何形状具有对称或周期性变化的特性时，可以简化为只求解流域中的一部分．

当几何形状和流场为镜面对称时，可采用对称边界条件．在对称平面上，必须满足如下要求：

- 法向速度为 0；
- 所有输运变量的法向梯度皆为 0.

考查如图 6.20 所示的方形管道中空气的流动问题．因为只模拟四分之一的流动区域，所以对称平面的应用可以大量减少计算工作量．在实际应用时应特别注意进口和出口边界上质量流率的设定．因为对几何形状进行了简化，因此，在入口和出口边界上的质量流率应设置为实际质量流率的 1/4.

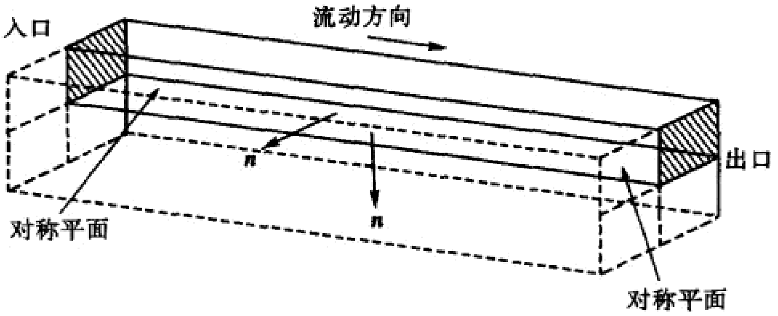
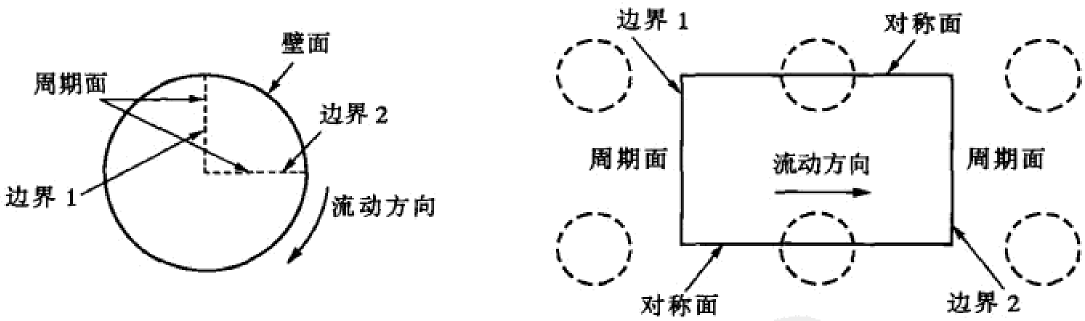


图 6.20 方形管道中空气流动问题中的对称边界条件的应用

在应用周期性边界条件时，周期面必须成对出现．使用这种边界条件时，不仅要求几何形状相同，而且对应周期面上的网格分布也必须相同．在 CFD 应用中，这种条件意味着一个周期面的流出等于另一个周期面的流入．对于图 6.13 中的静止平行平面间的流体流动或者图 6.20 中方形管道中的空气流动这样的边界，入口和出口边界也可以表述为周期面．此时，离开出口边界的流场与流入入口边界具有相同的流场．图 6.21 显示了周期性边界条件的其他应用实例：流体在混合容器中的流动以及流过同轴分布的热交换器管束．对于前者，我们知道，流场是旋转或者柱形周期性变化的，离开边界 2 的流场设置为边界 1 的入口流动条件．而对于后者，流场被认为是按周期性转换的，离开边界 2 的流场用来作为边界 1 的入口流场．这种流动实例与前面受壁面限制的流动非常相似．



(a) 混合釜　　(b) 热交换器管

图 6.21 周期性边界条件的应用实例

6.4 湍流模型

6.4.1 湍流建模方法回顾

有关湍流的相关特性已经在第 3 章中作了讨论和描述．读者可以回到 3.5.1 节中重温其中的各个方面．简单地讲，湍流具有高度不稳定性和随机性．我们还知道，湍流在混合

过程中具有大的相干结构(coherent structures). 由于湍流在相当大的空间和时间尺度范围内存在脉动，因此从建模的角度来看，对湍流流动进行直接数值模拟是非常困难的. 而实际工程中常常遇到湍流问题. 与层流相比，湍流一般需要占用更多的计算资源. 基于理论研究和工程设计的目的，CFD 研究者和工程师期望能够了解和预测湍流对流动产生的影响. 本节中，我们将介绍目前已经发展和应用的多种湍流模型.

6.4.1.1 高级技术

最精确的湍流模拟方法是只对控制方程进行离散，但不作任何平均或近似而直接求解. 通过这种方法，流动中所有流体的运动尺度都可被求解. 该方法就是我们通常所说的直接数值模拟(direct numerical simulation, DNS). 因为 DNS 需要获得所有重要的湍流结构信息(也就是说，计算区域需要提供最小和最大的湍流涡旋结构)，这样的话，计算量是非常巨大的. 我们还有另一种方法，将湍流流动看成由大小两个不同级别旋涡群构成的运动. 图 6.22 为这种流动的示意图. 由于大旋涡运动通常比小旋涡流动更具有活力，是流动特性的主要传递者，因此，在计算时对大涡作精确模拟而对小涡作某种近似的处理方法得到了广泛认同. 这种方法即为大涡模拟(large eddy simulation, LES). 尽管大涡模拟仍然耗费时间，但比起 DNS 则节省了很多时间. 因为 DNS 更准确，所以一般认为 DNS 是首选的方法. 然而，对雷诺数太大或几何形状太复杂不能应用 DNS 的流动问题，LES 则是首选的方法.

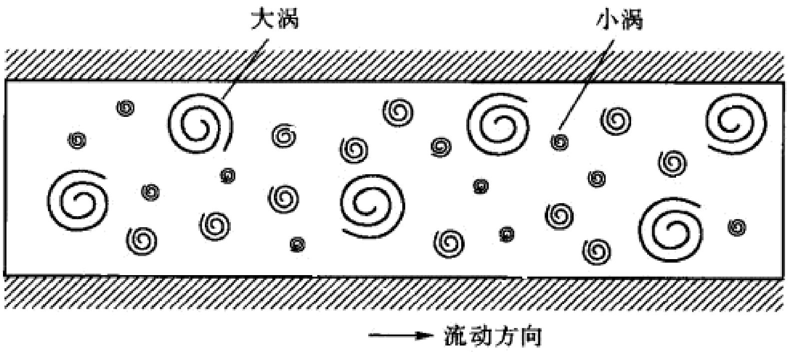


图 6.22 湍流流动示意图

DNS 或 LES 的模拟结果包含非常细微的流动信息，大的空间尺度和时间尺度范围内流动的描述，可以对流动产生正确的认识. 对于实际设计来说，工程师并不需要如此多的信息. DNS 和 LES 方法通常需要大量地使用计算资源、巨量的数值计算和大量的网格节点，往往导致这两种方法不能成为可用的设计工具. 因此就产生了一个疑问，即这两种方法的可用性以及在 CFD 中的作用. 因为包含巨量信息，所以 DNS 和 LES 作为一种研究工具能对流动的物理特性提供定性了解，也能构建定量模型来计算其他相似的流动. 更为重要的是，在某些场合中，可以帮助改进现有的湍流模型. 我们将在 7.4.5 节中演示 DNS 作为研究工具在一些空气动力学中的应用.

6.4.1.2 实用技术

对于绝大多数工程问题，并不需要像DNS和LES那样求解湍流脉动的细节．通常来说，湍流流场的时均值对湍流流动特性的定量化描述已经足够．在一般CFD程序中使用的湍流模型，必须具有宽泛的适用性、简单、精确、具有鲁棒性以及节省计算时间等特性．

在第3章中，Launder和Spalding(1974)应用Reynolds平均法推导了两方程湍流模型——标准 k-ϵ 模型．该模型已得到了广泛的应用，获得的计算结果在很多工业相关流动中得到了证实．然而，由于该模型不能完全描述流线弯曲对湍流的细微影响，因而应用受到了一定的限制，特别是对大量、快速及高应变(如高曲率边界层以及分路)等流动问题更是如此．该模型的这一弱点已经由第5章5.7.2节中的实例得到了证明．实验结果表明，Reynolds应力模型(Reynolds Stress Model)可以更好地捕获流动流经90°弯管分离区域的各向异性行为．标准 k-ϵ 模型使用了涡黏系数的概念，假设湍流应力与湍流应变成比例，比例系数为湍流黏度，而且主应变方向与主应力方向一致，也就是各向同性．由于缺少对法向应力的处理，因此无法正确预测90°弯管内由各向异性法向雷诺应力驱动产生的二次流．

Reynolds应力模型，也被称为二阶矩(second-moment)模型，没有采用湍流黏度的概念，而是通过直接求解各湍流应力分量的输运方程来确定湍流应力．这就需要求解6个附加方程($\overline{u'^2_1}$，$\overline{u'^2_2}$，$\overline{u'^2_3}$，$\overline{u'_1u'_2}$，$\overline{u'_1u'_3}$及$\overline{u'_2u'_3}$)．我们可根据第3章方程式(3.57)来求解这6个方程，确定Reynolds应力场的方向效应．对湍流耗散 ϵ，还要增加1个方程：求解长度尺寸．为全面了解上述湍流应力模型，有兴趣的读者可参见Launder等(1989)以及Rodi (1993)著作的相关章节．应用类似的方法，通过直接求解3个附加方程就可以确定湍流热流量，每一个方程描述每一通量分量，从而消去湍流普朗特数．毫无疑问，Reynolds应力模型比两方程模型具有更大的潜力，能更准确地描述湍流流动现象．这种模型可以处理更复杂的应变，并且理论上可以处理非稳态流动问题．该模型的缺点是：由于控制方程过多，因此可能会导致非常巨大的计算量．到目前为止，该模型的应用也有一些局限，特别是对非对称、自由循环流动问题的求解，该模型同标准 k-ϵ 模型同样不适用．

当前，对湍流模型的研究工作仍在不断进行，新的湍流模型不断被提出．在工业中涉及的湍流状态是大量的、复杂的和多变的．到目前为止，还没有一个湍流模型能够普遍适用于所有的湍流流动状态．因此，Bradshaw (1994)将湍流称为“创世纪第七天上帝没留神之时由魔鬼所创作的”．由于湍流难于处理，因此我们将在随后一节中，对湍流流动工程问题如何选择合适湍流模型提供一些建议．

6.4.2 湍流模型选择策略

在CFD中，不同湍流需要应用不同的湍流模型．在开始作湍流分析时，由于缺乏足够的知识选择恰当的模型，因此特别推荐使用两方程模型，如标准 k-ϵ 模型．因为这一模型不依赖于几何形状以及来流的流动形式，因而提供了最简单的模型使控制方程封闭．之

所以首选标准 k-ε 模型，是因为其计算的鲁棒性和稳定性，而且在一些应用中，与其他复杂的湍流模型一样能够获得良好的计算结果．大多数自编或商业软件都将标准 k-ε 模型设置为处理湍流问题的默认选择．这毫不奇怪，因为它是工业界应用的标准模型，并且仍然还是工业界计算的重要方法．

然而，如前所述，标准模型有其自身的弱点．因此，有必要把与此模型相关的弱点一一列出，以减弱这些缺点的影响，改进数值模拟效果．下面给出的简短建议只是一种推荐，不应视为最终判定而替代对标准 k-ε 模型的系统研究．这些建议也不能保证获得明显的改进效果．对于特定求解的 CFD 问题，仔细进行模型验证(validation)和确认(verification)是充分证明湍流模型适用性的必要步骤．

6.4.2.1 标准 k-ε 模型的弱点

标准 k-ε 模型中的 5 个可调常数 c_μ，σ_k，σ_ε，$c_{1\varepsilon}$，$c_{2\varepsilon}$虽经大量的湍流流动数据所校正，但都是针对简单的几何形状．该模型在剪切层流动、循环流动以及管道流动中已经得到了成功的应用．但对于某些流动，使用标准 k-ε 模型得到的结果会很差，尤其是含有下述流动的情形：

- 流动分离(Baldwin，Lomax，1978)；
- 流动再附着(Kato，Launder，1993)；
- 流动恢复(Ince，Launder，1995)；
- 某些自由流动(如自由喷射)(Apsley 等，1995)；
- 复杂几何形状中的二次流(Ferziger，Peric，1999)．

我们以前面描述的背向台阶流动问题为例，说明减少标准 k-ε 模型弱点的特殊技巧．我们知道，用标准 k-ε 模型预测湍流流动中的再附着长度 l_r(见图 6.23)通常是困难的，其原因在于湍流动能被过高预测．随着流动的展开，在台阶上游的高湍流预测将传递到下游，在其影响下，随后的真实边界层发展逐渐被掩盖掉了．为说明问题，我们使用其他一些成功的湍流模型，比如由 Yakhot 等人于 1992 年提出的 RNG k-ε 模型以及由 Shih 等人于 1995 提出的 reliazable k-ε 模型为例，证明对数值预测效果的改进．

对于这一流动问题，应用商业 CFD 软件 FLUENT 6.1，通过对二维质量守恒方程和动量守恒方程的求解来预测定常连续气相流动．计算域包括台阶前的 $12h$(长度)×$1h$(宽度)和台阶后的 $50h$(长度)×$2h$(宽度)．在自由来流流动速度 u_∞为 40m/s 以及台阶高度为 h 的条件下，雷诺数为 64000．

在对计算结果讨论之前，有必要说明各湍流模型之间的不同之处．RNG k-ε 模型包括一个修正的 ε 方程，其源项为

$$S_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k}(c_{\varepsilon 1}P - c_{\varepsilon 2}D) - R. \tag{6.7}$$

在标准 k-ε 模型中，没有上述方程中的应变率 R 项(试与第 3 章中方程(3.56)作比较)．R 可由下式表示：

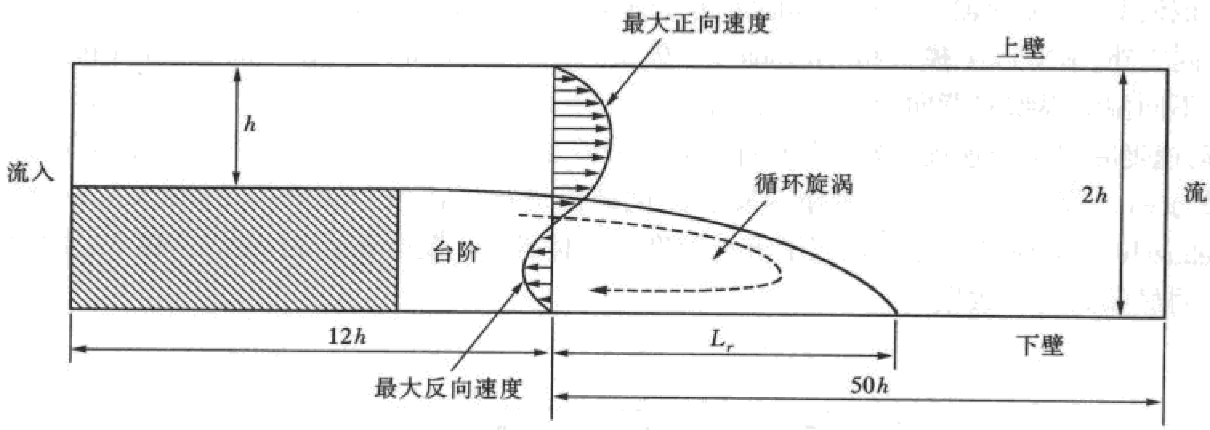


图 6.23 背向台阶几何形状再附着长度位置以及台阶前后尺寸示意图

$$R=\frac{c_\mu\eta^3(1-\eta/\eta_O)}{1+\beta\eta^3}\cdot\frac{\varepsilon^2}{k}. \tag{6.8}$$

式中，常数 $\beta=0.015$；$\eta_O=4.38$.

该项的意义是反映快速应变以及流线弯曲对流动的影响，而标准 k-ε 模型对此不能进行恰当的描述. 根据 Yakhot 和 Orzag 于 1986 年提出的重正化群理论（renormalization group theory），湍流输运方程中的常数为

$$c_\mu=0.0845,\quad \sigma_k=0.718,\quad \sigma_\varepsilon=0.718,\quad c_{\varepsilon1}=1.42,\quad c_{\varepsilon2}=1.68.$$

对于 reliazable k-ε 模型，"reliazable"表示模型在法向应力上满足与湍流流动物理特性相一致的某些数学约束. 在该模型中，包括变量 c_μ 的涡黏系数公式. 不同之处还有传输 ε 方程的变化(基于均方涡旋脉动的动力学方程)，此时可根据下式求解源项：

$$S_\varepsilon=C_1\rho(2S_{ij}^2)^{1/2}\varepsilon-C_2\rho\frac{\varepsilon^2}{k+\sqrt{\nu_T\varepsilon}},\qquad S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{6.9}$$

式中，变量 C_1 可表示为

$$C_1=\max\left[\frac{\eta}{\eta+5}\right],\qquad \eta=\frac{k}{\varepsilon}(2S_{ij}^2)^{1/2}.$$

而 c_μ 不再是常数，由下式表达：

$$c_\mu=\frac{1}{A_O+A_s\dfrac{kU^*}{\varepsilon}}. \tag{6.10}$$

模型常数 A_O 和 A_s 为

$$A_O=4.04,\quad A_s=\sqrt{6}\cos\varphi,\quad \varphi=\frac{1}{3}\arccos(\sqrt{6}W),\quad W=\frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{\tilde{S}^3},\quad \tilde{S}=\sqrt{S_{ij}^2}.$$

参数 U^* 由下式给出：

$$U^*\equiv\sqrt{S_{ij}^2+\tilde{\Omega}_{ij}^2},\quad \tilde{\Omega}_{ij}=\Omega_{ij}-2\epsilon_{ijk}\omega_k,\quad \Omega_{ij}=\tilde{\Omega}_{ij}-\epsilon_{ijk}\omega_k.$$

该模型中，湍流输运方程的其他常数分别为：$C_2=1.9$，$\sigma_k=1.0$ 和 $\sigma_\varepsilon=1.2$. 除了模型常数不同之外，RNG k-ε 模型和 reliazable k-ε 模型的 k 方程与标准 k-ε 模型的 k 方程相同.

不同湍流模型对背向台阶后而距台阶 $x/H=0$，1，3，5，7，9 位置处，无量纲速度(流动速度除以来流速度)分布的预测结果如图 6.24 所示. 为了验证数值预测，数值计算结果与 Ruck 等人于 1988 年所作的实验测试结果进行了比较. 从中可见，RNG k-ε 模型和 reliazable k-ε 模型很好地预测了流动速度，而标准 k-ε 模型在$x/H=5$，7 和 9 处的预测结果明显偏离实验数据.

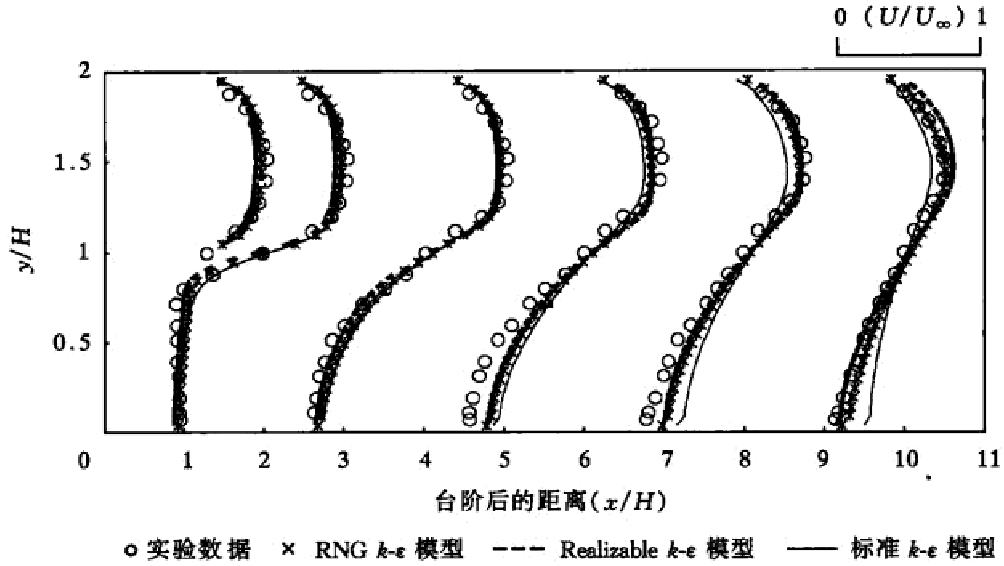


图 6.24 背向台阶中，台阶后 $x/H=0$，1，3，5，7，9 处的无量纲速度分布

图 6.25 中显示了同样条件下，回流流动区域中最大反向速度的分布. 三种湍流模型对最大反向速度的预测结果大大低于实验值. 在三个模型之中，reliazable k-ε 模型的重附着长度预测最接近实测值(预测值为 $x/H=8.2$，实测值为 $x/H=8.1$). 观注图 6.23 中的重附着长度 l_r. RNG k-ε 模型的预测值为$x/H=8.5$，略微高估了重附着长度；标准 k-ε 模型的预测值为$x/H=6.9$，严重低估了重附着长度.

如前所述，标准 k-ε 模型通常高估回流区域内的气体湍动能k，这将导致湍流黏度 $\nu_T=(c_\mu k^2/\varepsilon)$的增高. 图 6.26(a)表示了三种模型对 $x/H=5$ 处无量纲湍动能 k 分布的预测结果，图 6.26(b)给出了三种模型对同一位置处无量纲湍流耗散率 ε 分布的预测结果. 很明显，标准 k-ε 模型在回流区域中预测了较高的湍流动能. 这一结果导致了标准 k-ε 模型中湍流的过度混合，并明显减弱了这一区域中的湍流强度(Murakami 在 1993 年也对此进行了证实). 另一可能原因是标准 k-ε 模型中的ε 输运方程. RNG k-ε 模型和 reliazable k-ε 模型对ε 输运方程进行了修正，k 产生率和ε 耗散率都将降低从而减小了涡黏，就可以处理大的流动变形问题. 我们注意到，尽管湍流耗散率 ε 被 RNG k-ε 模型和 reliazable k-ε 模型[见图 6.26(b)]低估，由于 k^2 与湍流黏度的关系，而标准 k-ε 模型预测的湍动能k 较

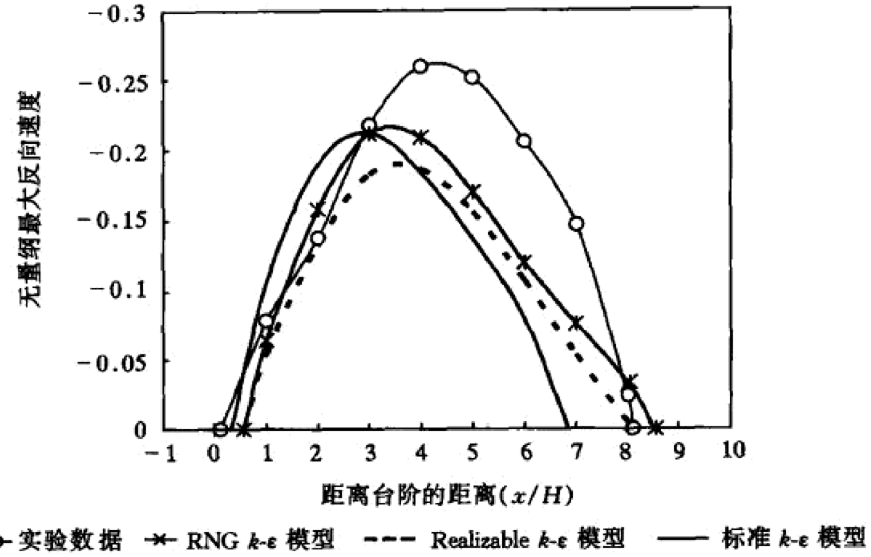


图 6.25 循环区域中最大反向速度分布实测值和预测结果的对比

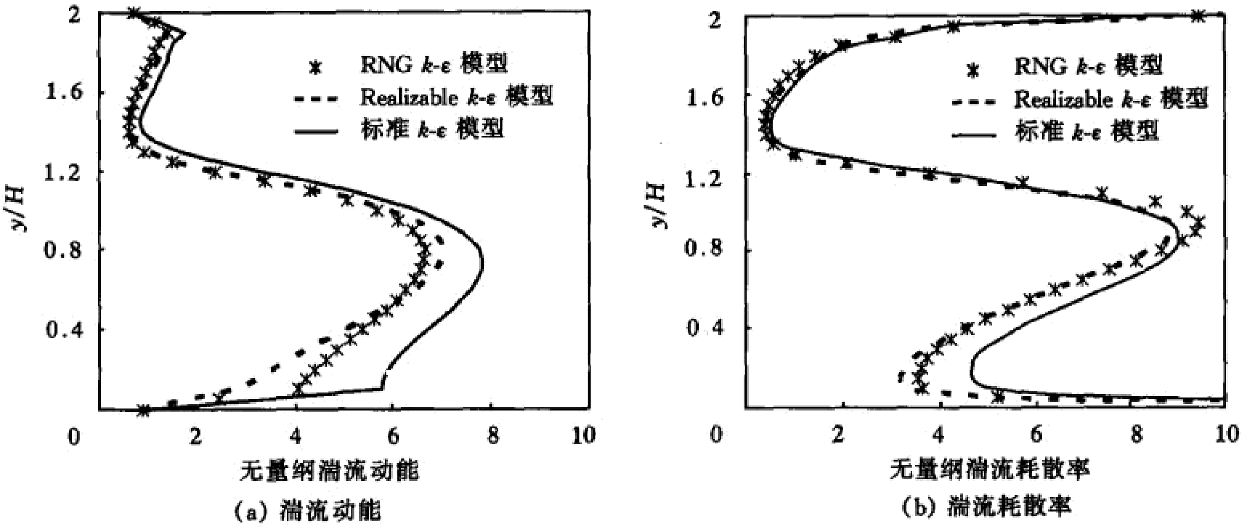


图 6.26 位置 $x/H=5$ 处(在循环区域内)无量纲参数分布

高，这两个模型预测的湍流黏度比标准 k-ε 模型预测的要低得多.

6.4.2.2 其他建议

紧靠壁面的边界层被称为黏性亚层，该区域内黏性影响变得很突出. 我们注意到，两静止平行平板或背向台阶等简单流动中存在壁面黏性边界层，湍流脉动在壁面处被抑制. 湍流结构在壁面处的这种变化导致近壁面处不能应用标准 k-ε 模型、RNG k-ε 模型、reliazable k-ε 模型及 Reynolds 应力模型等两方程模型，因此，需要有特殊的近壁面模型. 对合适近壁面模型的选择是湍流建模中的另一个重要方面. 读者可根据计算资源以及边界层求解精度要求确定是采用壁面函数来描述近壁面区域流动的“壁面函数方法”（wall-func-

tion method)，还是采用低雷诺数模型(low Reynolds number turbulence model)求解黏性亚层中的流动结构．本节中对近壁面处使用低雷诺数模型的相关应用给出一些有用的建议．下节中将对使用壁面函数方法处理近壁面作出更多的讨论和实际指导．

k-w 模型由 Wilcox 于 1998 年提出，其中，ω 为大涡频率，可以很好地描述近壁面内的边界层流动．在大多数商业软件中通常都采用这一模型，并且在大的反向压力梯度(adverse pressure gradients)条件下表现得尤为出色，这也就是它为何在航空界很有名气的原因．同标准 k-ε 模型一样，它也是采用输运方程来求解 ω，以确定其在流体流动中的局部分布．然而，该模型对来流的 ω 值非常敏感，对该值的设定必须非常小心，否则在边界层流动和自由剪切流动中的计算结果会出错．一般来说，标准 k-ε 模型对来流条件不敏感，但常常不适用于反向压力梯度条件下的流动分析．为克服上述问题，Menter (1994a, 1994b)提出了标准 k-ε 模型和 k-ω 模型组合模型，保留了 k-ω 模型的近壁面特性，在离开壁面后逐渐融入了标准 k-ε 模型．Menter 模型消除了对来流的敏感性问题，并且保持了 k-ω 模型的近壁面描述优势．

为处理强非平衡(strong non-equilibrium)现象，Menter 模型(1993，1996)的剪应力传递(Shear Stress Transport，SST)对处理激波之后和接近分离区的非平衡边界层流动有显著的改进．基于剪应力传递的 Menter 模型对分离流动的计算结果与真实流动情况非常接近，比标准 k-ε 模型要好用得多，因此特别推荐采用该模型处理分离流动．必须注意，SST 并不是解决湍流建模的万用良药，因为它仍然存在明显的弱点．例如，SST 处理伴随流动重附着的流动恢复(flow recovery)问题的能力就差一些．对此问题，应该使用 Ince 和 Launder 于 1995 年提出的尺度限定方法(length-scale limiting device)．希望有兴趣的读者参看 Patel(1985)关于标准 k-ε 模型和 Reynolds 应力模型中各种低雷诺数模型的应用，通过修正控制方程，可以直接采用这些模型处理近壁面效应．标准 k-ε 模型或 Reynolds 应力模型能与主要用于求解壁面区域的一方程 k-L 模型(Wolfshtein，1969)(见 Rodi 1991 年的综述)相耦合，称为双层模型(two-layer model)．无论是否采用低雷诺数模型，都必须在近壁面区域划分大量的网格以捕获流动参数的快速变化．

6.4.3 近壁面处理

处理壁面约束的湍流流动问题，必然需要有合适的近壁面模型．除了那些可应用到近壁面的湍流模型之外，还可以采用壁面函数(wall functions)建模．该函数在工程实践中普遍使用，并且应用到几乎所有的商业和自编 CFD 程序中．通过该方法，近壁面区域流动问题不是由数值模拟直接求得，而是把数值模拟与壁面函数相结合(Launder，Spalding，1974；Wilcox，1998)．为说明建模过程，首先考查具有光滑壁面的流动域，对粗糙壁面的处理将作为特例随后论及．

为构建壁面函数，通常用与壁面局部状态相关的无量纲变量项对近壁面区域进行描述．如果我们设 y 为距壁面的垂直距离，U 为平行壁面的时均速度，那么，无量纲速度

U^+和无量纲壁面距离 y^+ 可分别用 U/u_τ 和 $y\rho u_\tau/\mu$ 来表示．其中，壁面摩擦速度 u_τ 定义为壁面剪应力 τ_w 的函数，为$\sqrt{\tau_w/\rho}$．如果接近壁面的流动只由壁面条件决定，那么，对于一定范围内变化的无量纲壁面距离 y^+，无量纲速度 U^+可认为是 y^+的通用壁面函数，可表示为

$$U^+=f(y^+). \tag{6.11}$$

当壁面距离 $y^+<5$ 时，为黏性力控制的流层，产生无滑移条件，被称为黏性亚边界层(viscous sublayer)．我们可以假设剪应力近似为常数，并且与壁面剪应力 τ_w 相等，则可以获得时均速度和离壁距离的线性关系，利用 U^+和 y^+的定义可得

$$U_+=y^+. \tag{6.12}$$

湍流扩散在黏性亚边界层外产生影响，并且通常采用对数关系来计算：

$$U^+=\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+). \tag{6.13}$$

上述关系常被称做对数律(log-law)，距壁面 $30<y^+<500$ 范围内的流层称为对数律层(log-law layer)．图 6.27 证实了方程(6.12)和(6.13)在湍流边界层中的有效性．κ(～0.4) 和 E(～9.8)为高雷诺数湍流流经光滑壁面时的普适常数．对于粗糙表面，方程(6.13)中的常数通常要减小．此外，还必须从试验数据或文献中选择合适的等效粗糙高度(equivalent roughness height) h_O 的数值，对壁面定律中的垂直壁面距离进行修正(即用 y/h_O 代替 y^+)．相似地，对热通量和其他标量通量也可以建立无量纲函数．当求解能量和标量方程(scalar equations)时，该函数能用于处理近壁面区域内的流动．

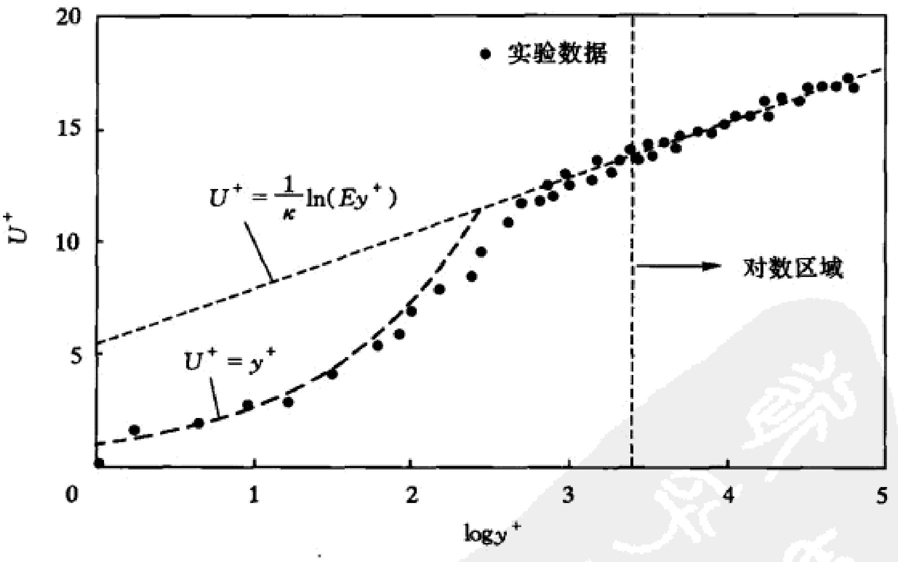


图 6.27 湍流边界层：不同壁面函数的无量纲速度分布与实验数据的对比

读者应该注意，上述普适分布是源于低压力梯度、湍流局部平衡(k 方程的产生率等

于其耗散率)、近壁面应力为常数等假设的二维无分离Couette 流动．因此，在求解 CFD 问题时，总要仔细检查壁面函数的正确性．壁面函数涉及区域内的流动必须与特定的假设条件一致或几乎一致．不能在壁面函数应用区域之外应用该函数，否则会造成 CFD 求解的严重错误．

为了克服上述标准壁面函数的一些局限性，也可采用双层(two-layer-based)、非平均壁面函数(nonequilibrium wall function)．对这种壁面函数表达式的深入讨论可参见 Kim 和 Choudbury(1995)的论述．简单说来其要点为：①此时对数律与压力梯度密切相关；②采用基于双层概念来计算近壁单元中湍流平均动能的产生及耗散．基于后者，近壁单元湍流动能的预测与黏性亚层以及完全湍流层(fully turbulent layer)密切相关．其中，湍动能在强非平衡流动状态下，网格单元间的湍流动能变化会很剧烈．这有效地减缓了标准壁面函数中采用的局部湍流平衡的影响．由于非平衡壁面函数可以在一定程度上解决压力梯度以及非平衡问题，因此对于包括流动分离、再附着流动以及冲击流动等复杂的流动问题，推荐使用该方法．在这些流动中，非平衡壁面函数的应用大大改进了 CFD 的求解，特别是显著地改进了壁面剪力和热传递的求解．我们注意到，前面 6.4.2 节背向台阶湍流问题求解实例中，即是应用了非平衡壁面函数对流动问题求得的结果．另一个有用的近壁模型方法是双层模型和强化壁面函数组合的强化壁面处理方法．这种方法的主要目的是为了对精细网格实施标准双层方法，同时又不明显降低对粗糙网格的计算精度．通过将壁面定律描述为整个壁面区域的单一壁面定律，可以将强化的壁面函数拓展到近壁面区域．将壁面的线性定律和对数定律混合，可得

$$U^+ = e^{\Gamma} U^+_{\text{lam}} + e^{1/\Gamma} U^+_{\text{turb}}. \tag{6.14}$$

式中，Γ 为混合函数(blending function)．

同理，$\partial U^+/\partial y^+$ 的通用方程也可以描述如下：

$$\frac{\partial U^+}{\partial y^+} = e^{\Gamma} \frac{\partial U^+_{\text{lam}}}{\partial y^+} + e^{1/\Gamma} \frac{\partial U^+_{\text{turb}}}{\partial y^+}. \tag{6.15}$$

上述方程使湍流定律得到修正和拓展，可以处理压力梯度或物性变化对流动的影响．同时，对壁面距离不同的 y^+ 值也能保证正确的近似，在 y^+ 处于壁面缓冲区域(buffer region)($3 < y^+ < 10$)内仍具有合理的表述．关于该方法的更多细节，可参见 Kader 的论述(1993)．

壁面函数与近壁网格划分：由于壁面函数的使用与近壁面第一个网格节点上流动变量有关，因此为避免求解两者间的关系，节点 y^+ 的下限必须小心设置使之不要落入黏性亚层之中．在这种情况下，网格应该合理布置，使所有近壁节点的 y^+ 值均略大于推荐的界限，通常在 20～30 之间．这样就能很好地求解边界层中的湍流．除了检查 y^+ 的下限，在数值计算过程中对 y^+ 上限的研究同样重要．例如，对中等雷诺数流动，其边界层 y^+ 值扩展到 300～500．如果第一个近壁点设置为 $y^+ = 100$，那么，由于对此区域求解不够充

分，因此所求得的解就不够精确．边界层的确定通常需要至少8～10个网格节点层，并且建议对CFD计算结果进行分析，确定是否已获得足够的求解精度，是否还要对精细网格进行进一步的流动计算．这要视湍流扩散与分子扩散(由于分子黏性)之间的比率(该比率在边界层内通常较高)的大小来确定．

低雷诺数湍流模型与近壁网格划分：在低雷诺数流动中，当y^+值在一定范围内变化时，近壁流动行为会有所不同．在这种情况下，壁面函数的概念不再适用，使用壁面函数将产生重大误差．对近壁面流动求解的可行方法包括采用前述的低雷诺数湍流模型等．但因为需要更多的网格节点，所以计算时间比使用壁面函数约高一个数量级．为了求解湍流边界层中的黏性亚层，接近壁面的第一个节点y^+值的设置应接近单元尺度(即$y^+=1$)．当然，只要在黏性亚层中，y^+值也可以大一些，如$y^+=4$或$y^+=5$．要详细求解平均速度和湍流量，根据雷诺数，在壁面到$y^+=20$位置(黏性影响范围)之间应保证5～10个网格节点．为获得适当的边界层结果，在边界层内应该要有30～60个网格节点层．

6.4.4 边界条件设置

设定合适的边界条件在湍流建模中十分重要．本节中，我们考查处理流动域内不同类型边界的各种方法，并且对合适的湍流边界条件设置提供一些有用的指导．

在很多实际CFD问题中，在入口处指定湍流值可能是相当困难的，并且需要运用一些合理的工程判断．其原因在于湍动能k及其耗散率ε的大小对CFD的求解会产生重要影响．在大多数情况下，对入口k和ε进行测量是不切实际的．在对湍流模型的计算尝试中，常常缺乏可用的边界条件．k和ε作为入口边界条件时，最好采用实验验证值．当然，如果实验值难以获得，那么入口边界条件需要采用合理的工程假设加以确定，并且必须对选择的值进行灵敏度测试．湍流动能k可以通过湍流强度(turbulence intensity)I(速度波动与平均速度的比率)来确定．通常，入口湍流是来流条件的函数．k的近似值可由下式确定：

$$k_{\text{inlet}}=\frac{3}{2}(U_{\text{inlet}}I)^2. \tag{6.16}$$

在流经机翼的外流气流中，湍流强度一般为0.3%．对于大气边界层流动，其湍流强度值可能高出两个数量级，即为30%．在内流中，湍流强度一般认为在5%～10%．与湍动能类似，湍流耗散率ε可由如下假设来确定：

$$\varepsilon_{\text{inlet}}=c_\mu^{3/4}\frac{k^{3/2}}{L}. \tag{6.17}$$

式中，L为特征长度．

如果采用k-ω模型，那么ω可近似为

$$\omega_{\text{inlet}}=\frac{k^{1/2}}{c_\mu^{1/4}L}. \tag{6.18}$$

对于远离边界层的外部流动，由假设确定的湍流黏性与分子黏性比值在1～10之间为合理范围．对于内部流动，由特征几何尺寸得到的尺度常数可采用入口直径的1%～10%．如果采用Reynolds应力模型，那么入口处的每一个应力元素($\overline{u'^2_1}$，$\overline{u'^2_2}$，$\overline{u'^2_3}$，$\overline{u'_1u'_2}$，$\overline{u'_1u'_3}$及$\overline{u'_2u'_3}$)都需要合理确定．如果这些量难以确定，通常对角线上的元素($\overline{u'^2_1}$，$\overline{u'^2_2}$，$\overline{u'^2_3}$)取$\frac{2}{3}k$，而非对角线元素($\overline{u'_1u'_2}$，$\overline{u'_1u'_3}$，$\overline{u'_2u'_3}$)设为0(假设为各向同性湍流)．当指定合适的来流湍流量有困难时，来流边界应该充分远离感兴趣的流动区域，这样，入口边界层以及随后的湍流能得到充分发展．

对于固体边界，采用低雷诺数湍流模型或壁面函数方法时，k和ε或ω的边界条件会有很大的不同．当采用低雷诺数湍流模型时，壁面处湍流动能$k=0$，而湍流耗散率则由下式决定：

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n}=0 \quad 或 \quad \varepsilon=\left(\frac{\partial v_t}{\partial n}\right)^2. \tag{6.19}$$

式中，v_t为壁面的切向速度．

对于k-ω模型，可采用Wilcox(1993)提出的粗糙表面模型(rough-wall method)．表面值可写成如下形式：

$$\omega_{\text{wall}}=\frac{u_\tau}{\nu_{\text{wall}}}S_R. \tag{6.20}$$

式中，变量ν_{wall}是壁面上的运动黏度；S_R是由表面粗糙程度决定的无量纲函数．

当采用壁面定律(law-of-the-wall)类边界条件时，通过壁面k的通量为0，即

$$\frac{\partial k}{\partial n}=0. \tag{6.21}$$

而湍流耗散率ε由湍流局部平衡假设来确定．注意，在壁面处不使用ε，但从第一个网格节点开始就要计算该值．对于有限体积方法，控制体体积中心处的ε_P按下式计算：

$$\varepsilon_P=\frac{c_\mu^{3/4}k_P^{2/3}}{\kappa n_P}. \tag{6.22}$$

式中，n_P为壁面法线方向上的第一个计算网格节点．

在某些场合中，应用非平衡壁面函数，则ε_P由下式计算：

$$\varepsilon_P=\frac{1}{2n_P}\left[\frac{2\mu}{\rho y_v}+\frac{c_\mu^{3/4}k_P}{\kappa}\ln\left(\frac{2n_P}{y_v}\right)\right]k_P. \tag{6.23}$$

其中，y_v为物理黏性亚层的厚度，由$y^*\mu/(\rho c_\mu^{1/4}k_P^{1/2})$计算，而$y^*$设置为11.225．

关于方程(6.23)程的更多细节，参见Kim和Choudbury(1995)的有关描述．

在出口边界或对称边界处，可应用Neumann边界条件，即

$$\frac{\partial k}{\partial n}=0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial n}=0, \quad \frac{\partial \overline{u'_iu'_j}}{\partial n}=0. \tag{6.24}$$

对于自由流动，计算边界设置在远离感兴趣的流动区域，可用如下流动边界条件：

$$k\approx 0,\quad \varepsilon\approx 0,\quad \overline{u'_i u'_j}\approx 0. \tag{6.25}$$

由上式可得，湍流黏度为 $\mu_T\approx 0$.

6.4.5 算例：翼面流动中的两方程湍流建模

本算例采用有限体积 CFD 计算软件 FLUENT 6.1 进行计算.

6.4.5.1 模型描述

二维翼面的实验段采用宽度为 3.05m、弦长(C)为 2.134m 生成的二维翼面. 横截面形状为中等厚度(t)和拱形(f)的一般海军螺旋桨，即改进的 NACA-16 翼面形状（$t/C=8\%$，$f/C=3.2\%$）. 翼面几何形状的细节如图 6.28 所示，而抗谐鸣(anti-singing)机翼后缘的细节见 Bourgoyne 等(2000). 该翼面的实验是在世界上最大的水槽——美国 Memphis 的 William B. Morgan Large Cavitation Channel (LCC)中进行的.

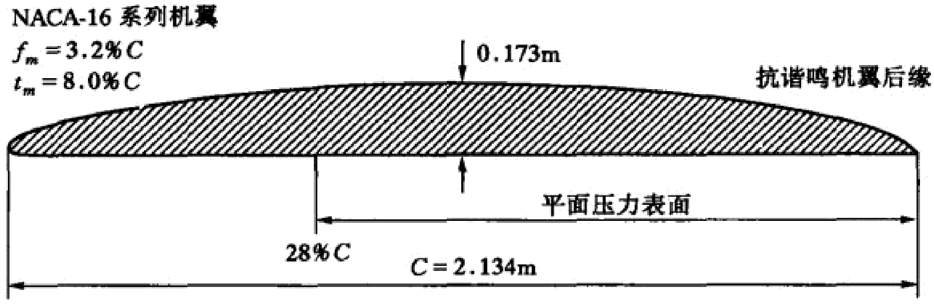


图 6.28 二维翼面几何结构示意图

6.4.5.2 网 格

对于翼面形状，计算区域扩展到翼面前缘上游 $1.5\times C$ 处，压力表面上、下 $1.5\times C$ 处，机翼后缘下游 $3\times C$ 处. 在计算流动域内，采用结构化四边形网格单元. 特别要注意在翼面周围内区域(inner region)网格的生成. 在该区域中，采用 O 型精细网格来求解翼面表面以及边界层区域内的流动. 而对于紧邻机翼后缘的下游尾迹区，则采用 H 型精细网格来精确求解近尾迹以及远尾迹的流动行为. 在计算域的外部，充满粗 H 型网格. 在计算域内共生成 208416 个网格节点，y^+ 的平均值为 2.31，y^+ 的最大值为 4.06、最小值为 0.09. 计算网格如图 6.29 所示.

6.4.5.3 模拟方法

本例不仅要说明选择各种描述流动湍流模型的重要性，而且要评估在高雷诺数条件下，在近壁面区域采用的壁面函数. 采用了三种壁面处理方法：标准对数壁面函数，非平衡壁面函数以及增强壁面处理方法.

Navier-Stokes 方程的解法采用隐式非耦合的速度-压力方程，如 SIMPLE 方法. 用

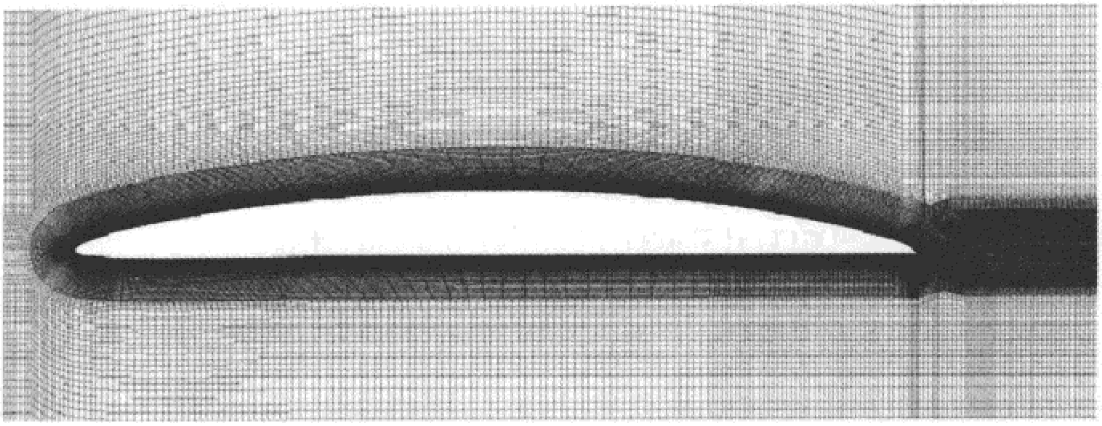


图 6.29 翼面周围的计算网格图

Poisson方程修正压力，并通过默认的迭代求解器对该方程进行求解，在 FLUENT 计算程序中默认的迭代求解器一般为多重网格求解器．控制方程用有限体积离散来近似．为避免压力场在现有网格分布条件下出现非物理振荡，及随之而来的收敛困难，采用 Rhie 和 Chow(1983)提出的插值方法．在对流项计算中采用二阶迎风格式，而在扩散项中采用中心差分格式．

工作流体为水，是不可压缩流体，在模拟计算时，采用计算程序中的默认初始条件．

6.4.5.4 边界条件

入口所有变量均采用 Dirichlet 条件．自由来流速度 U_{ref}设置为常数，取值为 3m/s 和 6m/s．水的密度和黏度分别为 995.1kg/m^3 和 7.69×10^{-4}kg/(m·s)，与上述入口速度以及弦长对应的雷诺数分别为 8.284×10^6 和 1.657×10^7．在自由流动域内，入口速度也应用到计算域翼面上壁面和下壁面上．湍动能 k 和耗散率 ε 由测得的湍流强度 I(约为 0.1%)决定．在出口处，所有输运变量均采用 0 梯度边界条件．上下翼面表面采用无滑移边界条件．

6.4.5.5 计算结果

图 6.30 为使用不同壁面处理方法求得的翼面表面上压力系数分布以及与测量结果的对比．图中压力系数分布的预测结果是采用 reliazable k-ε 模型与三种壁面处理方法配合得到的．显然，不同的壁面处理方法对计算结果产生不同的影响．对于强烈的反向压力梯度以及边界层分离流动，增强壁面处理方法得到的预测结果最精确．标准对数壁面函数获得的预测结果虽然其计算精度稍差一点，但在机翼前后缘处仍然与实际符合得很好．而采用非平衡壁面函数获得的结果是有问题的，特别是在机翼前缘上下表面压力系数分布出现了交叉．

图 6.31 表示自由来流速度为 3m/s，在 93% C 位置处，压力面(下表面)边界层速度分布的预测结果与实验数据的对比．此处也是采用 reliazable k-ε 模型与三种壁面处理方法

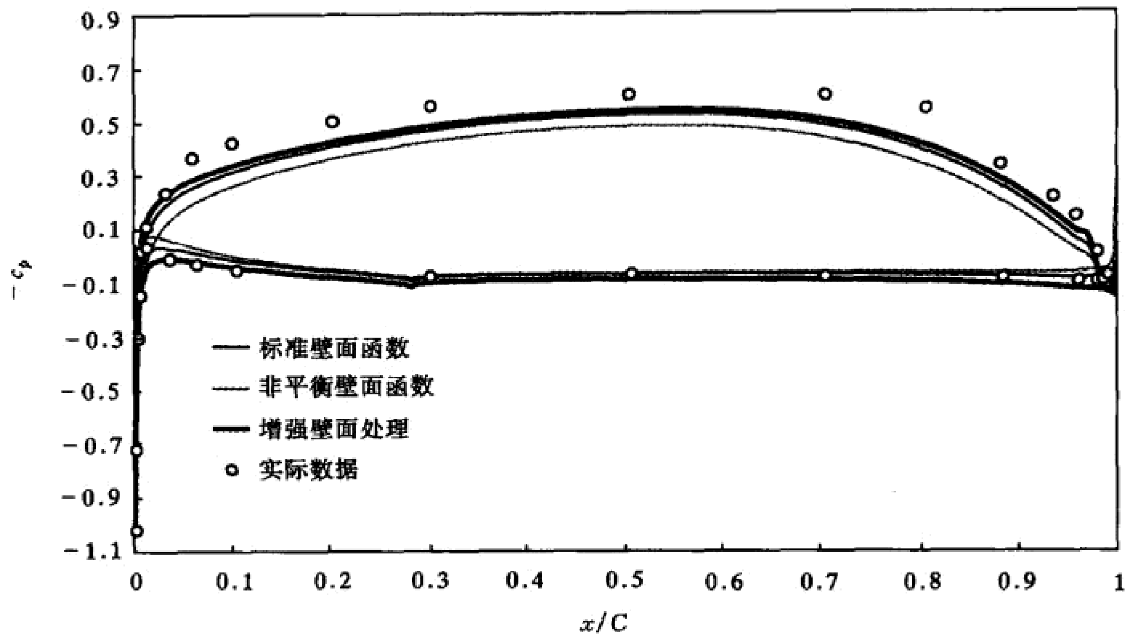


图 6.30 壁面处理方法分析：压力系数(c_p)在翼面表面上的分布(U_b = 3m/s)

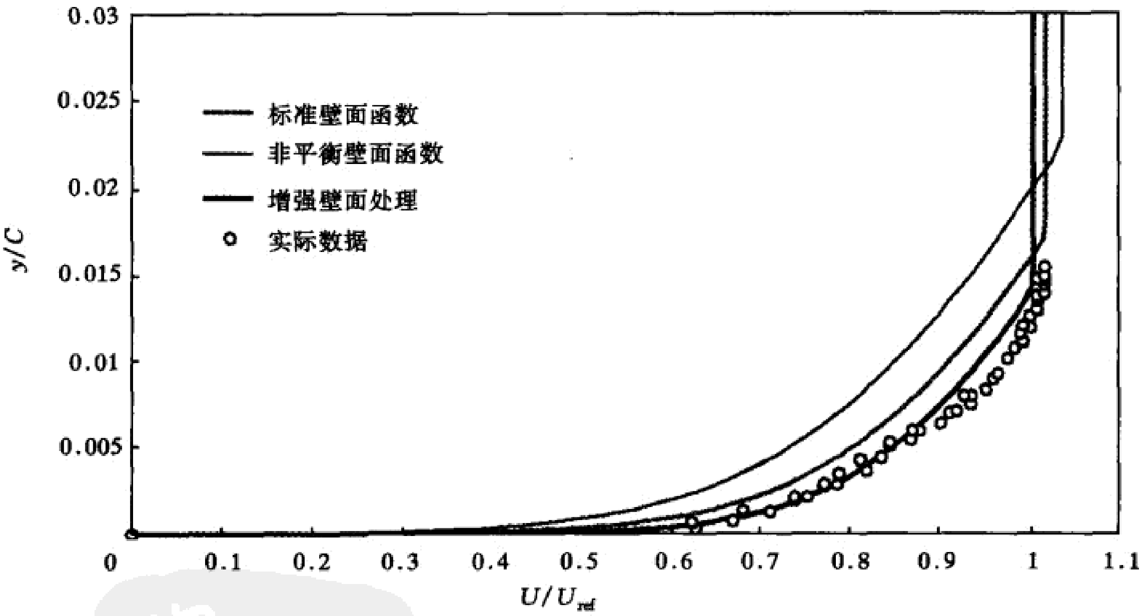


图 6.31 壁面处理方法分析：在 93% C(U_{ref} = 3m/s)处压力表面边界层平均速度分布

一起预测压力面边界层速度分布．正如预计的那样，在近壁区域，使用不同的壁面处理方法获得了不同的速度分布．在三种不同的壁面处理中，增强壁面处理方法与实验有很好的一致性．采用标准对数壁面函数获得的边界层速度分布与增强壁面处理方法获得了相似的结果，只是边界层厚度略大．非平衡壁面函数预测的边界层厚度则更大．

图 6.32 和图 6.33 表示了在 93%C 处，自由来流速度分别为 3m/s 和 6m/s 时，应用不同湍流模型对压力面边界层速度分布的预测结果以及与实测数据的对比．与实验数据相比，很明显，标准 k-ε 模型、标准 k-ω(Wilcox's)模型以及 SST k-ω(Menter's)模型都过高预测了边界层的厚度．只有 reliazable k-ε 模型可以精确地预测边界层速度分布．在近壁面($y/C<0.5\%$)处，该模型对边界层的预测出奇得好，在远离壁面处也与实际数据保持了高度的一致性．与其他模型不同，reliazable k-ε 模型在速度分布变化不大的地方限定了速度梯度的变化．

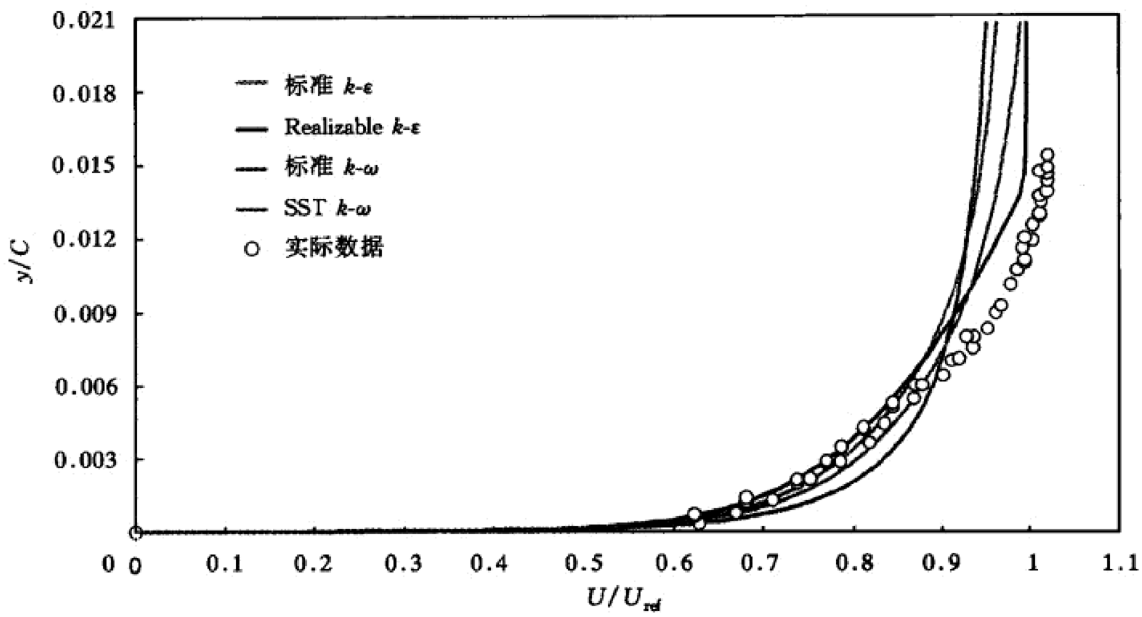


图 6.32　93%C(U_{ref} = 3m/s)处不同湍流模型对压力面边界层平均速度的预测

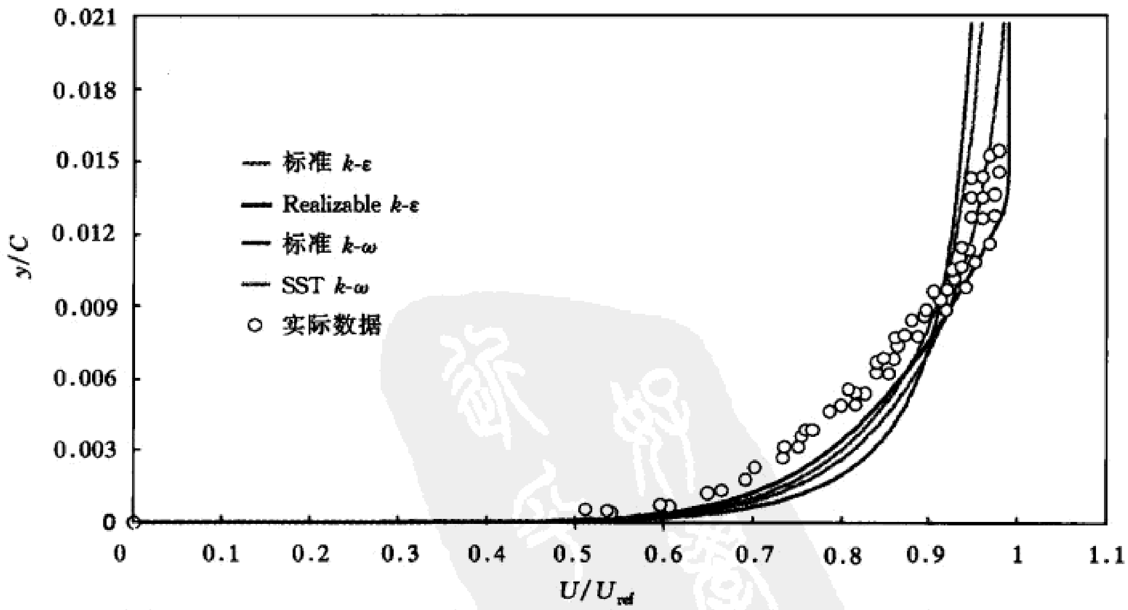


图 6.33　93%C(U_{ref} = 6m/s)处湍流模型对压力面边界层平均速度的预测

6.4.5.6 结 论

本实验算例的重点是对高雷诺数条件下，不同湍流模型(标准 k-ε 模型、标准 k-ω(Wilcox's)模型、SST k-ω(Menter's)模型以及 reliazable k-ε 模型)与三种壁面处理方法(标准对数壁面函数、非平衡壁面函数以及增强壁面函数)相结合，对流过翼面的湍流边界层进行预测及其评估. 同第5章中的算例一样，在没有解析解的情况下，通过预测结果与实验数据的对比来验证湍流模型的可靠性以及模型与真实物理流动之间的相符程度. 我们发现，reliazable k-ε 模型能够正确地预测翼面表面上的压力系数分布，进而获得了对压力引起的升力和阻力系数的全面、正确的预测. 该模型也求解了速度分布并正确地预测了边界层的厚度、湍流边界层分离的起始位置以及完全分离点随雷诺数的增加向尾部的移动. 对于存在反向压力梯度和边界层分离的流动，可以认为增强壁面处理方法是处理近壁复杂流动的好方法. 然而上述数值计算结果仅限于本算例，对其他类型的流动问题，结果可能大不相同.

6.5 小 结

本章对 CFD 中网格生成、合适边界条件的选择以及湍流模型等进行了讨论. 本章提供的指导并不意味着完美无缺，但能使读者更好地理解如何获得正确的 CFD 解. 本章也说明了 CFD 模拟和分析不只是一种机械式的练习. 一方面，需要理解关于守恒型方程的基础理论与求解 CFD 问题有关的数值方法；另一方面，需要设置可行的网格、定义适当的边界条件以及选择合适的计算模型，才能获得正确的 CFD 解.

尽管在本章中未加详尽说明，读者也能从使用稳态或瞬态求解法中受益. 通常来说，稳态过程计算比瞬态过程计算求解需要更少的计算时间. 然而，在有些情况下，使用稳态方法时收敛或求解稳定性得不到保证，这时可能就要用瞬态求解方法向稳态条件靠近. 计算精度和计算效率也是强烈影响 CFD 求解的另一个问题. 由于计算资源的限制，在求解复杂 CFD 问题时，一般要兼顾计算精度和计算效率. 通过增加计算域内的单元数量，即减少网格空间步长，数值解的精度通常会提高. 然而，这将以增加计算机的内存和计算时间为代价. 获得一定计算精度的同时保证计算效率的一种可行方法是在粗糙网格上采用高阶离散格式来求解该问题. 更复杂的 CFD 方法，如 DNS 和 LES 技术，可以应用精细网格获得高的计算精度. 由于计算机硬件的限制，DNS 和 LES 技术同时必须具有高的计算效率. 实际上，DNS 和 LES 技术只在没有其他可行方法时才被用到或者用来检验特定的湍流模型. 因此，该技术对研究那些大量用于求解实际工程流动问题的实用湍流模型方面是有用的. 正如上面计算实例所证明的那样，应用基于 reliazable k-ε 湍流模型和增强壁面处理方法相结合的更为先进的湍流模型，能成功地求解具有反向压力梯度和边界层分离的流动问题，特别适用于水力机翼和飞行机翼的流动分析.

在下一章中，我们将应用 CFD 技术求解不同复杂程度的各种实际问题. 通过一些实

例来展示 CFD 的理论和实践.

复习题

6.1 精心设计的网格有哪些好处?

6.2 结构化网格的优点有哪些?

6.3 对于复杂几何形状，为什么编写包含结构化网格的 CFD 程序比较困难?

6.4 试讨论非结构化网格的优点.

6.5 非结构化网格给 CFD 问题求解程序带来的困难有哪些?

6.6 如果对如图 6.34 所示的几何形状必须使用结构化网格，要应用何种条件和约束? 对于非结构化网格，又会如何? 对于本例，讨论两种网格的优缺点.

6.7 对于如图 6.35 所示的几何形状，讨论如何使用优于单一结构化网格或非结构化网格的多块结构化网格进行网格划分.

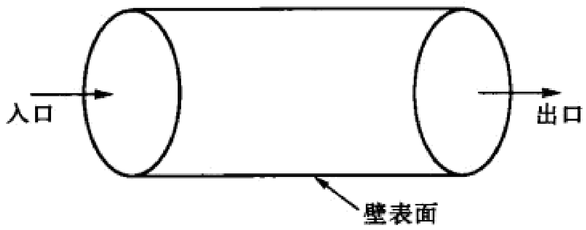


图 6.34

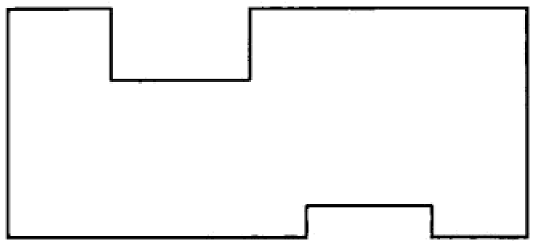


图 6.35

6.8 求解 CFD 问题时，为什么开始要采用粗糙网格为好?

6.9 何为网格单元的纵横比(见图 6.36)? 在流动域中重要的区域内，为何要避免出现大的纵横比网格?

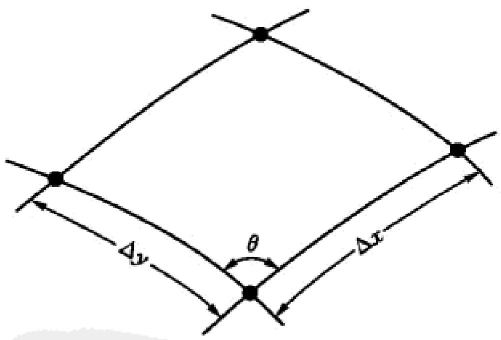


图 6.36

6.10 何为网格单元的偏斜? 为何最好避免高度偏斜网格单元的出现?

6.11 试讨论为什么在近壁和边界处不宜划分四面体单元.

6.12 当网格中存在高偏斜和高纵横比单元时，在求解器中应采用何种技术?

6.13 如图 6.37 所示，流经水翼的计算流域具有不同类型的边界条件. 请指出精细网格应设置在何处.

6.14 延展网格技术是一种网格局部细化技术. 应用该技术带来的问题是什么?

6.15 叙述如何使用适应性网格对网格进行局部细化.

6.16　设置正确边界条件的问题/困难有哪些？

6.17　对于入口边界，可以应用何种类型的边界条件以及为何需要与出口条件相对应？

6.18　何为 Neumann 边界条件？说明如何将其用为出口边界条件.

6.19　有隔断墙的两个房间中的空调系统如图 6.38 所示. 标注需要定义的边界，并讨论可应用的边界条件类型.

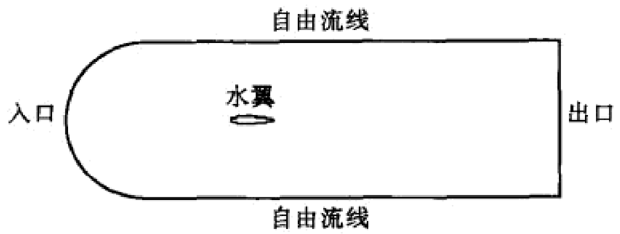


图 6.37

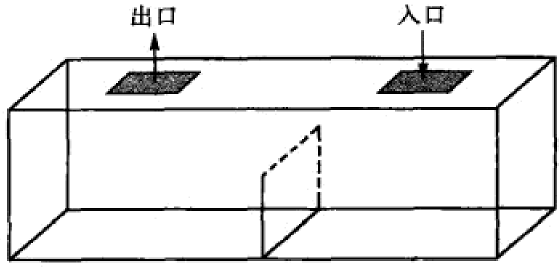


图 6.38

6.20　对称边界条件必须满足什么要求？使用这一条件的好处是什么？

6.21　讨论对称边界条件与周期性边界条件之间的主要区别.

6.22　二维交叉排列管壳式换热器如图 6.39 所示. 划出使用对称或周期性边界条件定义的计算域.

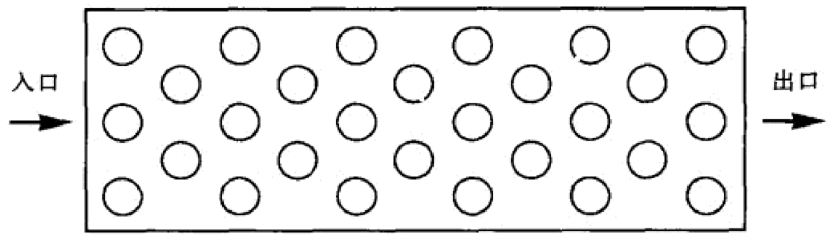


图 6.39

6.23　简要描述 LES 是如何求解湍流流动的. 它与 DNS 求解湍流流动有何区别？

6.24　为什么工程师更喜欢 Reynolds 平均湍流模型，如 k-ε 模型，而不是复杂的 LES 模型？

6.25　k-ε 模型的主要问题有哪些？

6.26　标准 k-ε 湍流模型对循环区域内的湍动能的预测要高于 reliazable k-ε 和 RNG k-ε 湍流模型. 对于下面给出的背向台阶算例(见图 6.40)，应用上述湍流模型预测重附着长度 L_R，与实验数据 L_E 对比，并进行解释. 在模拟湍流流动中，我们要求解流动方程：

$$u\frac{\partial\phi}{\partial x}+v\frac{\partial\phi}{\partial y}=\mu_t\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)+S_\phi.$$

(a) 利用 $\mu_t=\rho c_\mu k^2/\epsilon$ 与 k 之间的关系，讨论对流动的预测.

(b) 在计算域中哪些地方需要划分精细网格？哪些地方可以使用粗糙网格？

(c) 使用何种入口边界条件、出口边界条件以及壁面边界条件？

(d) 如何描述出口流动形式？

(e) 水平速度 u 在重附着点之前、之后以及在重附着点处的值为多少(正值或负值)？

(f) 绘图说明入口与出口之间的 X_1，X_2，X_3 位置上的速度分布和变化情况.

(g) 保持入口速度不变，如果将工作流体由空气改为水的话，那么 L_E 会如何？

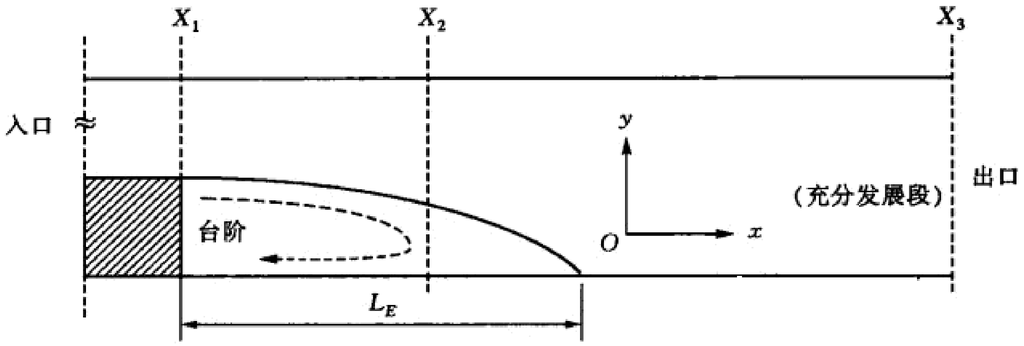


图 6.40

6.27 何为 y^+？说明其在近壁湍流建模中的重要性.

6.28 为计算黏性亚层，靠近壁面的第一个节点的推荐 y^+ 值为多少？

6.29 在没有湍流入口分布实验数据的情况下，采用何种方法考虑入口湍流的影响？

6.30 (a) 图 6.41 给出了流经汽车简化模型的流动，如果采用增强壁面函数模型，给出汽车周围的 y^+ 值大小并证明其合理性.

(b) 如何用 C_d(阻力系数)来检验网格独立性？在 X-Y 平面内绘图来说明你的答案.

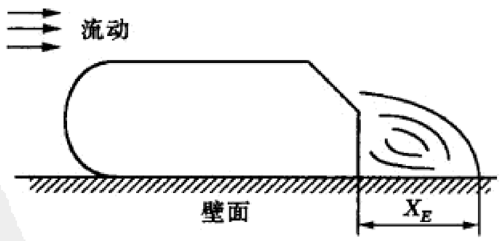


图 6.41

7 CFD 应用实例

7.1 概 述

在科学领域，应用 CFD 求解大量流体流动问题的需求日益增长．毫无疑问，研究人员的不懈努力使 CFD 不断发展．最近，在程序开发者的努力下已经出现了大量的 CFD 商业软件，使 CFD 的应用扩展到工业领域．任何 CFD 分析的基础都源于传递方程的核心内容以及与有效数值技术的衔接．本书中，作者反复强调掌握第 3 章中所描述的基本守恒方程以及第 4、第 5 章中数值近似方法的重要性．在第 6 章中，作者提供了一些有用的处理实际流动问题的指导，比如求解真实流动过程需要选择恰当的湍流模型，从而进一步加深了对第 1 章中所描述计算结果的认识．

我们应该十分清楚，CFD 不仅仅局限于对流体流动行为的预测，而且还可以适当处理化学反应(如燃烧)、多相流(如气-液传输，气-固、液-固或气-液-固混合等)、相变(如凝固或沸腾)等问题，合适的物理模型已经成为 CFD 中的一个组成部分，应用这些模型来描述复杂和具有挑战性的工业过程．现在，由于计算机硬件的发展和数值方法的日益成熟，应用 CFD 获得实际工程解已经变得非常现实了．

前面的章节中已经对 CFD 的很多重要内容作了介绍，本章将这些知识综合起来，把理论应用到实际中去．从实用的角度出发，后面选择的例子中，流动现象从基础到综合，几何区域从简单到复杂，涉及多个工程领域中求解 CFD 问题的具体步骤．本章的重要目的在于：

- 向读者阐明求解实际流动问题的基本步骤；
- 指导读者如何应用从本书获得的知识以及其他知识来求解复杂的流动问题；
- 说明 CFD 是如何作为研究工具用来更好地理解特定流动行为的；
- 说明 CFD 是如何作为设计工具用以更好地了解流动系统来提高系统的性能的．

7.2 设计过程中的辅助设计工具

正如第 1 章所描述的那样，CFD 越来越多地用以优化已有设备，并(或)预测新设计的性能，哪怕新设计还仅处于概念设计阶段．为了说明 CFD 是如何用于设计工具的，在后面的章节中将求解一个具体的流动系统——办公室内三维空气流动．实际上，该流动问

题在通风系统设计中是非常普遍的.

该系统中的流动过程一般为湍流，常常采用低雷诺数(low-Reynolds-number，LRN)湍流模型(见第3章和第6章)加以描述. 本例的前半部分将对模型的适用性进行评估和讨论. 因为测量仪器价格昂贵，对实验房间的实际测量变得相当困难，因此，CFD正逐渐成为通风设计中的首选方法. 在本例的后半部分将证明CFD作为设计工具可以改进房间通风系统扩散器出口的设计.

下面介绍室内气流分布.

就室内空气质量控制而言，对周围环境中空气流动分布的了解是必需的. 当然，空气流动分布是建筑物通风系统的函数. 建筑工程师采用实用的CFD计算程序作为设计工具逐渐代替实验模型方法来预测空气的流动分布.

尽管CFD已经取得了令人鼓舞的成功，但仍然存在预测不准确的问题，特别是通风设计中采用了湍流模型更是如此. 室内气流建模的一个重要方面是对低雷诺数(LRN)湍流的描述. 由于气流受空气速度以及湍流波动的影响很大，因此对LRN湍流处理不当会造成计算的不准确. 工程师采用CFD对通风系统进行设计之前，必须对使用的湍流模型进行评估和验证.

本例(Tian等，2006)中应用了三种湍流模型：标准k-ε模型、RNG k-ε模型以及LES模型，对室内气流环境进行了研究. 通过与Posner等人(2003)通风房间模型试验数据的对比，对计算得到的气流速度进行了评估和验证.

模型描述：模型房间的几何结构如图7.1所示. 房间的长、宽、高分别为91.4cm，45.7cm，30.5cm. 在模型房间中间设置有高15cm的隔板. 空气从天棚通风口进入房间，然后从另一通风出口流出.

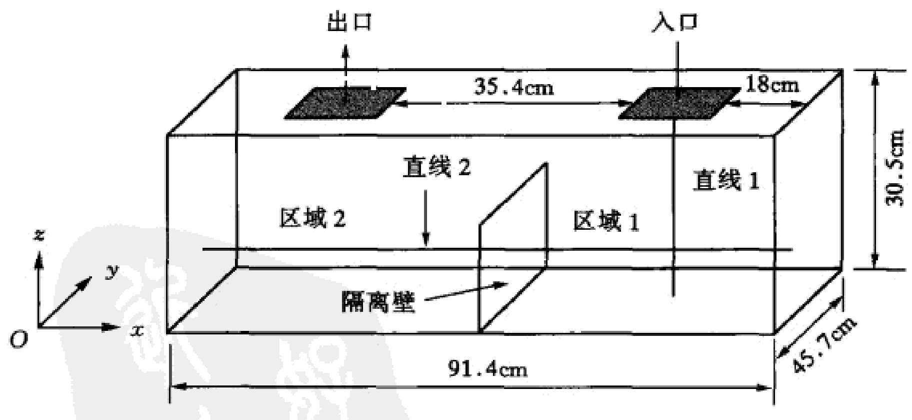


图7.1 房间通风模型结构示意图

网格：在计算域内均布线性单元结构化网格，对于房间的几何尺寸，每个单元体积尺寸为0.8cm×0.8cm×0.8cm. 计算网格如图7.2所示，在计算域内共产生246924个有限体积单元. 在任何CFD计算中，都推荐进行网格独立性验证以评估计算结果的数值计算

误差．对于本流动问题，进一步细化单元体积尺寸至0.5cm×0.5cm×0.5cm．在这两种网格划分条件下，应用RNG k-ε 模型对气流速度进行了预测，其计算结果相差小于1%．考虑到计算效率，下面的计算结果都是在网格单元尺寸0.8cm×0.8cm×0.8cm下求得的．

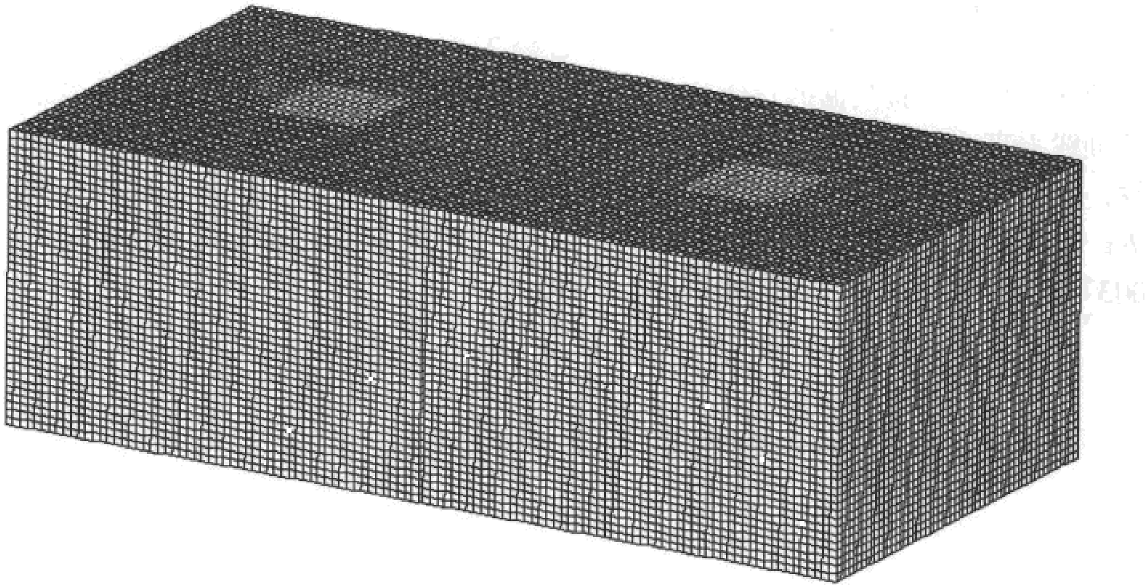


图 7.2　模型房间的计算网格

模拟特性： 入口速度(U_{inlet})为0.235m/s，特征长度为0.1m，对应的流动雷诺数为1500．所有的计算都是在瞬态下进行的，传递方程中的时间相关项通过对时间的二阶隐式后向差分来处理．无量纲时间步长定为0.035．该时间步长定义为 $t' = U_{inlet}t/H$．式中，U_{inlet}为入口气流速度；t 为物理时间步长，其值为0.05s，H 为房间的高度．传递方程采用有限体积法进行离散(见第4章)．在RANS方法中，采用标准 k-ε 模型和RNG k-ε 模型(见第3章和第6章)，用三阶插值方法，如QUICK格式(见附录B)近似控制体表面上的对流项．在LES中，存在于截止波数(cut-off wave-number)附近的旋涡会对空间的离散误差产生重要的影响(Park等，2004)．由于LES亚格子尺度力(Subgrid Scale force)不适于迎风格式以及其他基于迎风格式的方法，因此，对LES计算采用中心差分格式．采用SIMPLE方法(见第4章)处理压力-速度耦合问题．对于 k-ε 模型(见第6章)，由于在近壁网格中($y^+ \approx 1$)气流的雷诺数很低，本研究采用增强壁面处理方法——双层模型(two-layer model)和增强壁面函数(enhanced wall functions)相结合的一种近壁建模方法．对于LES模型，需要非常精细的网格来求解壁面层，这将相当费时，对于工程应用更是如此．因此，采用RANS方法的壁面模型，将壁面和近壁湍流流动联系起来．当迭代残差小于1×10^{-5}时，可认为流动控制变量(速度、压力、k 和 ε)收敛．

实验数据对模型的验证： 用Posner等(2003)对通风模型房间的研究结果验证标准 k-ε 模型、RNG k-ε 模型以及基于RNG的LES模型对湍流室内气流的预测结果．房间内的初

始流动条件假设平均速度为 U_{inlet}的自由流动．为保证 LES 的计算结果充分满足对初始状态的独立性要求，瞬态气流流动模拟的瞬时值采用 2000 个无量纲时间步长得到的平均结果，无量纲时间步长对应 100s 的物理时间．在此时间之后，气流速度等的瞬时值被超过 10000 个无量纲时间步长所平均(对应 500s 的物理时间)．用实验来检验沿垂直进气轴线(图 7.1 中直线 1)和沿水平中线(图 7.1 中直线 2)上空气垂直速度分量的模拟结果．

预测结果与实验数据的对比见图 7.3 和图 7.4．图 7.3 表示了三种湍流模型对沿垂直进气轴线垂直速度的预测结果与实验数据的对比．三种湍流模型的预测与实测有很好的一致性．其中，基于 RNG 的 LES 模型在 0.15m 至 0.25m 中间段内与实验符合得最好．标准 k-ε 模型对速度的模拟结果比 RNG k-ε 模型的预测结果略低，但仍然与 Posner 等(2003)进行的计算研究有相当的一致性．

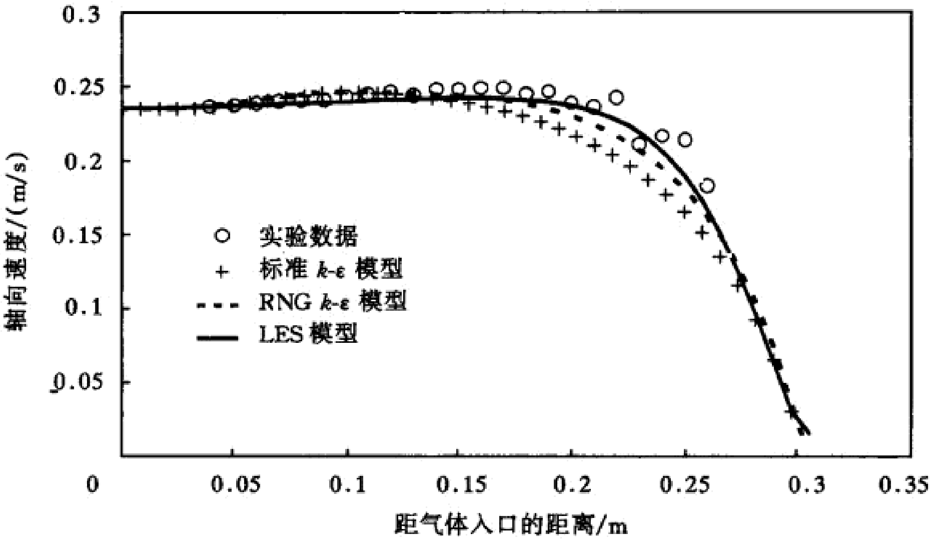


图 7.3 气体入口垂直方向速度分量预测结果与实测数据的对比

图 7.4 显示了沿水平中线空气垂直速度分量的预测与实测的对比．在 $x=0$m 到隔板之间，三种湍流模型获得的结果基本一致．在 $x=0.2$m 到隔板之间，基于 RNG 的 LES 模型的预测结果还是略好一些．在近壁区域 $x=0.46$m 至 $x=0.9$m 之间，基于 RNG 的 LES 模型成功地捕捉到了最大的正向垂直速度，而其他两个 k-ε 模型则明显低估了空气的速度．从隔板位置到 $x=0.6$m 之间，基于 RNG 的 LES 模型的预测结果与实验数据有相当好的一致性，显示出了该模型可以获得较好的预测结果．考查两个 k-ε 模型对垂直方向速度的低估原因，发现在接近入口区域内，涡黏模型可能引起了附加的扩散．预测结果与实验数据的误差显示，在大约 $x=0.85$m 位置上，k-ε 模型的结果略好于基于 RNG 的 LES 模型的结果．总之，三种湍流模型预测的结果都与实测有很好的一致性，并且成功地捕捉到了流动的趋势．本研究显示了基于 RNG 的 LES 模型可以提供更好的预测结果，特别是在第 2 个区域内，模型在定义的空间内可以更好地捕获流体流动的特性．除此之

外，我们注意到，两个 k-ε 模型预测的速度仍然处在测量允许的合理范围之内．我们对这些模型的应用有了更大的信心，一般可以充分满足大多数工程应用的需要．

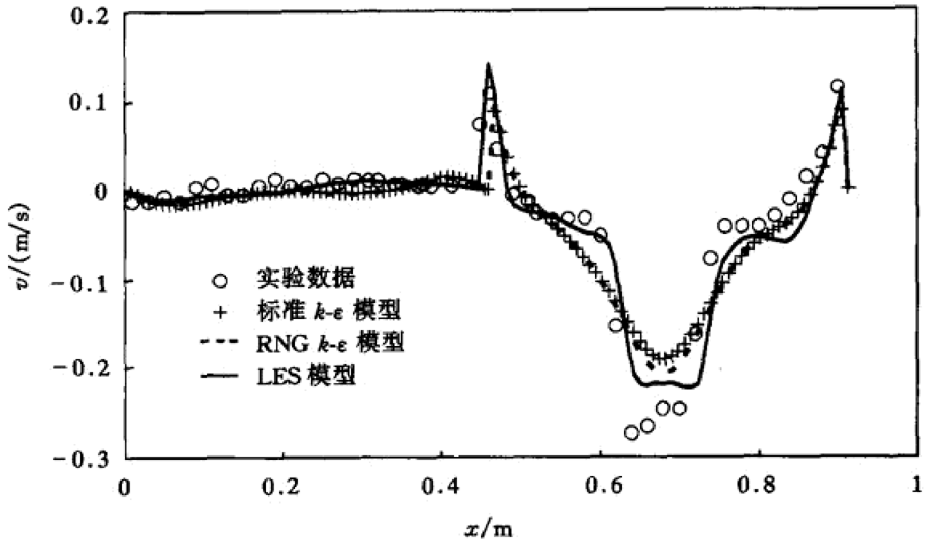


图 7.4　水平中分线上垂直速度分量的预测结果与实测数据的对比

房间通风系统的设计：在此我们介绍 CFD 的实际使用．CFD 作为一种设计工具，可以对通风系统中大量的特性参数进行系统研究．图 7.5 所示为所要研究的通风房间示意图．本例中，冷空气从上部的高压管道中通入．主气流中的一部分进入到天棚上的扩散栅，然后通过扩散栅底部的出口排到封闭的空间中．扩散栅由一长度为 H 的连接管与上部的高压管路相连．邻近扩散栅出口处的两个设计方案 A 和 B 如图 7.6 所示．从通风的角度来看，因为出口有扩散栅，所以方案 A 一般会导致空气分布的弯曲．为了获得更均匀的扩散结果，改进的设计中，在连接管道的附近引入导向板，使气流在到达扩散栅出口之前获得新的更好的分布．

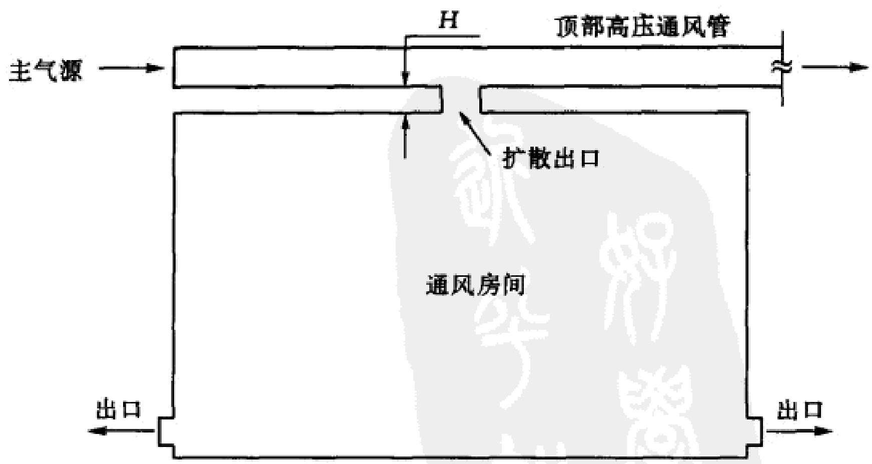


图 7.5　通风房间结构示意图

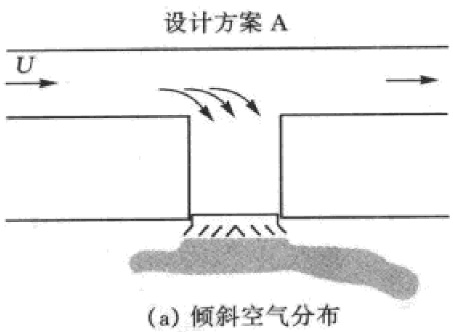
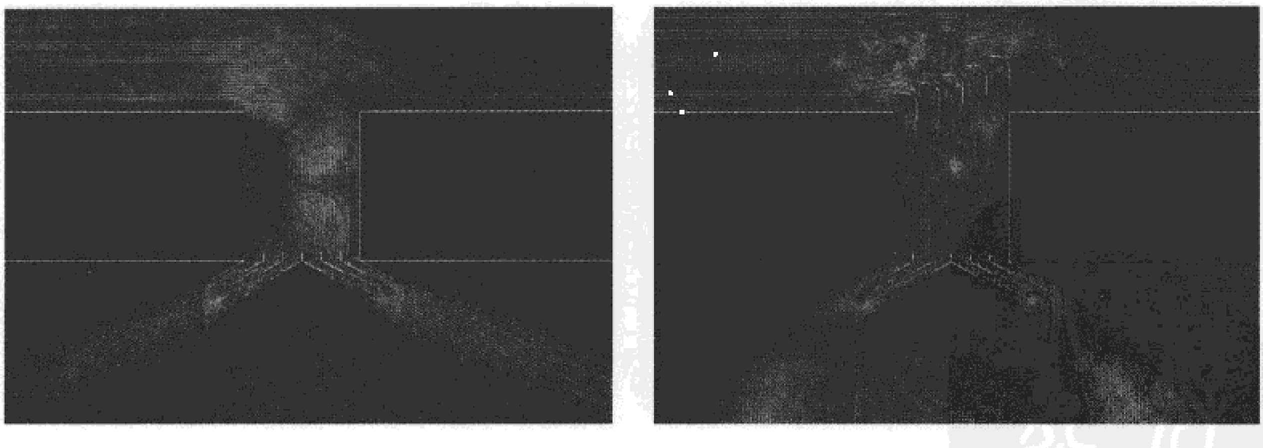


图 7.6 空气通过倾斜和对称扩散栅的扩散流动

当连接管长度为 H 时，设计方案 A 和 B 的 CFD 模拟结果见图 7.7. 从图中可见，方案 B 中在连接管上游设置的导向板对扩散栅出口流动产生了显著的影响. 图中显示出，在到达扩散栅之前的空气流动更加均匀，获得了对称流动. 而方案 A 中的流动并非如此. 在方案 A 中存在流动死区，并且离开扩散栅的气流行为更像是注入到通风房间中的射流.

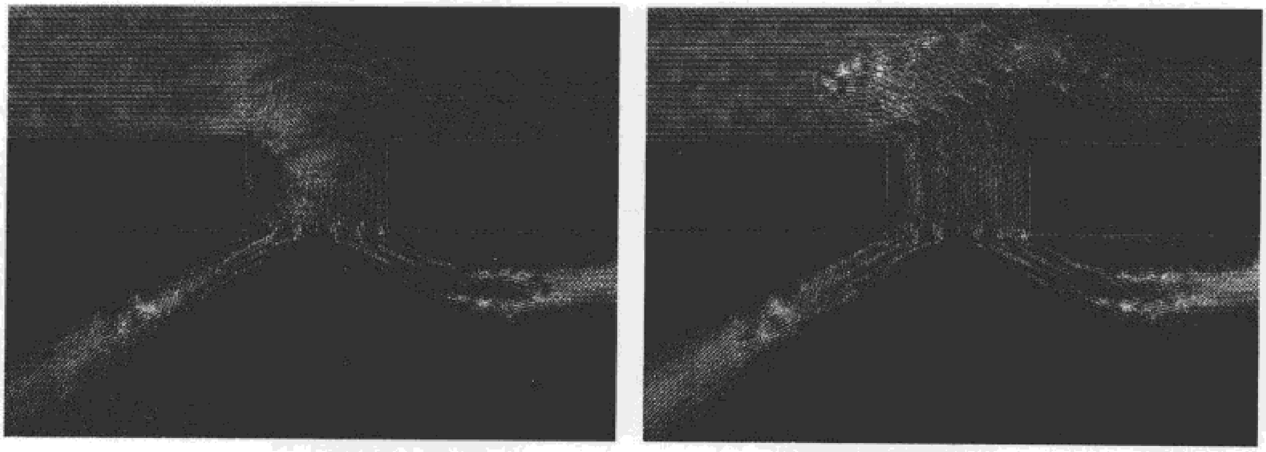
当连接管长度为 $0.5H$ 时，方案 A 和 B 的 CFD 模拟结果见图 7.8. 与图 7.7 相同，表示速度矢量的云图. 从工程实际出发，缩短连接管的长度是合理的选择，因为这样可以减少材料消耗和工程造价. 但当采用短的连接管时，方案 B 在扩散栅出口的气体流动形态明显变成原始设计中的弯曲形式(如图 7.7 中的方案 A)，而不再是连接管长 H 时方案 B 的对称流动形态. 对流动物理现象的进一步实验表明，由于气流在到达扩散栅之前未达到充分发展状态，因此完全可以预期方案 B 出现的流动结构，较长连接管会求得更好的空气流动条件.



(a) 设计方案 A　　(b) 设计方案 B

图 7.7 管道长度为 H 时方案 A 和 B 预测的空气在扩散栅出口的分布

结论： 通过本例可以得出两个重要观点. 第一，湍流模型的发展证明将这些模型应用到工程领域并且获得可信结果是可行的. 第二，CFD 作为辅助设计工具以低成本进行多



(a) 设计方案 A (b) 设计方案 B

图 7.8 管道长度为 0.5H 时方案 A 和 B 预测的空气在扩散栅出口的分布

参数研究的可行性，为工程师提供了对多种设计方案进行评估获得更好的设计系统的机会.

在我们将 CFD 作为研究工具对某些复杂的流动问题进行研究之前，作者愿意关注湍流模型应用这一重要问题. 尽管在湍流领域已经取得了重大进展，并且现在的计算资源也能满足 LES 模型应用的要求，但标准 k-ε 模型仍然为众多工程流动问题提供可靠预测的主要方法. 实际上，应该提倡在初始探索性设计计算时采用标准 k-ε 模型. 该模型可以获得工程求解精度允许的计算结果，当该模型不能捕捉到流动的基本特性或者不能获得正确解时，就应该采用更先进的湍流模型以改进 CFD 结果.

7.3 作为研究的工具：增进对物理现象的理解

回顾 CFD 的发展历程，在开始时，CFD 只是作为一种研究工具而非设计工具，用来理解流动域中很多物理现象. 在第 1 章中，我们简单介绍了用 CFD 描述流过圆柱形障碍物的某些有趣的流动现象. CFD 除了在单相流问题研究中已经取得了很多重要的进展和成果之外，现在正在使用 CFD 方法进行两相流的研究. 为进一步说明 CFD 的功能，我们将集中到 CFD 领域中另一重要问题——气-固颗粒流动的数值研究.

气-固颗粒流动常常出现在矿业、石油、化工、冶金、能源以及环境工程等重要工程领域中. 由于流动现象的内在复杂性(如气-固颗粒流动中出现的团聚现象)，因而该流动的实验需要高精度的测量仪器，从而带来了实验的难度. 图 7.9 为固体颗粒流动可视化试验(玻璃球固体颗粒平均直径为 66μm).

近十年来，为了更好地了解湍流耗散两相流动，在科学和工业研究中，人们使用 CFD 技术进行了不懈的努力. 值得注意的是，下面的 CFD 例子只是对离散两相流动建模

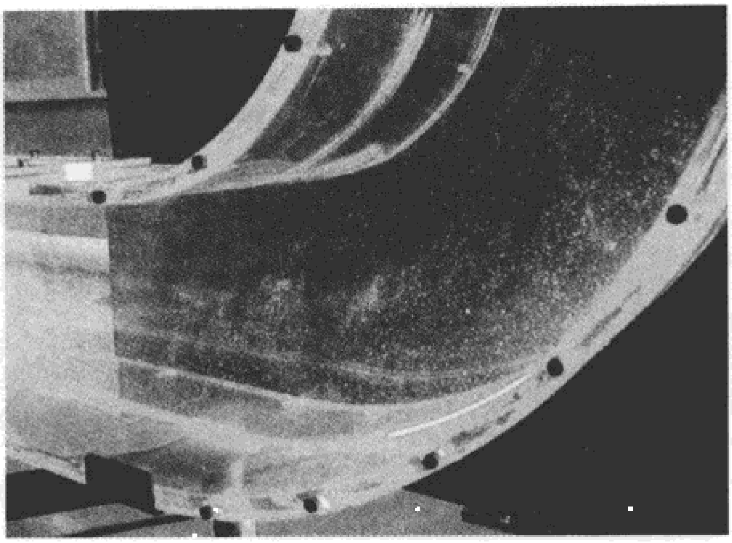


图 7.9 用悬浮在气流中的固体颗粒来显示流动

所需附加模型的简单介绍．处理这样的流动通常需要增加守恒方程和合适的模型，其中，气相通常被认为是载流体，而颗粒分散在气流中．拉格朗日(Lagrangian)方法可以处理流动空间中具有离散颗粒的连续气相流动．欧拉(Eulerian)方法也可以用来处理气-固两相流动，它是基于气相和颗粒相分别为连续流的假设．下节将讨论基于这两种不同方法的描述气体-颗粒流动的传递方程(数学模型)．

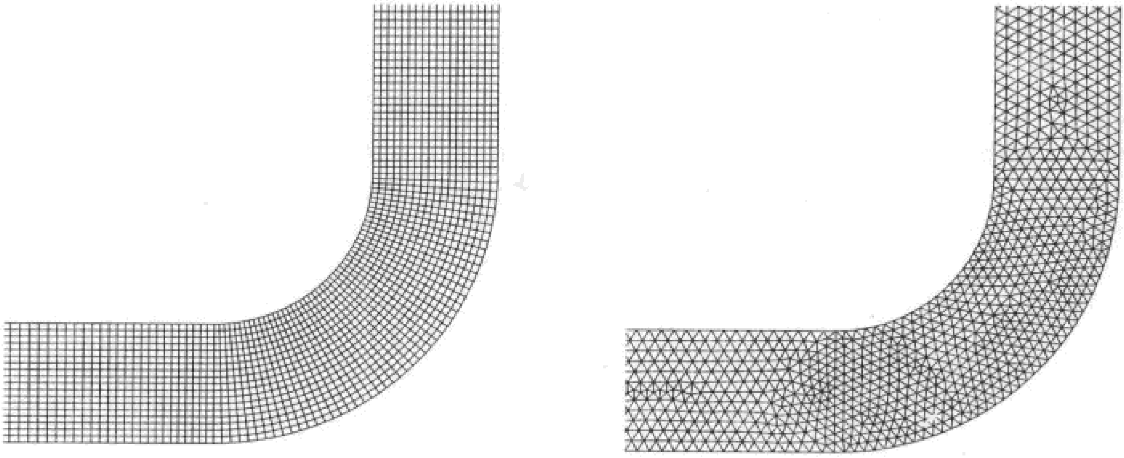
下面介绍 90°弯管中的气-固颗粒流动．

本部分应用两种不同的 CFD 计算程序，即自编程序(Tu，1997)和商业 CFD 程序(ANSYS-FLUENT 6.1)，来模拟气体-颗粒流动．由 Lagrangian 模型描述的非连续方法由 ANSYS-FLUENT 程序求解，而基于 Eulerian 模型的连续方法则通过自编程序求解．模拟结果通过 Kliafas 和 Holt(1987)的实验来验证．

模型描述：几何形状如图 7.10 所示，为含有颗粒的流经 90°弯管的三维湍流空气流动．试验的几何尺寸与第 5 章中图 5.18 实验 B 相似，包括 1.2m 长的水平管道、半径比率(曲率半径与管径之比)为 1.76 的 90°弯管以及 1m 长的垂直管道．通过变频器调整空气进入正方形截面试验管道的气体速度 U_b．气体和颗粒的实验数据由激光多普勒(LDA)系统测定．

网格划分：对于正方形截面 90°弯管，计算域从弯管入口上游 1m(10D)处开始，到弯管出口下游 1.2m(12D)处结束．如图 7.10 所示，在自编计算程序中，整个计算域内生成六面体结构化网格；ANSYS-FLUENT 计算程序中，整个计算域内生成四面体非结构化网格．

物理模型和数学模型：在两种方法中，气相的控制方程都用第 3 章中的方程(3.57)描述：



(a) 结构化网格　　(b) 非结构化网格

图 7.10　正方形截面 90°弯管的计算网格

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial(u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(v\phi)}{\partial y}+\frac{\partial(w\phi)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)+S_{\phi}. \quad (7.1)$$

通过设置传递变量特性 ϕ 为 1，u_g，v_g，w_g，k_g，ε_g，以及选择合适的扩散系数 Γ_ϕ 和源项 S_ϕ 值，我们得到描述气相的质量、动量和湍流强度的偏微分方程，如第 3 章中表 3.2 所示.

应用 Lagrangian 方法的颗粒相控制方程：这种方法通过对 Lagrangian 参考系(Chiesa 等，2005)下的牛顿第二定律积分来计算每一分散颗粒的轨迹. 运动方程中考虑了牵引力和重力. 因此，方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t}=F_D(u_g-u_p)+\frac{g(\rho_p-\rho_g)}{\rho_p}. \quad (7.2)$$

式中，$F_D(u_g-u_p)$为颗粒单位质量上的牵引力，且 F_D 为

$$F_D=\frac{18\mu_g}{\rho_p d_p^2}\cdot\frac{C_D Re_p}{24}. \quad (7.3)$$

相对雷诺数 Re_p 定义为

$$Re_p=\frac{\rho_p d_p|u_p-u_g|}{\mu_g}, \quad (7.4)$$

而牵引力系数 C_D 由下式决定：

$$C_D=a_1+\frac{a_2}{Re_p}+\frac{a_3}{Re_p^2}. \quad (7.5)$$

方程(7.5)中，系数 a_1，a_2 和 a_3 为与颗粒雷诺数对应的光滑球状颗粒的经验常数(Morsi，Alexan der，1972). 用拉格朗日离散随机游动(Discrete Random Walk，DRW)模型来计算气相湍流对颗粒相的影响. 本模型的更多细节见 Tian 等(2005).

应用 Eulerian 方法的颗粒相控制方程：在这种方法中，颗粒相的控制方程也可由上述方程(7.1)来描述．可以将传递变量 ϕ_p 设置为 1，u_p，v_p，w_p，k_{gp}，k_p，ϵ_{gp}，选择合适的扩散系数 Γ_{ϕ_p}和源项 S_{ϕ_p}值，从而得到传递方程，用表 7.1 来描述颗粒相的质量、动量和湍流强度偏微分守恒方程．这些方程的具体来历见 Tu(1997)．

表 7.1　Eulerian 参考系下颗粒流动控制方程的通用形式

ϕ_p	Γ_{ϕ_p}	S_{ϕ_p}
ρ_p	0	0
u	ν_{pT}	$F_D^u + F_G^u + F_{WM}^u$
v	ν_{pT}	$F_D^v + F_G^v + F_{WM}^v$
w	ν_{pT}	$F_D^w + F_G^w + F_{WM}^w$
k_{gp}	$\dfrac{\nu_{pT}}{Pr_T}$	$P_{kgp} - \bar{\rho}_p\varepsilon_{gp} - II_{gp}$
k_p	$\dfrac{\nu_{pT}}{\sigma_k}$	$P_{kp} - I_{gp}$
ϵ_{gp}	$\dfrac{\nu_{pT}}{\sigma_\epsilon}$	$\dfrac{\epsilon_g}{k_g}(c_{\epsilon 1}P_g - c_{\epsilon 2}D_g)$

模拟特性：应用有限体积方法非交错(non-staggered)网格(见第 4 章)对控制传递方程进行离散．对流项采用三阶 QUICK 格式(见附录 B)近似，扩散项采用二阶中心差分格式近似．采用 SIMPLE 算法(见第 4 章)来实现速度和压力的耦合．为了模仿实验条件，在弯管上方进口 1m 处给定气相和颗粒相的均匀速度 $U_b = 52.19\text{m/s}$，对应的雷诺数为 3.47×10^5．入口湍流强度设定为 1%，颗粒为密度 $\rho_s = 2990\text{kg/m}^3$、直径 50μm 的玻璃球．相应的颗粒充入量和体积率分别为 1.5×10^{-4}和 6×10^{-8}，这样，悬浮在气流中的颗粒是非常稀疏的．在出口处，所有因变量的法向梯度皆设置为 0．对于气相及颗粒相，采用无滑移壁面边界条件．为表示 Eulerian 方法中的颗粒-壁面动量传递，也要指定合适的边界条件，更多细节见 Tu 和 Fletcher(1995)．

对于 Lagrangian 模型，应用 DRW 模型的颗粒传输可以从气体流动的收敛解中求得．对于 DRW 模型，在入口截面上，20000 个跟踪颗粒从 10 个均匀分布点上被释放出来．采用 10000，20000 和 50000 个颗粒来考查颗粒相预测的统计独立性，并发现跟踪 20000 和 50000 个颗粒时，最大正向速度差别小于 1%．

在 Eulerian 方法中，颗粒相控制方程的数值解法与气相中标量如温度的求解方法相似．这是因为假设在气体-稀疏颗粒流动中颗粒之间无碰撞，颗粒动量方程中无压力项之缘故．在每次迭代中，气相和颗粒相中所有控制方程都被依次求解．在迭代过程中，通过强隐过程(strongly implicit procedure (SIP))求解器求解这些方程．上述求解过程在稳态下进行，直到获得收敛解．

通常来说，Lagrangian 方法需要的计算时间要比 Eulerian 方法所需要的计算时间多得多．Lagrangian 方法需要大量时间确定每一颗粒的轨迹，而 Eulerian 方法将颗粒相作为一

个整体进行求解，因而，其节省大量计算时间就毫不奇怪了．

通过实验数据对模型进行验证：应用两种不同数值方法获得的气相和颗粒相的平均量与 Kliafas 和 Holt(1987)获得的实验结果进行了比较．在本例中，对于气体-颗粒流动，一个重要的无量纲参数是 Stokes 数．其定义为颗粒松弛时间(relaxation time)与流体运动特征时间的比值，即 $St=t_p/t_s$．该无量纲数决定了颗粒与周围气体的动量平衡．Stokes 数中的系统松弛时间 t_s 通常由被研究系统的特征长度(L_s)和特征速度求得．本例中，特征速度为来流速度(U_b)，因此，$t_s=L_s/U_b$．小 Stokes 数($St \ll 1$)表示颗粒与载流之间有相近的速度．大的 Stokes 数($St \gg 1$)，则表示颗粒不再与周围流体相保持平衡，它们会完全脱离流体的流动轨迹．

在工程应用中，平均量非常重要．对于气体和颗粒相，沿弯管的平均速度、浓度和波动分布同管道中心平面实测数据进行了对比．除非另外说明，所有数据都用入口速度(U_b)进行无量纲化．图 7.11 显示了弯管不同位置上，气体平均流动速度的数值计算结果与实验数据的对比(此时 $St<0.1$)．从图中可见，两种数值模型的预测结果与 Kliafas 和 Holt(1987)报道的实验数据相吻合．图 7.12 显示了颗粒平均速度的数值模拟结果与实验数据的对比．Eulerian 模型和 Lagrangian 颗粒跟踪模型的预测结果均与实验结果具有很好的一致性．上述结果是在 Stokes 数为 12.87($St \gg 1$)的实验条件下得到的，颗粒速度分布常平滑，这表明气体压力梯度对颗粒运动的影响不大．

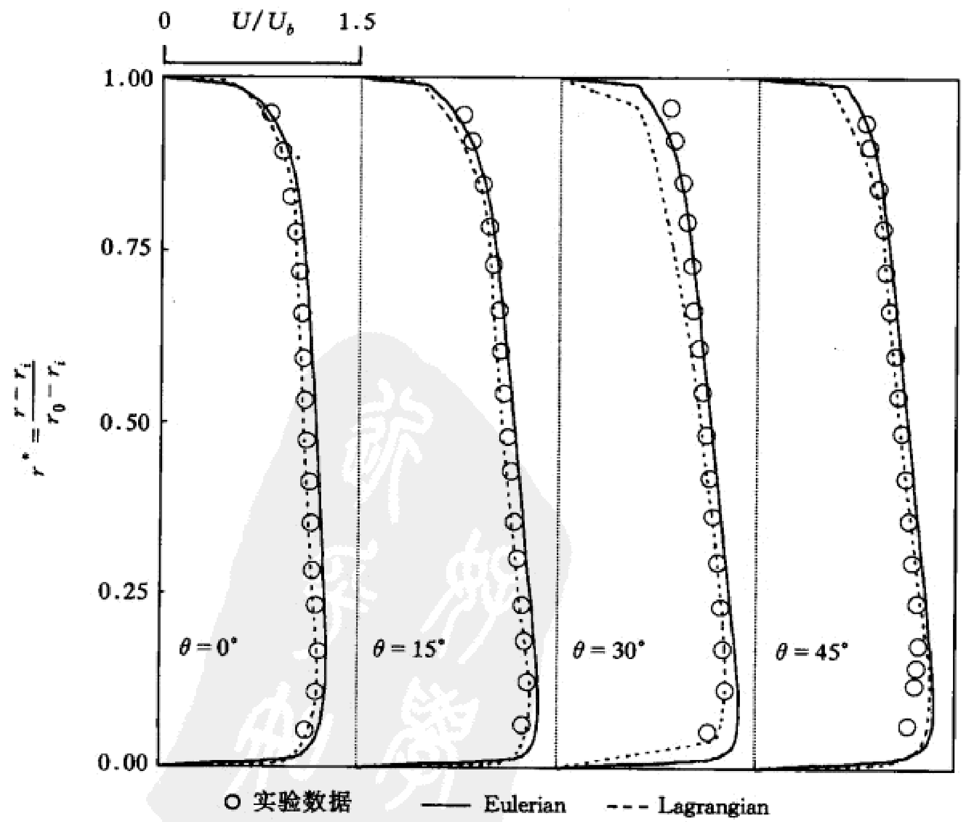


图 7.11 Stokes 数为 $St=0.01$ 时，固体颗粒沿弯管的平均速度曲线

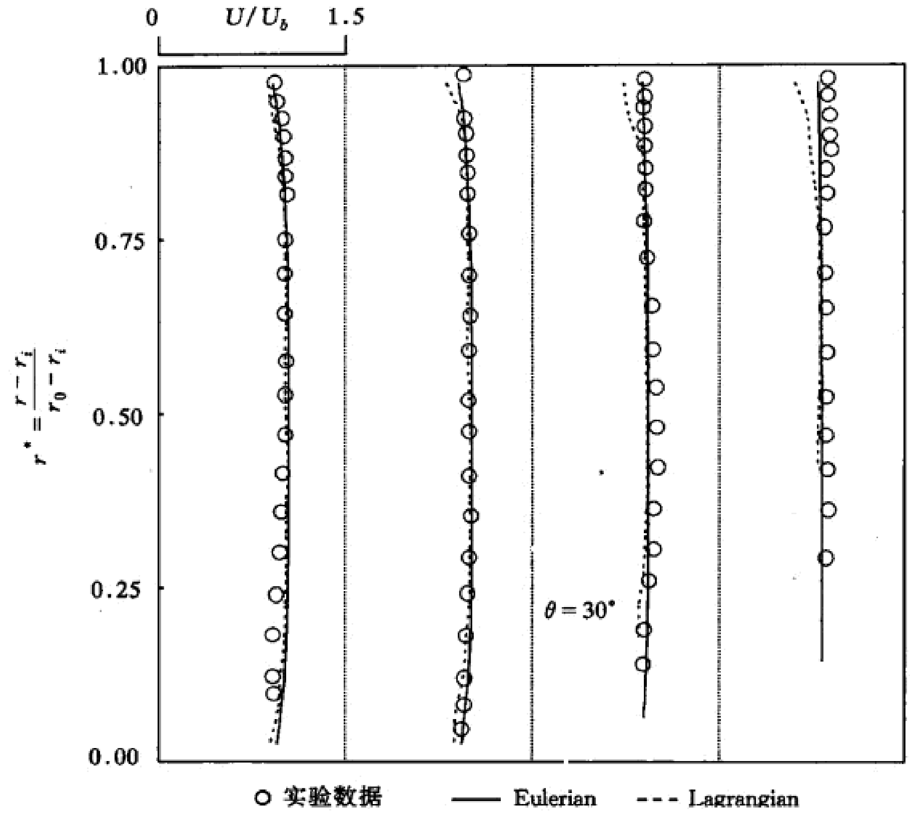


图 7.12 Stokes 数为 $St=12.87$ 时，固体颗粒沿弯管的平均速度曲线

对流动问题的深入认识：CFD 作为一种研究工具，通过对气体-颗粒流动进行“数值实验”，可以进一步提高我们对颗粒在气相载流中行为的认识．下面的结果证实了使用这种重要研究工具的意义．

图 7.13 显示了不同 Stokes 数条件下，应用 Eulerian 两流体模型对气体-颗粒流动进一步模拟的结果．当 Stokes 数为 0.01 时，很明显，颗粒具有“气体示踪”的趋势．在该条件下，颗粒通常被认为与载流相平衡．然而，随着 Stokes 数的增加，这种现象就不明显了．在管道外壁处，颗粒相与气相间存在正向滑移速度，在管道内壁处，由于存在压力梯度，气相速度较大．当颗粒接近弯管出口处时，由于流动恢复了速度滑移损失的能量，颗粒的“气体示踪”现象变得不那么明显了．从图中可见，对于 $St \geqslant 1$ 的流动，颗粒与气体之间的正向滑移速度沿弯管半径逐渐减少，在弯管出口处转变为负的滑移速度，此时，颗粒滞后于气体．颗粒不能与气体一起等速运动的原因是由于颗粒具有的惯性以及与壁面碰撞后存在的能量损失．为更好地明了上述例子中不同 Stokes 数条件下颗粒在弯管内的流动轨迹，应用 Lagrangian 方法跟踪不同 Stokes 数条件下颗粒的运动轨迹，计算结果见图 7.14．随着 Stokes 数的增加，颗粒明显向弯管外侧迁移．

这一现象也可以通过 Eulerian 方法预测的无量纲化颗粒浓度云图(如图 7.15 所示)得到更好的理解．随着弯管半径的增加，由于惯性，颗粒浓度集中于弯管的外壁．从不同

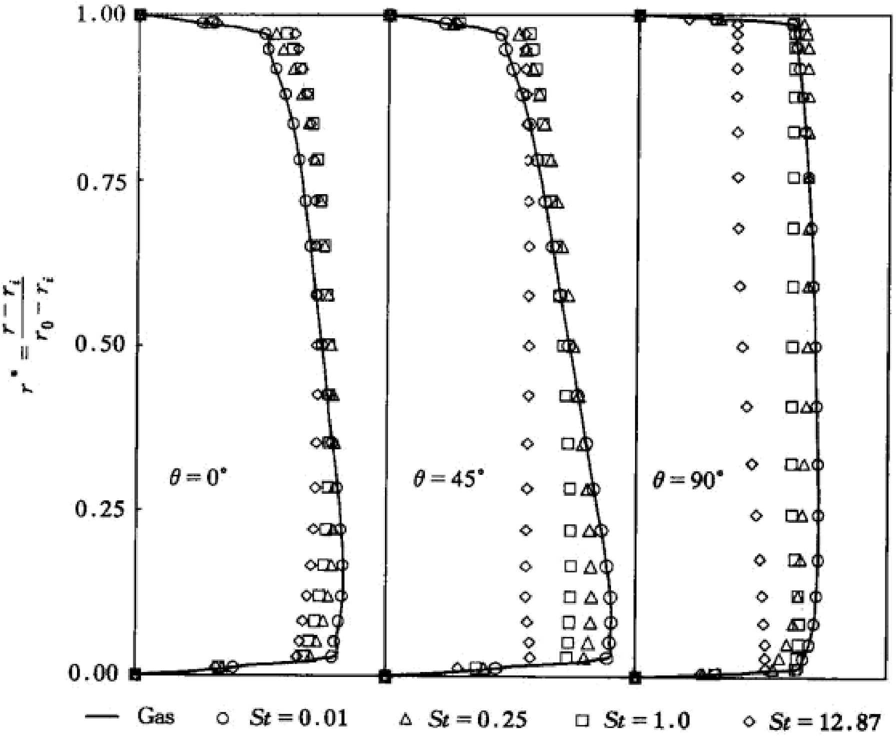


图 7.13 不同 Stokes 数时，固体颗粒沿弯管的平均速度曲线

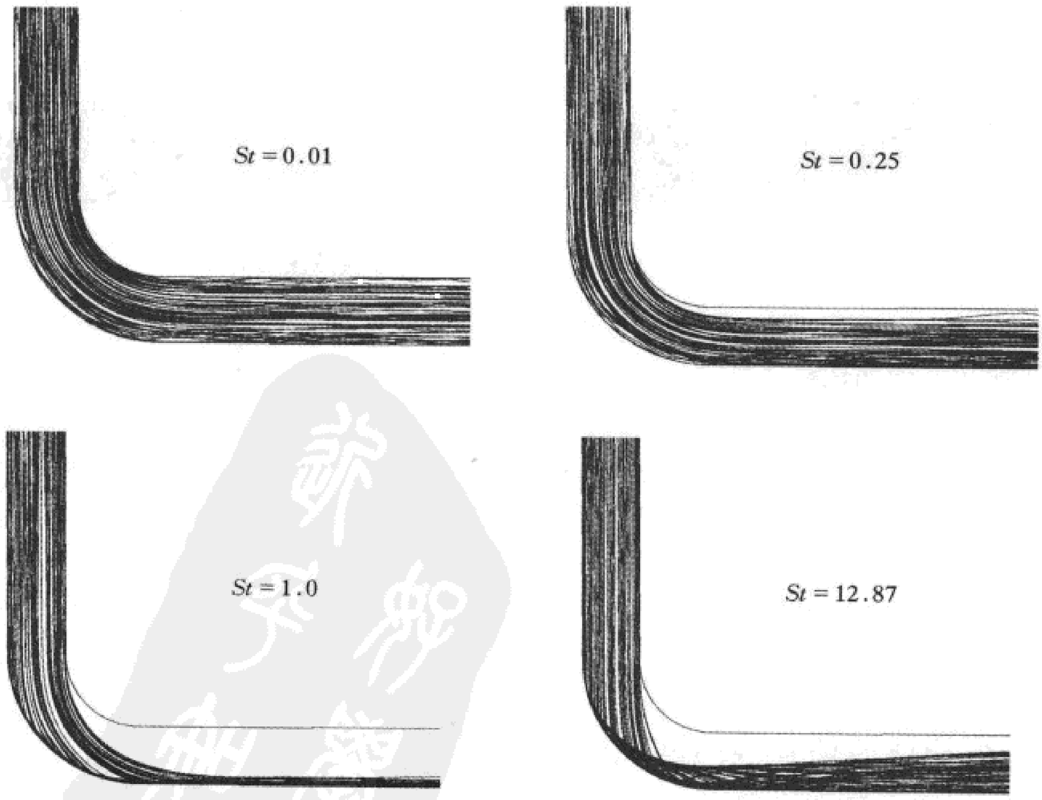


图 7.14 不同 Stokes 数 Lagrangian 方法求得的固体颗粒的轨迹

Stokes 数的计算云图中我们可以看出，随着 Stokes 数的减小，颗粒自由运动的区域就不明显了．当 Stokes 数为 0.01 时，颗粒与周围气体达到动量平衡，此时颗粒占据整个弯管空间．在此，我们再次证实了颗粒可以作为示踪粒子来显示载气的流动轨迹．

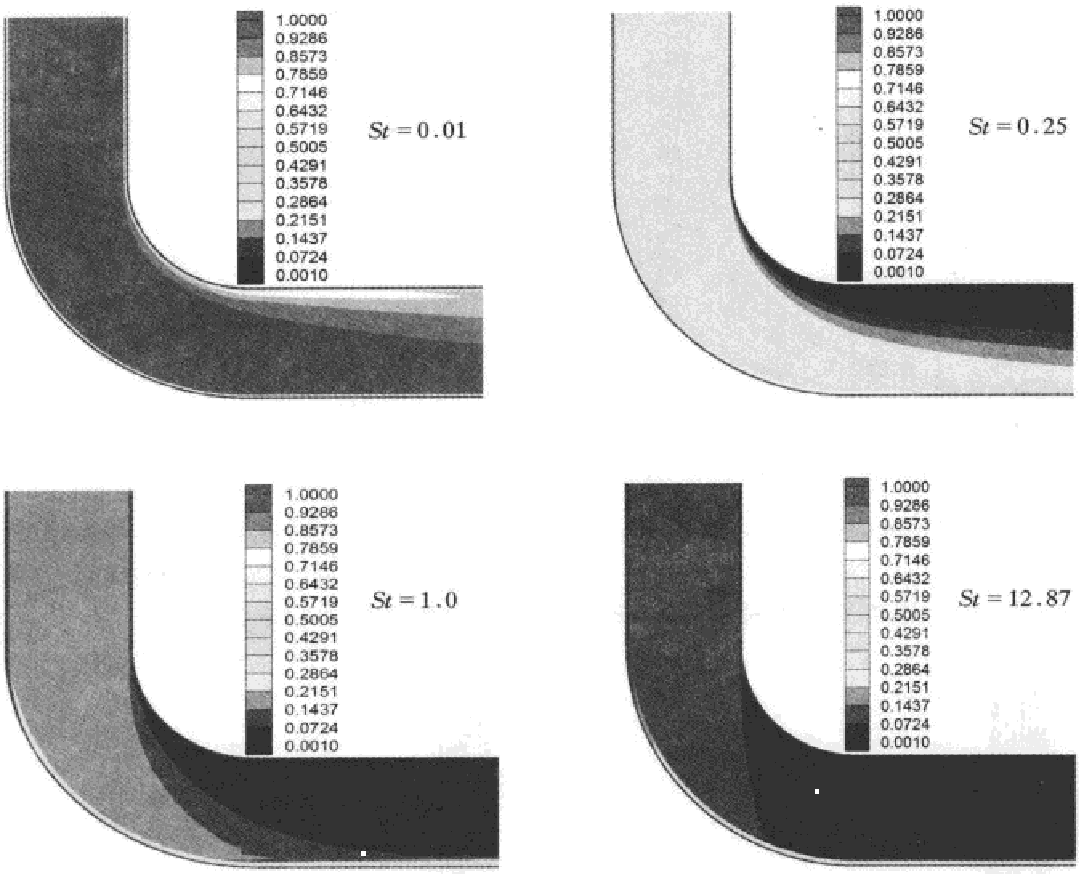


图 7.15 不同 Stokes 数无量纲化的颗粒浓度分布

结论：随着计算机计算能力的不断提高，以及 Lagrangian 模型所描述的离散方法或 Eulerian 模型所采用的连续方法(必须添加守恒方程)的出现，很多复杂的多相流动问题正在通过 CFD 得到解决．本例中通过 CFD 方法获得的定性和定量数值结果表明，CFD 方法不仅可以获得丰富的关于流动内在的各种物理现象，而且也是目前研究多相流的最有效的方法．

7.4 其他一些重要应用

7.4.1 与流体流动耦合的热量传递

CFD 涉及的其他应用包括受热量传递影响的流体流动行为．为合理处理这类流动问

题，下面给出两个例子来进一步说明建模特性以及实际求解此类CFD问题的过程.

7.4.1.1 换热器

换热器广泛存在于众多工业之中. 蒸气在锅炉中产生、空气在空调中的盘管处冷却、汽车散热器等都是换热器的传统应用实例. 换热器设计中至关重要的是要了解管组间流动的热量交换. 如图7.16所示换热器中的管组，既可以是并排分布也可以是叉排分布. 冷流体横向流过换热器，带走管内与之垂直流动热流体的热量. 在设计中，管组通常用一些重要的无量纲参数，如横向长度、纵向长度以及对角线长度等来表征. 工程师应用这些参数对不同传热方式在特定类型的换热器，如紧凑式(Compact)换热器中的换热进行评估. 根据Žukauskas和Ulinskas(1988)的研究，本例中这种换热器的无量纲横向长度和纵向长度均小于1.25. 研究表明，该换热器在层流时的换热系数高于高湍流时的换热系数. 换热表面积的充分增加，不仅增加了流量，产生了各种二次流动，并且消除了由于自然流动产生的流动边界层和热边界层.

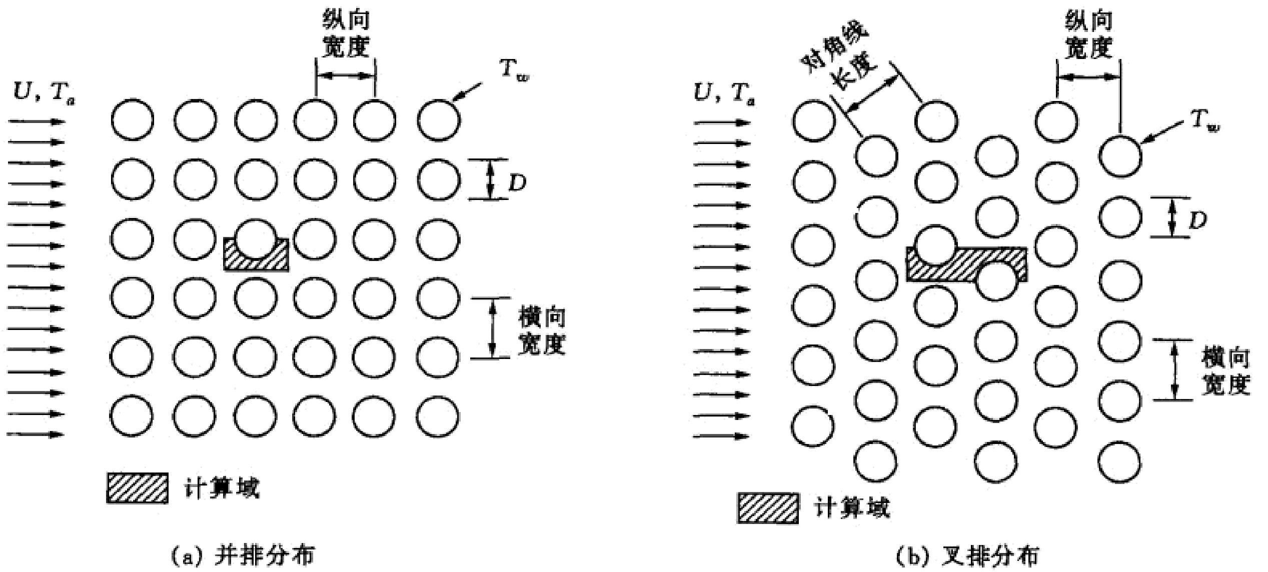


图7.16 换热器管组并排分布和叉排分布示意图

长期以来，换热器的设计和制造主要由实验方法以及基于简单的与换热系数有关的半经验公式确定. 20世纪30年代初期，Colburn(1933)提出了关于流经叉排管组传热的简单关系式，其他人，如Aiba等人(1982a，1982b)以及Žukauskas和Ulinskas (1988)报道了黏性流流经等温边界条件和等热流量边界条件下并排和叉排管组时的传热实验结果. 最近，Khan等人(2006)提出了在宽参数范围内用于并排或叉排管组分布换热的解析式. 应用现有的商业CFD软件，工程师可以不必费力地进行实验分析或简化所有计算就可以获得对流动过程的认知，对设备的性能进行定性和定量评估、优化设计和运行参数. 应用CFD对换热器进行设计有很多优点. 最近，Witry等(2005)、Hájek等(2005)以及Wang

等(2006)都指出了CFD应用到各种换热器系统中的最新趋势．由于CFD方法使用的不断增加，有必要对如何应用CFD解决紧凑型换热器中的流动和换热特性进行论证并提供一些实用的指导．

问题描述：对于并排和叉排布置的管组，流体以规定的质量流率或流动速度 U 以及大大低于入口壁面温度 T_w 的入口温度 T_a 从左侧流入管组，从右侧流出．利用特殊的几何形状，如流动行为的重复性，计算域可以采用对称和周期性边界条件(见第2章和第6章所述)，简化后的几何形状如图7.17所示，可以提高运算速度和计算精度．本例中将对这些在CFD实际应用中使用的重要边界条件进行说明．

当流体进入与流出计算域的流动特性一致时，就可以采用周期性边界条件．通常可以应用在管壁与流动方向垂直时的情况下．而对称边界条件的基本原理是可以将求解区域中的流体流动复制到具有相同流动结构的相邻区域内．通常应用在管道与流动方向一致的条件下．这两种计算区域见图7.16中的阴影部分．边界条件的进一步说明见图7.17．

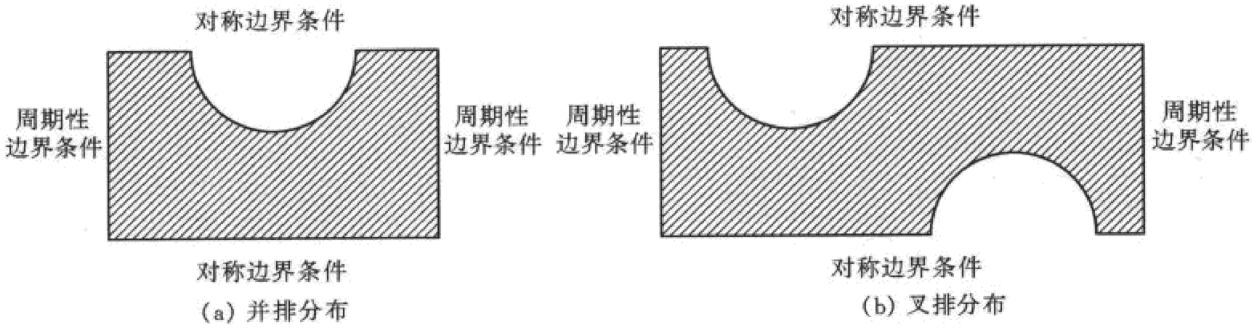


图7.17 对应于并排和叉排分布求解区域的边界条件说明

CFD模拟：计算域内的简化二维层流流动控制方程可写为

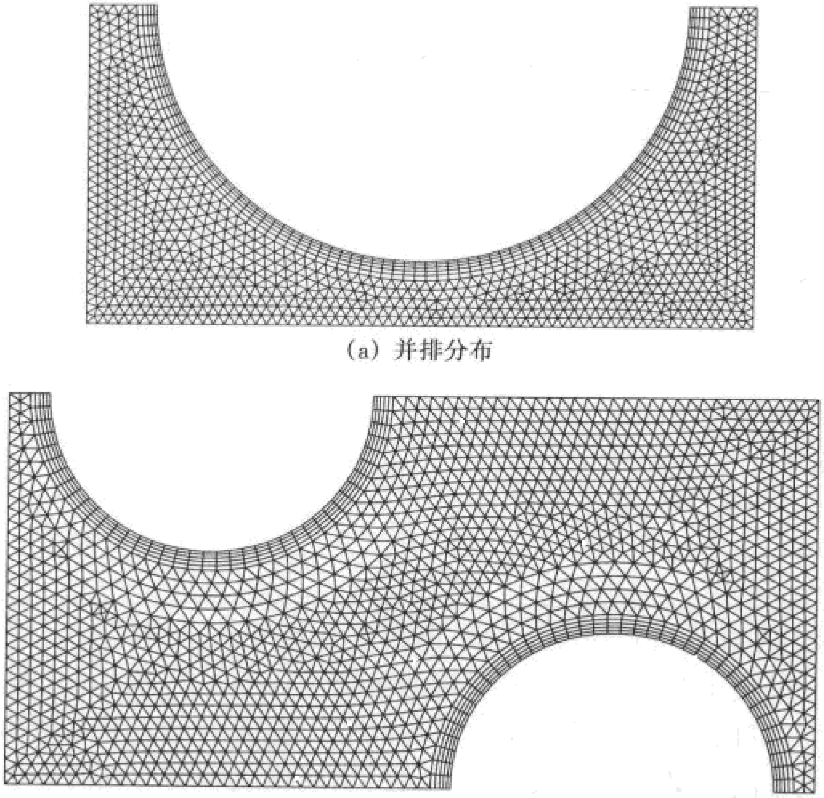
$$\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+S_\phi. \tag{7.6}$$

通过设置传递特性 ϕ 为1，u，v，$H(=c_pT$，其中 c_p 为比定压热容)，以及选择合适的扩散系数 Γ_ϕ 和源项 S_ϕ，我们可以获得质量、动量和能量守恒偏微分方程的具体形式，如表7.2所示．在稳态下求解，当焓的迭代残差小于 1×10^{-6}时，可认为获得收敛解．

表7.2 并排和叉排管组分布中控制流体流动的守恒方程

ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
ρ	0	0
u	μ	$-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)$
v	μ	$-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)$
H	$\frac{\mu}{Pr}$	0

如图 7.18 所示，在每个计算域内生成混合网格(由结构化单元和非结构化单元组成)．在接近壁面处采用四边形单元延展网格(结构化网格)来计算边界层，其他流动区域采用三角形单元网格(非结构化网格)．



(a) 并排分布

(b) 叉排分布

图 7.18 并排分布和叉排分布的计算网格

CFD 计算结果：使用商业有限体积 CFD 软件 ANSYS-FLUENT 6.1.22 对算例进行计算．用于 CFD 计算的并排和叉排分布管组的相关数据见表 7.3．工作流体为水．表中同时给出 25℃水的流动特性参数．基于这些参数，可以求得无量纲普朗特数 Pr，其值为 7.0．我们假设流体温度变化对流动特性参数的影响可以忽略不计，后面给出的计算结果都是在此假设下得到的．

第 2 章中已经显示出了无量纲雷诺数在描述流体流动中的重要性．另一个与热交换有关的重要的无量纲参数是由 Wilhelm Nusselt 提出的努塞尔数(Nu)，努塞尔数由对流换热系数 h 与 L/k 的乘积求得，其中 L 为特征长度，k 为热导率，即

$$Nu = \frac{hL}{k}. \tag{7.7}$$

大的 Nu 数表示流体流动中对流换热取代热传导占据主导地位．在换热器设计中，管径通常作为努塞尔数以及雷诺数定义式中的特征常数．对应的定义式为：$Nu_D = Dh/k$ 和

$Re_D = DU_{max}/\nu$. 此处，雷诺数定义式中 U_{max} 代替通用的入口速度作为参考速度，而 U_{max} 为最小流动面积处最大的流动速度，可由 CFD 直接求得. 我们注意到表 7.3 中给定的纵向间距和横向间距都与换热器的结构有关，无量纲纵向和横向间距都为 1.25 (12.5mm/10mm).

表 7.3 并排和叉排管组分布数据

参　量	大　小
管径 D/mm	10.0
纵向间距/mm	12.5
横向间距/mm	12.5
管壁温度 T_w/℃	70
质量流率/(kg/s)	0.01～0.4
水特性参数	
热导率 k/(W/(m·K))	0.6
密度 ρ/(kg/m^3)	998.2
比定压热容 c_p/(J/(kg·K))	4182
动力黏度 ν/(m^2/s)	1×10^{-6}
普朗特数 Pr	7.0

图 7.19 显示了并排分布管组在不同雷诺数下的流线图. 对低雷诺数流动，管间纵向和横向间隙空间内呈现出两种截然不同的流动区域. 在上下管之间的空间内，存在基本流动形式，即沿整个并排管组纵向的多层水平流动层. 在前后管之间的流动层中存在两个次级循环旋涡. 在充分高雷诺数流动条件下，大的次级旋涡破裂形成两个小的旋涡，进而加剧了流体流动和传热过程的复杂性. 从图 7.20 可以看到，在 $Re_D = 2735$ 时，次级循环强度的增加有效地抑制了管周围的热流层. 流体在低雷诺数下流动时，情况完全相反，在前管和后管区域附近具有相当高的温度(可认为是厚的热流层). 在计算域底部边界附近的深色温度云图清晰地显示了流过管组的主冷流体.

图 7.21 显示了预测的差排管组分布流体流动下游脱离主流边界层(图中用“S”点表示)的流线图. 此处流动形式更像围绕在管周围的蛇形缠绕. 进一步增加雷诺数，循环旋涡被抻长和加强，在高雷诺数下，清晰地显示出流动脱离管壁的情况. 这与经典的旋涡脱落现象有很多相似之处，反映了结构整体性(structural integrity)中的一个重要方面. 旋涡的脱落会对管壁产生一侧向力. 由于该力通常随旋涡脱落而周期性变化，因而管组可能受到强迫振动[有时称为自激振动(self-induced vibration)]. 从图 7.21 中还可以看出，上下叉排管组之间波状流动层的流线将次级拉长循环旋涡包附在前后管组之间. 这些旋涡实际上提高了管组的传热效率，这一点可以从图 7.22 中的深色温度云图上明显地反映出来(特别是在高雷诺数 $Re_D = 1340$ 时，流动区域的绝大部分完全被大约 20℃ 的冷流体占据). 叉排分布设计证实了另一个问题，即在高雷诺数条件下，与并排分布相比，叉排分布冷却该系统需要小得多的流体流量(试比较图 7.20 和图 7.22 中预测的最低温度).

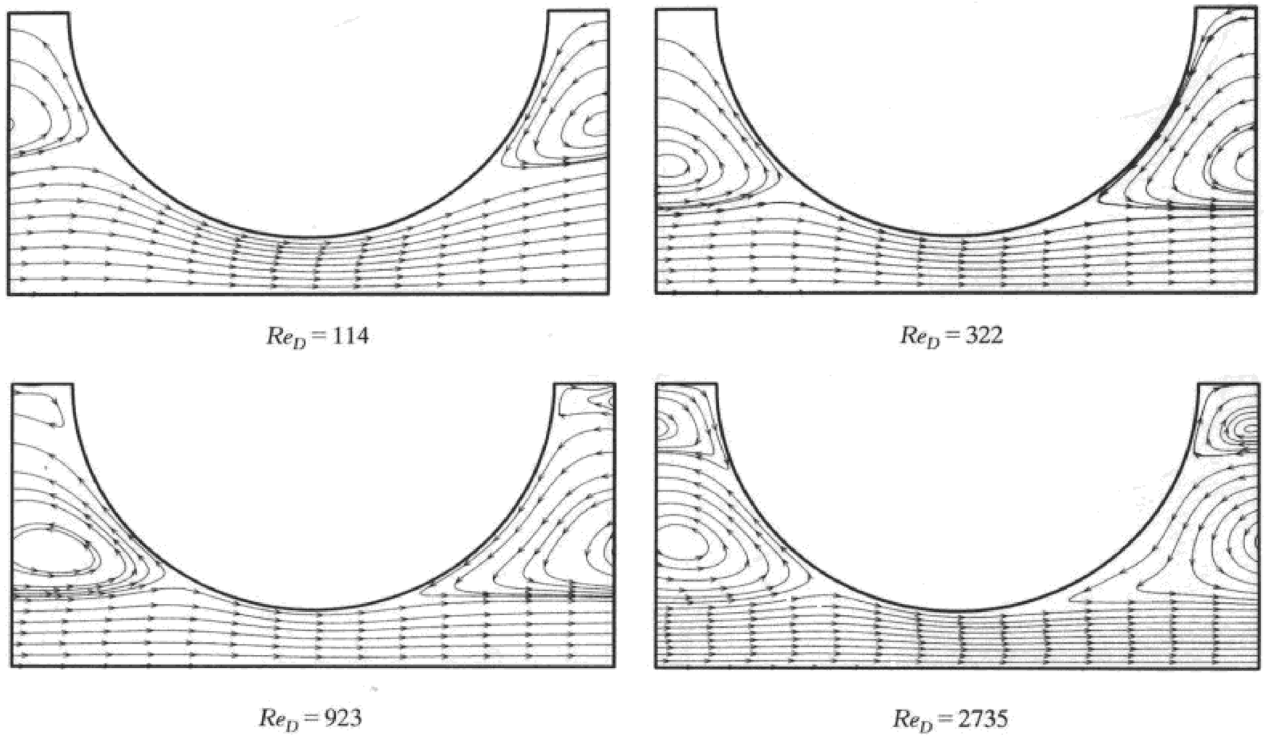


图 7.19 不同雷诺数条件下并排分布管组的流线

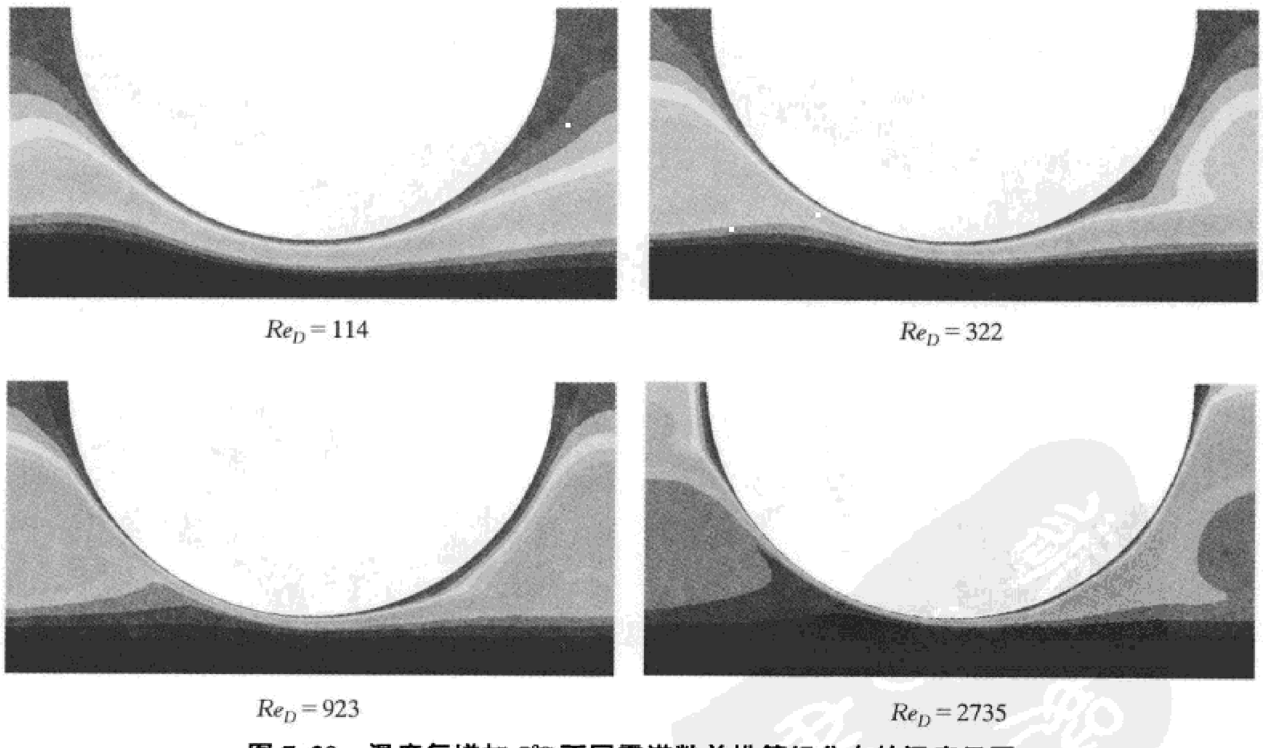


图 7.20 温度每增加 5℃不同雷诺数并排管组分布的温度云图

（最低温度（15℃）处在冷流体主流域内，最高温度（70℃）在固体壁面附近）

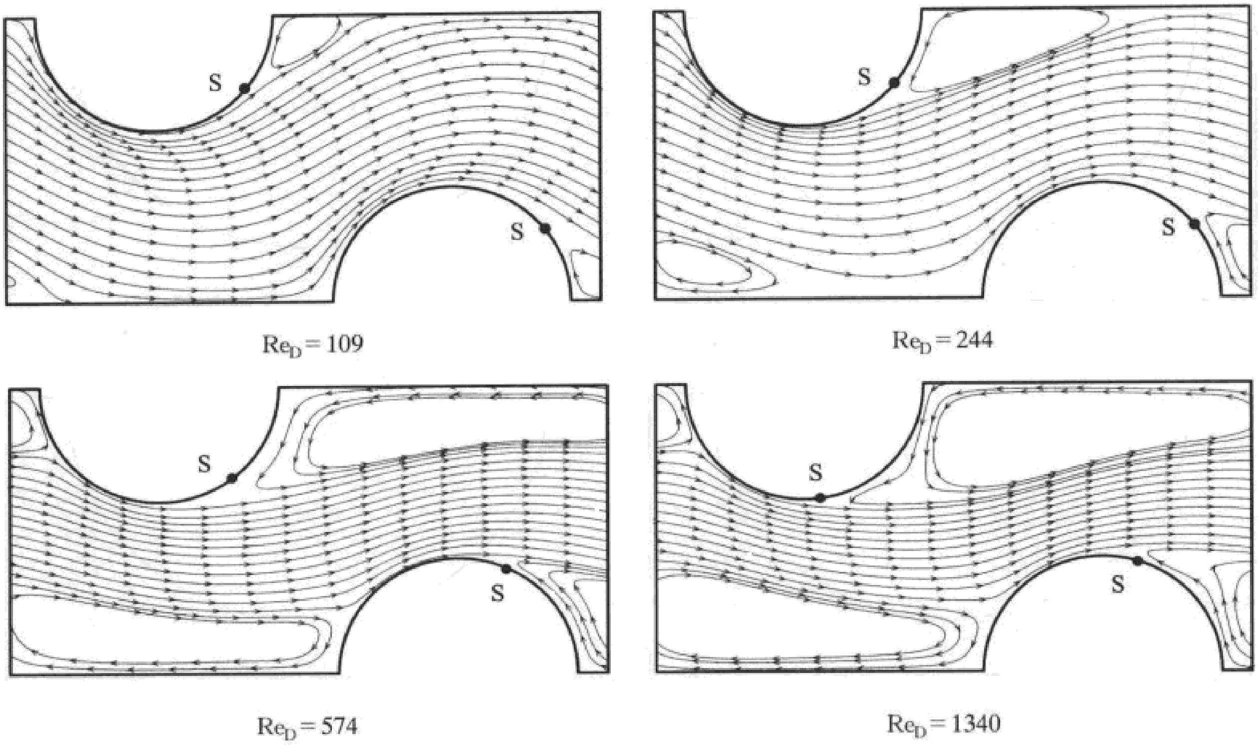


图 7.21　不同雷诺数下叉排分布的流线图

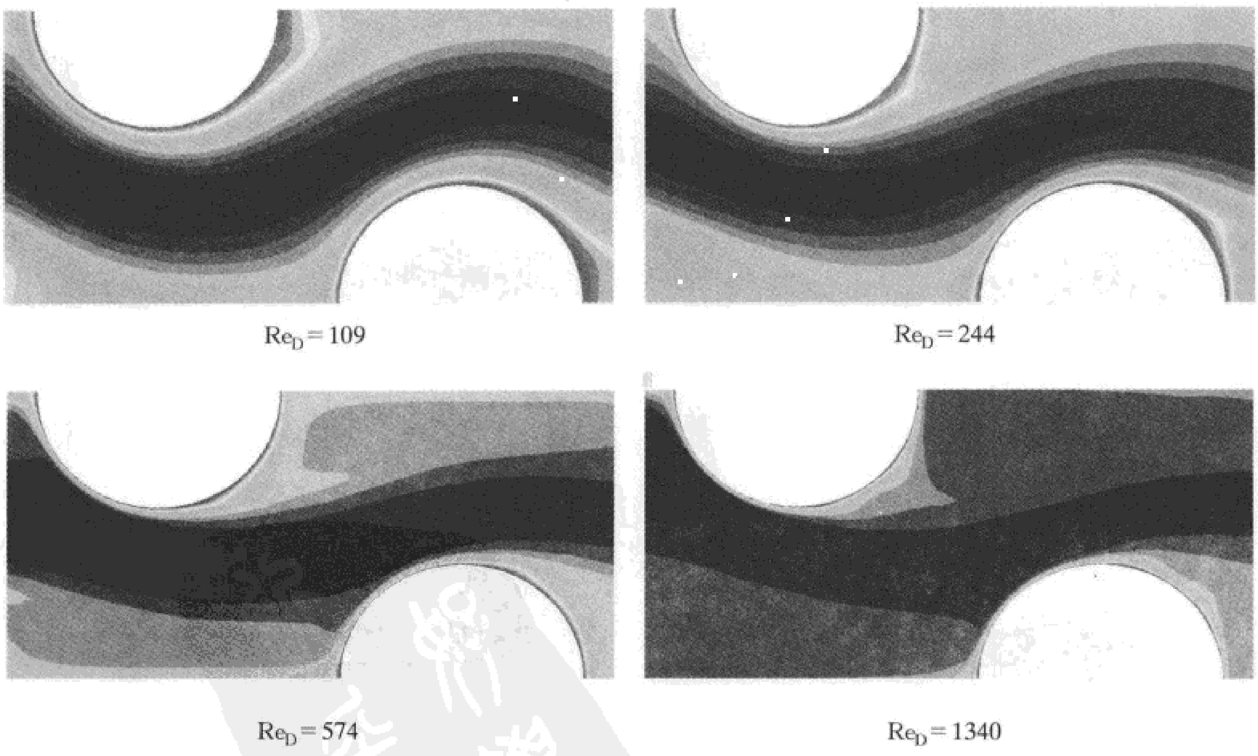


图 7.22　温度每增加 4.5℃不同雷诺数叉排分布的温度云图

（最低温度(20℃)位于冷流体主流域内，最高温度(70℃）位于固体壁面附近）

图7.23中，在相同无量纲间距下，利用努塞尔数和雷诺数之间的关系，进一步证实了紧凑式换热器中，叉排分布比并排分布具有更高的换热效率．热流体力学认为，在叉排分布紧凑式换热器中，主流动的流动路径更曲折，覆盖了更大的管组面积，因而更有效地换掉了管内部的热量．并排分布则恰恰相反，从其流动结构中可以清楚地看出，主流动路径只在管表面的顶部和底部滑过，因而削弱了换热的效率．

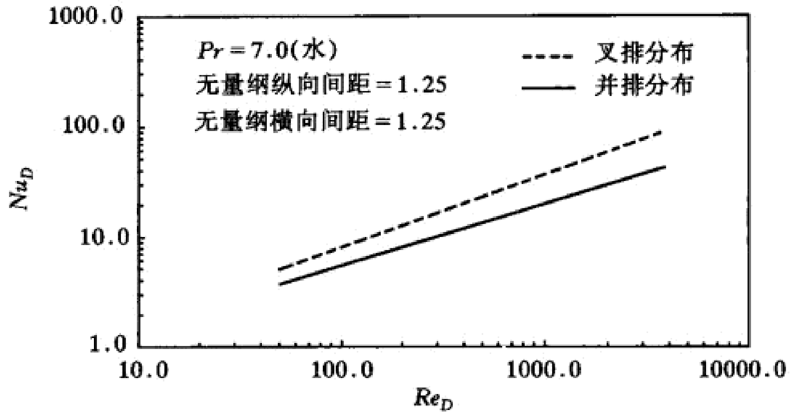


图7.23 并排和叉排分布管组的平均热传递

7.4.1.2 耦合传热和辐射换热[①]

单板Molybdenum靶(由铀和铝构成)在澳洲开放式轻水[Open Pool Australian Light-water(OPAL)]研究反应器中经过一定时间的照射，再将其从水中移到空气中，这要求严格控制其安全性和结构完整性．中子的轰击导致板内部的核裂变而产生热量．在水中经过一段长时间的充分冷却后，由于残余裂变热的存在，板经历了一个衰减的功率输出过程．当输出功率降低后，板被拆卸下来，放到夹持器上，然后在空气中靠自然对流进行冷却，得到用于放射医疗用的析出物Molybdenum．图7.24中表示了由铀和铝构成的Molybdenum靶的典型结构．根据热流体力学确定在空气环境中，在何种能量条件下，板内温度能低于600℃(铝的熔化温度)，并保证板结构完整不产生破裂或变形．

从建模的角度来看，这一特殊的CFD例子中有很多富于挑战性的问题．首先，从固体板传导出来的热量辐射到周围，然后通过空气流动的自然对流传递出去．为了正确预测固体-气体表面之间以及固体平板内部的温度(耦合传热)，必须考虑固体和气体区域之间的热传递过程，这需要求解每一个区域的能量守恒方程．其次，对空气在浮力作用下的流动建模，通常需要考虑附加的浮力，特别是在动量方程和湍流控制方程中更是如此．需要采用合适的源项公式来描述其流动特性．第三，需要使用合适的湍流模型以及恰当的边界条件，才能获得接近实验观察的真实流动行为的数值模拟结果．

① 本节中的素材由我的同事，工作在澳洲核科学技术机构(ANSTO)的David Wassink和Mark Ho提供．作者非常感激他们花费时间热心准备的素材并加入到本节中．

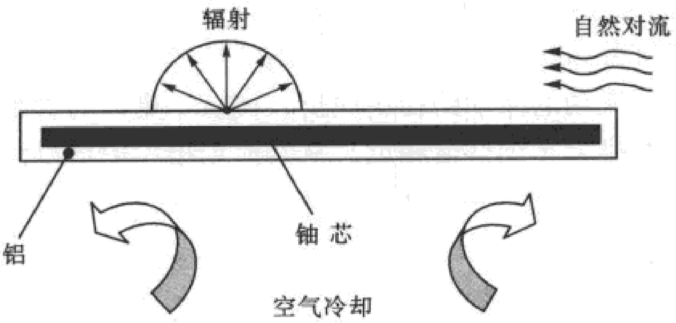


图 7.24 单板 Molybdenum 靶辐射热和空气自然对流冷却示意图

问题描述： ANSTO 水道实验室设计的试验靶板被两块铝板夹紧共同构成厚度为 5mm 的单板，如图 7.25 所示．在铝板之间，加工有与加热线和热电偶匹配的沟槽．在组装之前对板进行阳极氧化处理，实现加热线与靶板之间的电绝缘．铝板通过小螺丝钉紧固，在板面之间加有传热物以确保加热线与热电偶之间有良好的热接触．

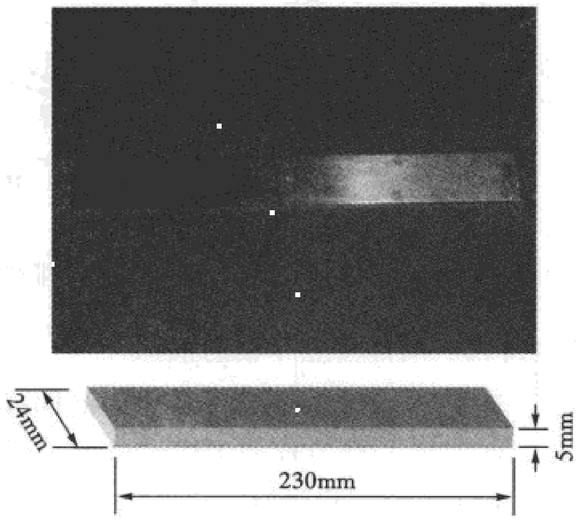


图 7.25 实验用组合靶板

考查靶板在空气中水平放置的情况．图 7.26 为置于四周开放方箱中心的靶板实验装置．在实验过程中，为了实现对空气对流流动的可视化测量，箱子的外边界要封闭起来．向箱中释放烟雾，通过照片和激光多普勒测速仪(LDV)测定靶板周围不同点的流动速度，记录流动的流线．固体板内部的温度通过连接到 LabView 数据采集系统上的热电偶来测量．板功率为施加到板上的电压与电流的乘积，通过手动来控制功率水平，传输过程中允许有功率损失以保证功率测量的准确性．为了确定板辐射换热的发射率对辐射功率的影响，采集不同表面光洁度的靶板．表面处理方法有：（ⅰ）表面阳极化处理；（ⅱ）用 800 号砂纸进行表面抛光；（ⅲ）通过浸入热水中形成表面氧化层．用热成像仪获得靶板的照片，得到发射率值，用于对 CFD 计算结果的评估．

CFD 模拟： 根据如图 7.27 所示的计算域(参见图 7.26 中用于 CFD 计算的 $600mm^2$ 计算平面)，建立二维悬浮实验靶板模型，应用 ANSYS-CFX 10 商业计算软件对问题进行求解．计算域内，固体板及周围空气中共生成正交网格单元 280000 个．如图 7.27 中的放大图所示，在固体板周围和内部划分精细网格，其目的是求解由于自然对流以及通过复合材料热传导形成的复杂边界层．为与实验条件相一致，模拟计算的所有边界条件均为 25℃ 壁面边界．工作流体为 25℃ 空气．

如前所述，浮力作用下的空气流动需要额外建模．动量方程中应包含由浮力引起的体

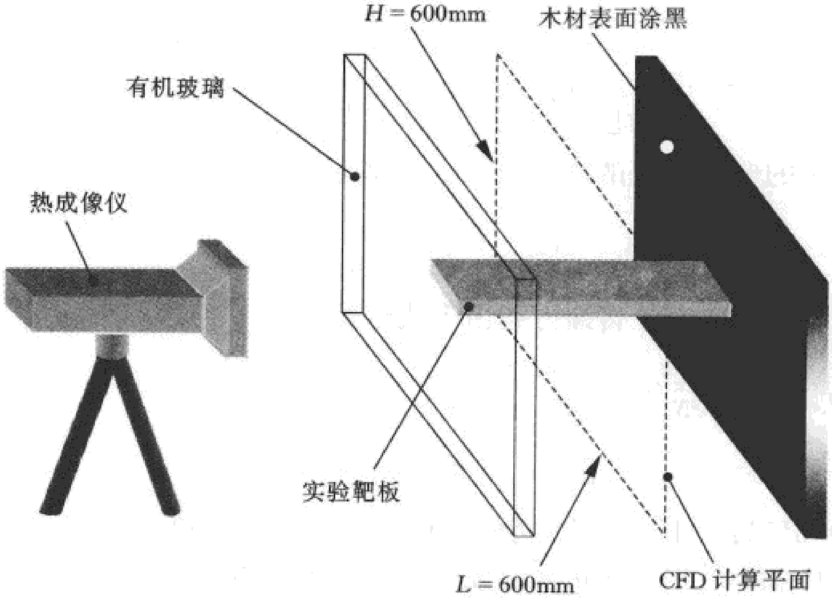


图 7.26 开放方箱内装有靶板的实验装置

积力. 本例中, 重力作用在 y 方向上, 因此, 基于浮力的附加源项应加到 y 方向的动量方程中去. 二维 y 方向的动量方程变为

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v v)}{\partial y}=\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}-g(\rho-\rho_0). \tag{7.8}$$

x 方向的动量方程以及连续性方程可表示为

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v u)}{\partial y}=\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}. \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0. \tag{7.10}$$

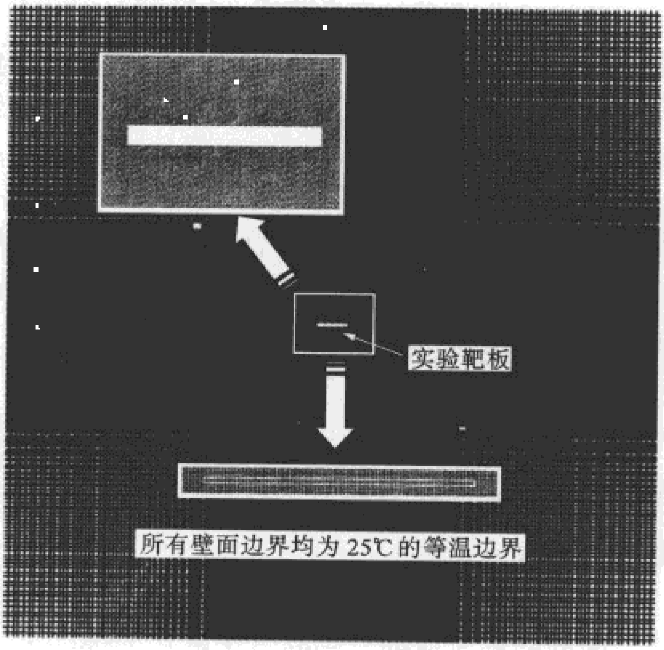


图 7.27 对封闭环境中实验用组合靶板的计算模型

式中, 正应力 σ_{xx} 和 σ_{yy} 与压力有关; 法向黏性应力分量 τ_{xx} 及 τ_{yy} 与控制体体积垂直, 根据牛顿流体方程(见附录 A), 切向黏性应力分量 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$. 方程(7.8)中的附加源项 $-g(\rho-\rho_0)$ 表示与密度(用变量 ρ_0 表示)有关的浮力项. 此外, 还需要对两流体 k-ε 湍流模型中 y 方向动量方程进行适当的修正. 与第 3 章中对两方程中湍流的产生项(P)和消去项(D)的描述相似, 模型中的浮力也按此考虑. k 方程的形式变为

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u k)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v k)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_T}{\sigma_k}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_T}{\sigma_k}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

$$+\underset{P}{\left\{2\mu_T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\mu_T\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}}-\underset{D}{\rho\varepsilon}+G_{\text{buoy}}. \tag{7.11}$$

式中，与浮力相关的 y 方向上的产生项 G_{buoy} 可表示为

$$G_{\text{buoy}}=g\frac{\mu_T}{\sigma_T}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial y}. \tag{7.12}$$

考虑浮力的湍流耗散率 ε 传递方程由下式给出：

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u \varepsilon)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v \varepsilon)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_T}{\sigma_k}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_T}{\sigma_k}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)+\frac{\varepsilon}{k}(c_{\varepsilon 1}P-c_{\varepsilon 2}D)+$$

$$\frac{\varepsilon}{k}c_{\varepsilon 1}c_{\varepsilon 3}\max(G_{\text{buoy}},\ 0). \tag{7.13}$$

上述方程(7.11)和(7.12)中的可调常数 σ_T 和 $c_{\varepsilon 3}$ 分别为 0.9 和 1.0.

为了计算固体和空气中的热传递，要求解固体和气相的守恒方程．固体板的二维热传导方程可表述如下：

$$\rho_s c_{ps}\frac{\partial T_s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_s\frac{\partial T_s}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_s\frac{\partial T_s}{\partial y}\right)+\dot{S}. \tag{7.14}$$

式中，T_s 为固相的温度；$\dot{S}$ 为体积内热源；变量 ρ_s，c_{ps}，k_s 为固体板的热物理特性．对于气相，通过热能 H 来求解传热．焓的二维控制方程由下式给出：

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u H)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v H)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\mu}{Pr}+\frac{\mu_T}{Pr_T}\right)\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu}{Pr}+\frac{\mu_T}{Pr_T}\right)\frac{\partial H}{\partial y}\right]. \tag{7.15}$$

式中，μ，Pr 为层流黏度和普朗特数；μ_T 和 Pr_T 为湍流黏度和普朗特数，其值分别为 0.7 和 0.9．气相温度可从求解焓方程(7.15)中得到．通过热量平衡可以获得固体与气体交界面处固体和气体的温度：

$$\underbrace{-k_s\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_s}_{\text{固体相热流量}}=\underbrace{-k_g\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_g}_{\text{气体相热流量}}+\underbrace{e\sigma(T_g^4-T_w^4)}_{\text{辐射热流量}}. \tag{7.16}$$

式中，σ 为斯忒藩-玻耳兹曼(Stefan-Boltzman)常量．方程(7.16)中的发射率 e 值通过热成像仪实验值来确定．

由于固体板周围采用了精细网格，因此首选剪应力传递(SST)湍流模型来求解接近固体表面的弱湍流流动．与软件中默认的标准 k-ε 模型采用的对数壁面函数相比，SST 模型可以更好地建立空气流动与固体壁面的联系．另一个需要考虑的重要问题是将固体边界与壁外计算域之间的辐射传热联系起来．此处用蒙特卡罗(Monte-Carlo)辐射模型来求解计算域内壁面间的辐射传递量．

CFD 计算结果：CFD 计算中需要输入的一个重要参数是固体板的表面特性参数——表面发射率(surface emissivity)．在实验过程中，将发射率为 0.1、发射功率为 25W 的低发射率实验板放在水中超过 3 天．由于氧化层的增厚，高温计测得其表面发射率增至 0.3

~0.5. 在 CFD 模拟中采用发射率的下限值 0.3. 根据发射功率为 25W，以及固体板受热体积 $2.76\times10^{-5}\mathrm{m}^3$[0.005m(厚度)×0.024m(宽度)×0.23m(长度)]，可以求出方程(7.15)中包含的体积内热源 $\dot{S}$(功率密度)为 $9.058\times10^{-6}\mathrm{W/m}^3$[$25\mathrm{W}/(2.76\times10^{-5}\mathrm{m}^3)$]. 应用 CFD 进行瞬态模拟，当残差小于 1×10^{-5}时认为计算收敛.

图 7.28 为实验过程中观察到的烟雾流动轨迹. 为了确定空气的流动速度，如图 7.28 所示，在对流流动中采用可见烟雾，这样可以采用成像和 LDV 技术在板周围的特定位置上测定空气的流动速度. 表 7.4 列出了特定位置上的实测速度以及计算模型预测的速度. 预测结果与实测数据有很好的一致性，证明了数值计算模型可以很好地求解这一流动问题. 模拟结果增强了我们应用 CFD 方法求解含有与热辐射相耦合的复杂过程的信心.

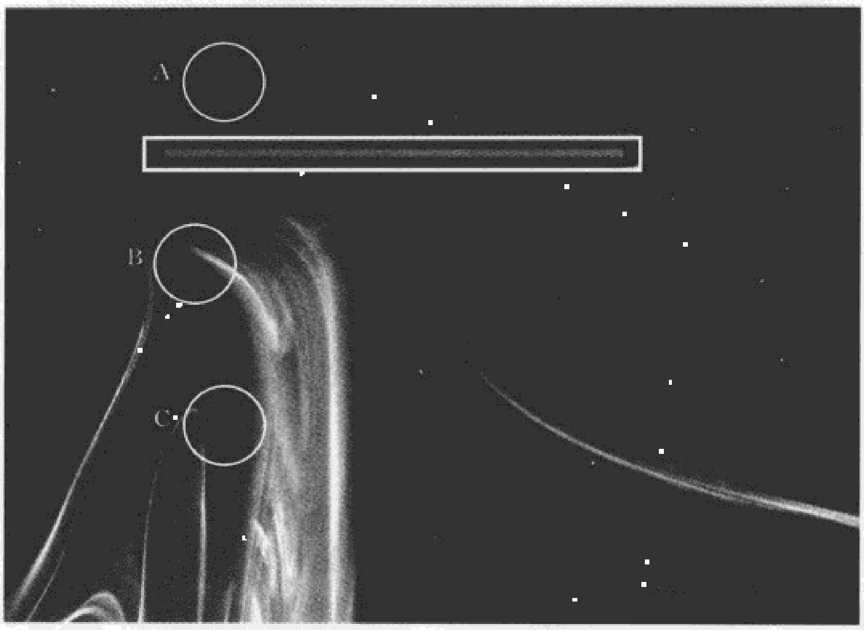


图 7.28 实验烟雾的流线

表 7.4 图 7.20 中特定位置上预测与实测结果的对比

位置	测量/(mm/s)	预测/(mm/s)
A	100	108.4
B	35	32.4
C	15	12.2

图 7.29 进一步展示了空气中和固体板周围预测的流线. 从图中可见，空气流动相当复杂，存在多重循环旋涡，在固体的上方有明显强烈浮升的热尾迹(thermal plume). 冷空气从侧面和底部流向固体板. 当空气流经固体板时，板产生的巨大热量使空气得到加速，从而产生了热尾迹. 空间内的大量冷空气将热尾迹迅速冷却，在到达外壁时其温度降至边界温度. 内热源持续加热板周围的流动空气，在浮力作用下，自由流动得以维持.

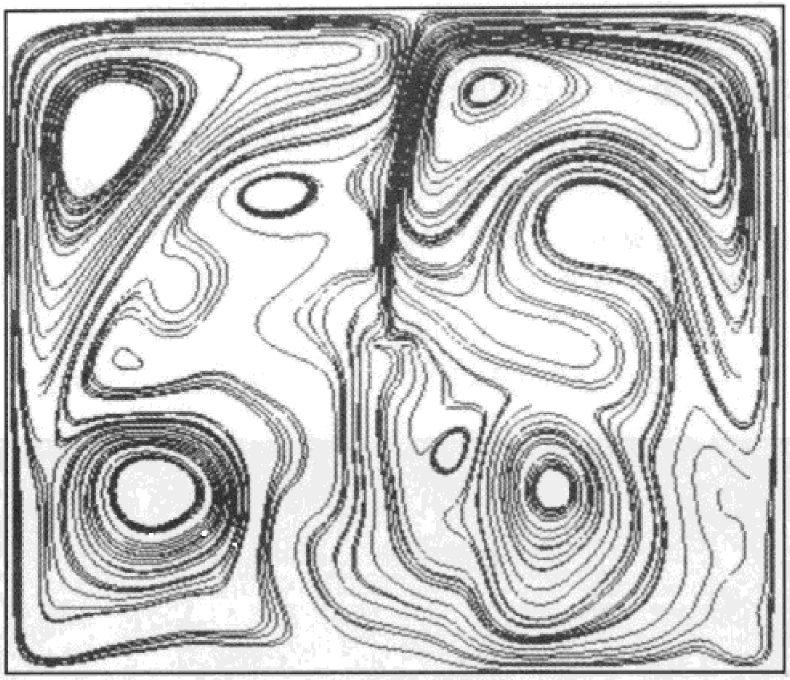


图 7.29 围绕固体平板周围空气的复杂流动流线

图 7.30 为预测的固体板内部温度云图以及板周围空气的速度矢量图．由空气速度矢量图可见，其流动形式与图 7.28 中的流线十分相似，流动都偏向于固体板的左侧．冷空气从一定距离处流向固体板，在围绕固体板流动的过程中被加热．通过温度云图和速度矢量图可见产生了强烈的浮升热尾迹．由于铝是非常好的导热体，因此，固体内部和表面的温度几乎相同．在 CFD 模拟中，预测到的固体区域温度均为 164.5℃．

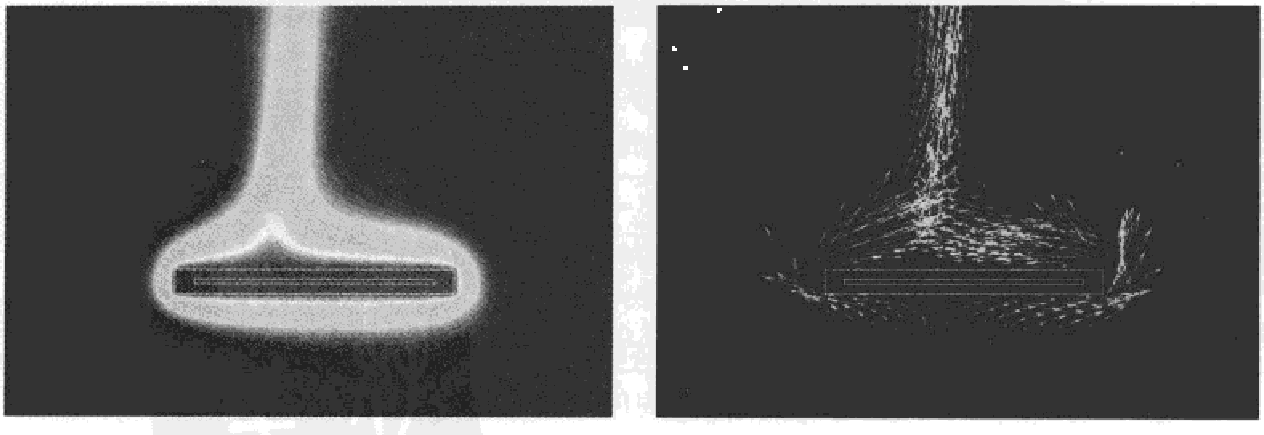


图 7.30 平板周围和其内部的温度云图以及固体平板周围的速度矢量

为确定辐射换热对数值求解的影响程度，还对在不考虑辐射换热时的流动进行了计算．模拟结果显示固体温度大约为 300℃，比有辐射换热时要高得多．这两个预测温度哪

一个是正确的并且最为重要？哪一个反映了实际情况？让我们思考这两个计算结果的意义．在实验过程中，进行了反复严格的测量，实验结果趋于更低的温度，固体板温度为159℃左右．实验结果清晰地表明，CFD 模型中必须加入辐射换热，其结果才能符合实际物理流动规律．实验过程中还测得辐射热量损失为固体板发射总热量的 40%，这进一步说明了应将辐射换热加入到 CFD 模型之中．

此外，应用 CFD 对发射率同为 0.3、不同发射功率条件下的温度进行了计算，其结果见图 7.31．预测温度与实测结果以及总热量损失的解析式[Incropera 和 DeWitt(1985)提出]求解结果非常接近，这进一步证实了应用该模型可以很好地求解这一特定流动问题及其传热特性．

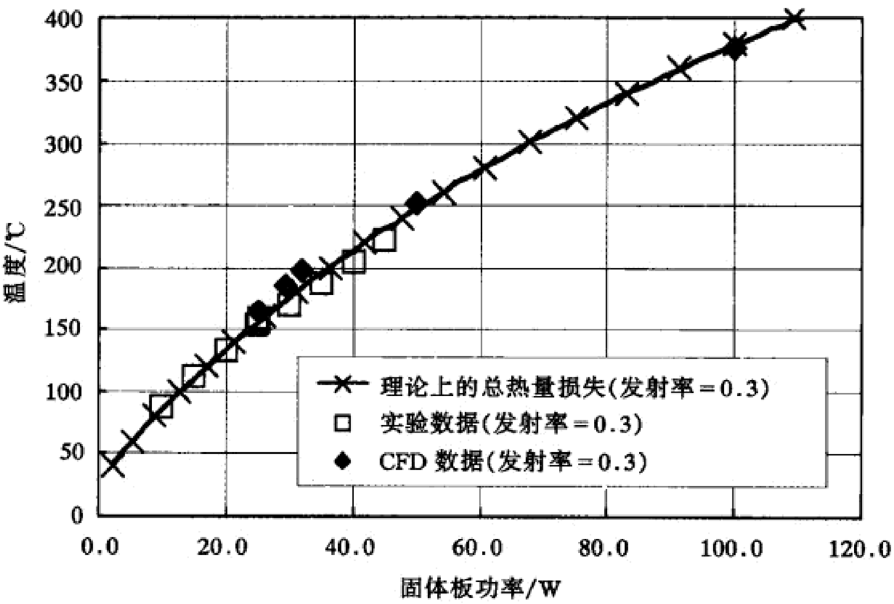


图 7.31 固体板内部及其周围的温度分布

7.4.2 浮力作用下的自由火焰

McCaffrey(1979)以及 Cox 和 Chitty(1980)的实验证实，浮力火焰可分为稳定火焰区、断续火焰区以及浮力尾迹区三个不同的区域．图 7.32 显示了浮力火焰三个区域的典型结构(Cheung 等，2007)．

浮力火焰初始动量通常非常低，因此主要受浮力的影响．火焰不断摆动的特点通常称为吹动效应(“puffing” effect)，是由火焰尾迹上方的相干结构(coherent structures)引起的．变化的浮力引起火焰的不稳定，产生相干结构，并在火焰顶部形成大的火焰旋涡，逐渐从火焰上方升腾直至燃尽．火焰的跳动特性主要由火焰中的空气参入量、火焰的高度、火焰的燃烧效率以及辐射出热量等决定．模拟这样的火焰具有相当的难度．

McCaffrey(1983)提出的“puffing”机理可以描述如下：燃气的初始动量以及与滞止

空气燃烧形成的浮力形成了一个大的环形旋涡；空气被携带进入燃烧气体加速反应区域，产生特有的“燃烧颈柱”(necking)；由于旋涡向上传播，因此形成了一个低压区，并且马上被燃烧气体充满，形成了一个“火焰凸起”(bulge)；“火焰凸起”在上升时导致燃料源处形成另一环形旋涡；“火焰凸起”下面的旋涡推动火焰尾迹表面沿径向扩张，而“凸起”上部牵引火焰尾迹表面向内收缩，因而“火焰凸起”得以维持；上部旋涡内的旋转运动引起火焰尾迹轴向拉长．火焰这种周期性的摆动在文献中通常被称为火焰摇曳现象(flame flickering phenomenon)的跳动频率(pulsation frequency)．Malalasekera 等(1996)对浮力扩散火焰跳动频率的研究情况(Protscht，1975；Zukoski 等，1984)作了很好的总结．

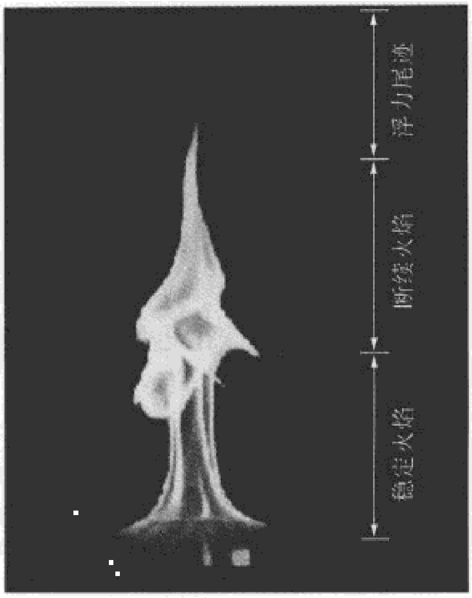
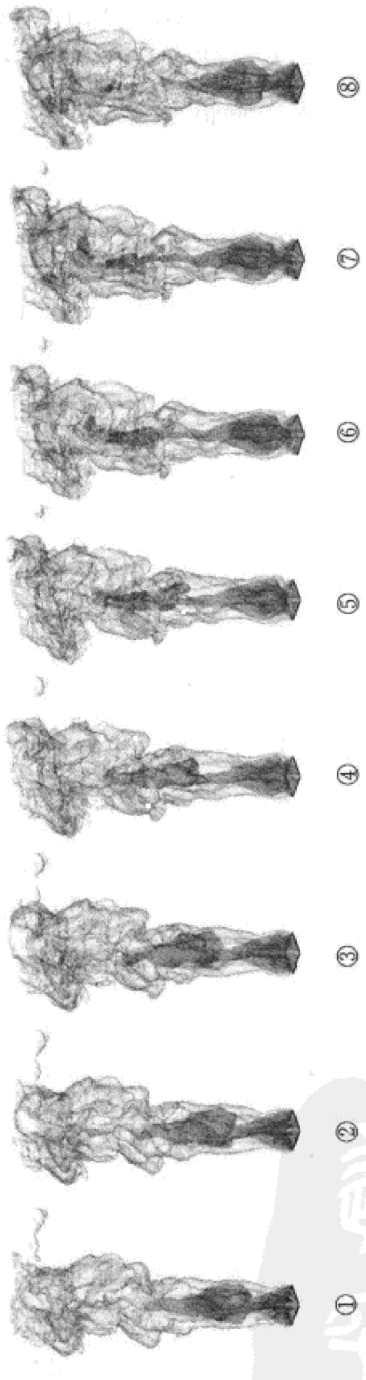


图 7.32 浮力火焰照片

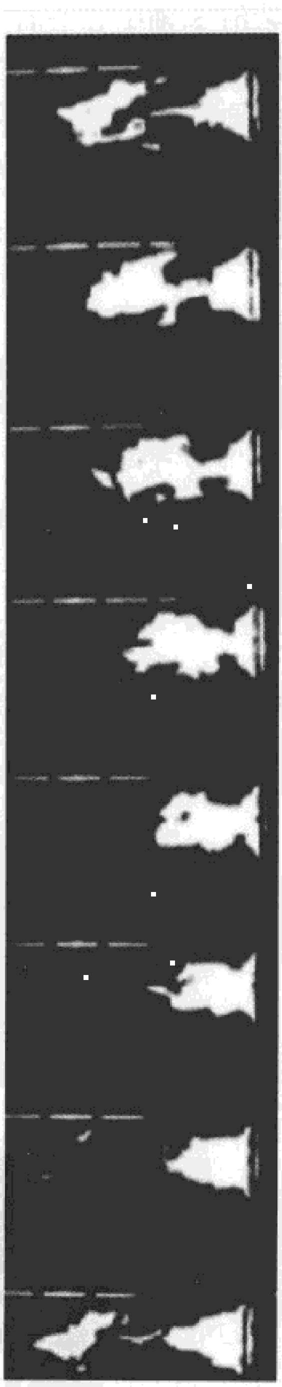
CFD 模拟计算：应用自编的大涡模拟(LES)计算程序对湍流浮力火焰进行了求解，以检验湍流、燃烧、煤烟反应以及辐射效应之间的耦合关系．应用 LES Smagorinsky 亚格子尺度(subgrid-scale (SGS))湍流模型封闭三维可压缩滤波(Favre-Filtered)质量、动量、能量以及混合率及其标量守恒方程．这种数值方法基于预测-修正两步方法，计算低马赫(Mach)数、可压缩流动密度和流体流动方程之间的强耦合关系．燃烧模型采用极速化学反应方法(infinitely fast chemistry approach)．用假设的 Beta 滤波密度函数以及标量方差(scalar variance)守恒方程共同来计算 SGS 混合率以及滤波成分耗散波动和局部热释放率．烟雾模型考虑了成核及其表面生长．采用离散坐标模型计算辐射换热．关于该模型的细节，参见 Cheung 等的研究(2007)．

在 3m×3m×3m 计算域内进行了三维计算．气态燃料通过地面上的多孔方形(0.3m×0.3m)火炉喷射出来．在计算域内共产生 96×96×96 个结构化网格单元．经过 27500 个时间步长进行瞬态分析．为确保获得稳态分析和准稳态条件，模拟使用 35s 物理时间步长．使用奔腾 IV 计算机(CPU 3.0 GHz，内存 2.0 G)进行模拟时，采用物理时间 35s 步长达到稳态和准稳态，实际计算用时将超过 400 小时．

CFD 模拟结果：图 7.33 显示了用 LES 方法得到的一系列摇曳过程中的火焰与 McCaffrey (1979)实验图片的比较．火焰的自然摇曳行为表明流动经历了沿轴向的周向移动．图 7.33 中的数值预测结果与三种不同的表面温度相对应，分别为 800K(可见火焰)，450K 和 310K(冷烟雾)．图中，1 和 8 帧数值模型所描述的火焰明显地由相互脱离的上部分以及下部分稳定火焰组成，与对应的实验图片非常相近．与实验观察的火焰照片对比表明，模型充分捕捉到了第 8 帧中火焰分离之前的上冲火焰结构(如图 7.33 中第 6、第 7 帧所示)．



(a) 大涡模拟预测结果



(b) 实验观测到的火焰结构

图 7.33 摇曳循环过程中的 puffing 效果图

在观察火焰摇曳变化中，可以确定火焰的三个不同部分．模型清晰地预测了位于多孔火炉上方的稳定火焰区域、火焰“puffing”效应中的断续火焰区域以及浮力火焰尾迹区域．图 7.34 显示了第 8 帧沿 z 轴中心平面上划分的三个不同区域的瞬时等温线．在断续火焰和浮力火焰尾迹相间处，是浮力火焰中的典型特征，预测的平均温度约为 573～673K．由于火焰周围的空气被携带进入火焰尾迹中，从而降低了燃烧气体的温度．在高于 2m 处火焰被充分冷却，平均温度大约为 320～400K．

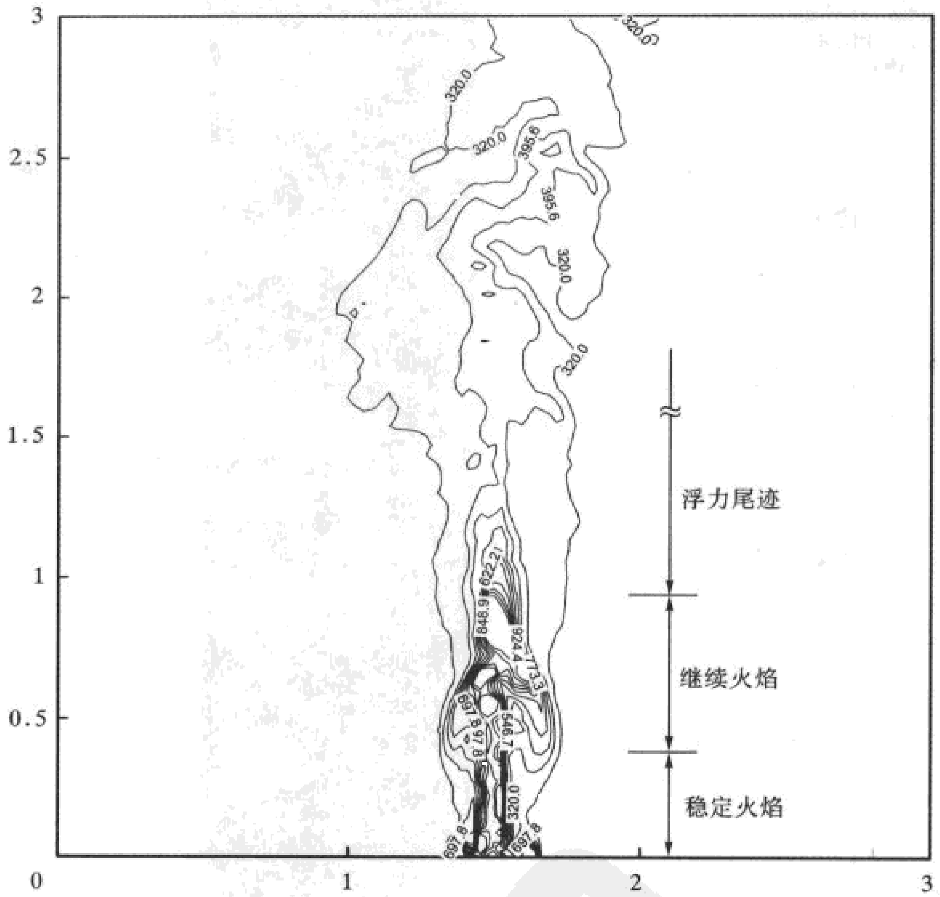


图 7.34　火焰三个区域瞬间温度云图

中心线上轴向速度和温度的模拟结果如图 7.35 所示．为了便于同 Baum 和 McCaffrey 提出的关系式(1989)以及 McCaffrey(1979)给出的实验数据相对比，温度用温度差 ΔT 的形式表示，速度用 $v/Q^{1/5}$的形式表示，高度则用 $y/Q^{2/5}$的形式表示．两种方式表示的计算结果和实验数据显示在图 7.35 之中．对于大的 y 值，即火焰尾迹区域内，v 和 ΔT 按 $y^{-1/3}$和 $y^{-5/3}$变化．在火焰的其他部分中，即 y 值较小时，v 明显趋近于斜率为 $y^{1/2}$的直线，而 ΔT 则趋近于斜率为 0 的直线．连接尾迹中的点与火焰区域中的点，就可以得到间歇区域．McCaffrey(1979)提出，在该区域内，v 和 ΔT 直线的斜率分别为 0 和 y^{-1}．从图 7.35 中可见，预测的中心线上的轴向速度和温度与 Baum 和 McCaffrey(1989)提出的关系

式以及 McCaffrey(1979)给出的实验数据有很好的一致性．从预测的温度和速度平均值中也可以清楚地区分出三个截然不同的区域．

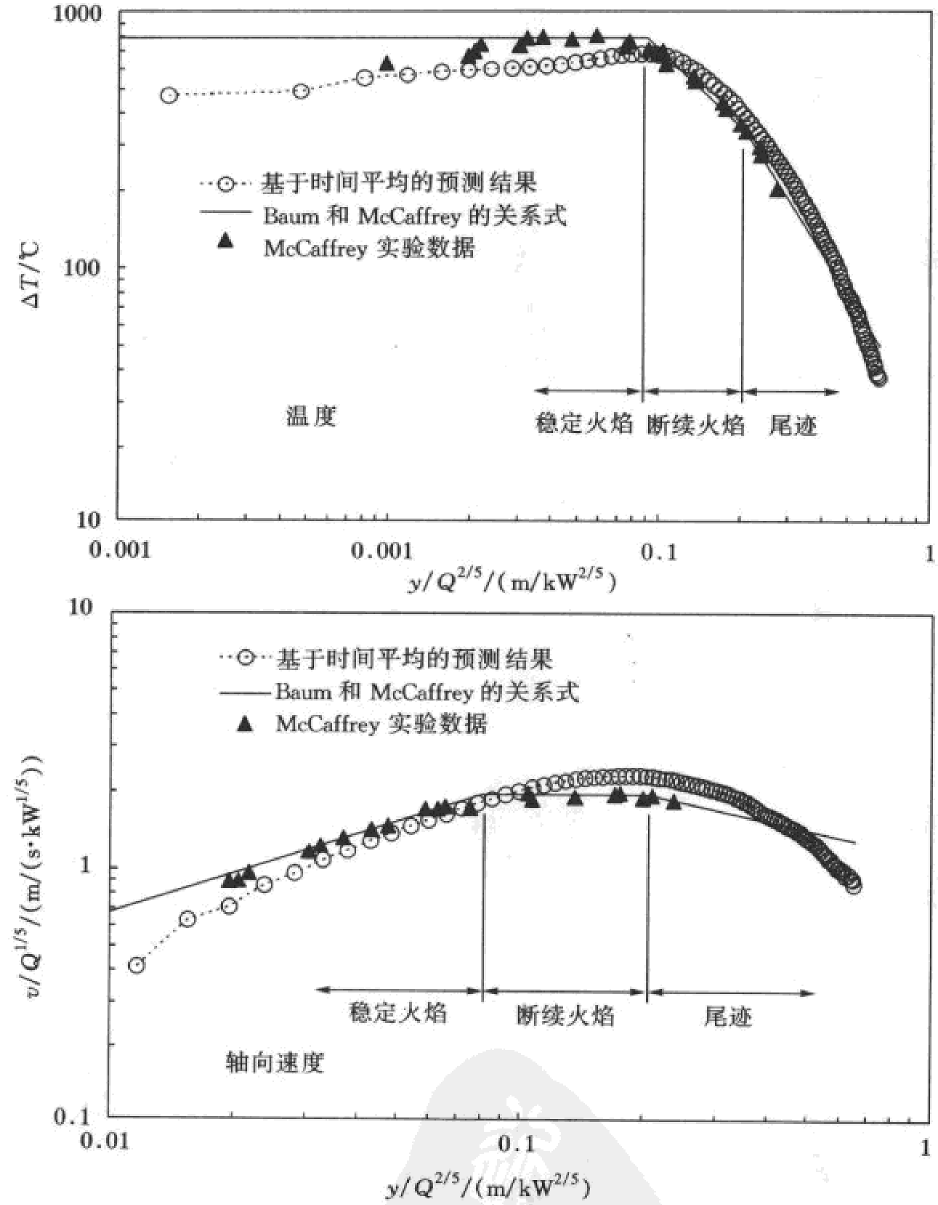
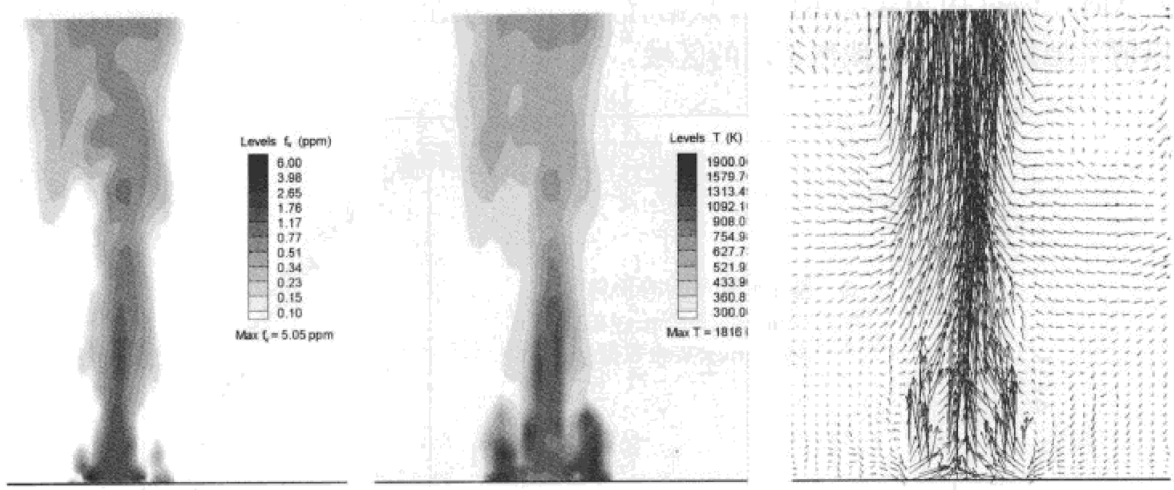
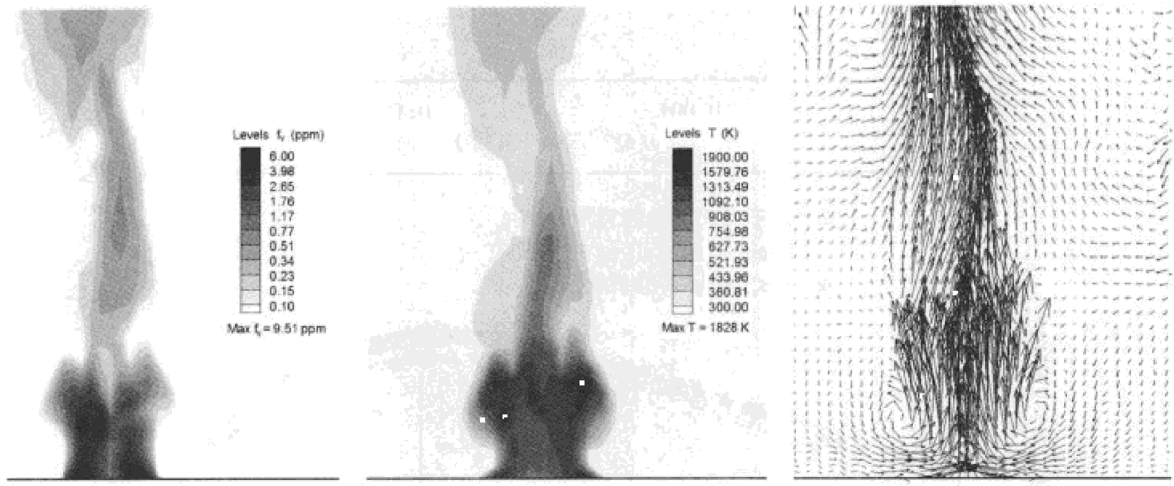


图 7.35 温度和轴向速度的平均预测结果与实验数据、解析式的比较

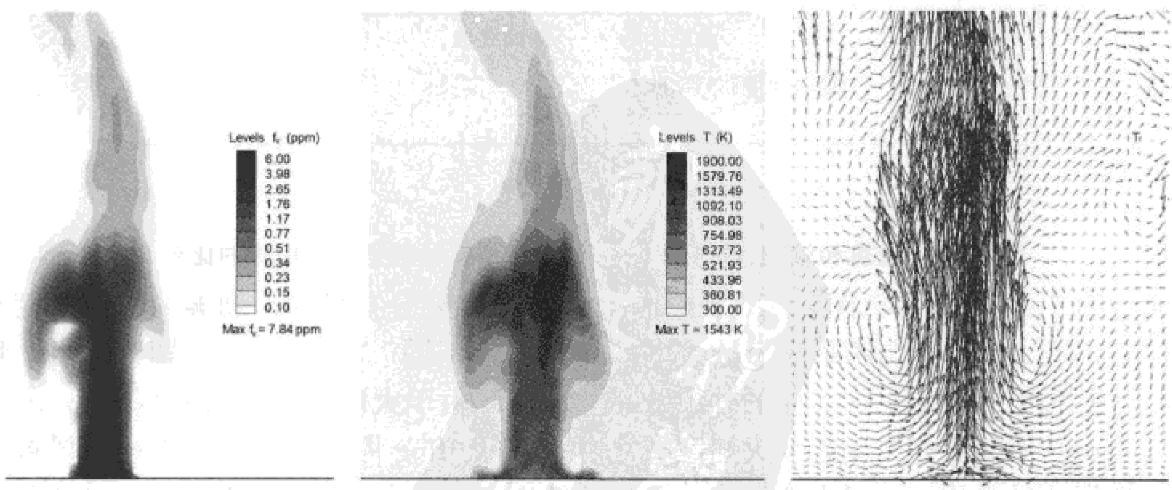
通过图 7.36 中温度云图和速度矢量图中的瞬时烟雾分布可知，烟雾的辐射温度在下降．浮力扩散火焰行为与喷射扩散火焰行为有很大的不同．在 Puffing 周期开始时，烟雾在燃料和空气相遇之地——火床的外缘处——形成．由于火床上方的自激(self-excited)环状涡旋流动，烟雾被拖曳到连续火焰区域之中，在 Puffing 周期的中期和末期阶段被带向上方．烟雾的最高处位于浮力燃烧连续火焰区域的中部，由于烟雾的辐射，因此该处的温度有所降低．



(a) Puffing 过程的前期



(b) Puffing 过程的中期



(c) Puffing 过程的末期

图 7.36 Puffing 周期中用温度云图和速度矢量表示的瞬时烟雾分布

7.4.3　车队中的空气流动

为了满足消费者的需求，降低成本，迅速占领市场，汽车制造商们加快了开发更经济、安全和舒适汽车的步伐．传统的风洞实验造价昂贵，路面实验技术可能要花费很长的研发周期．为克服上述困难以及保持在市场上的竞争力，汽车制造商们需要关注计算技术，如计算流体力学．现在，在轿车研发中常常使用 CFD 和模型实验，用全尺度风洞来验证和改进对整体流场的模拟，而不再对各个参数进行泛泛的研究(Hucho，1998)．

随着人口的持续增长，对更实用和高效运输方法的需求更为强烈．未来一代智能运输系统(Future Generation Intelligent Transport System，FGITS)的出发点是使高速公路上的车队保持明显小于车体长度的车间距．通过该系统，期望提高每辆汽车的空气动力学效率．因为车间距减小到车长范围内时，汽车的牵引系数会相应地减小．车队燃料的燃烧效率也可以通过减少排放水平得到提高，并能增加安全性．汽车可以安装诸如距离传感器、自适应刹车系统(ABS)、全球定位系统(GPS)等智能运输系统(ITS)，这样可以保证汽车在近距离内(如在小于车长的距离内)像火车车厢一样安全地行驶．当然，在实施该系统之前，应该对车辆近距离行驶的气体动力学行为进行详尽的研究．在对车辆间各种不同相互关系的流体动力学研究中，CFD 起着重要的作用．

问题描述：Ahmed 模型的几何形状如图 7.37 所示，为普通非流线型车体，后部有一角度不同的倾斜区域．尽管该模型的几何形状相对简单，但该模型能够反映实际公路汽车 C-pillar 产生的主要流动结构．

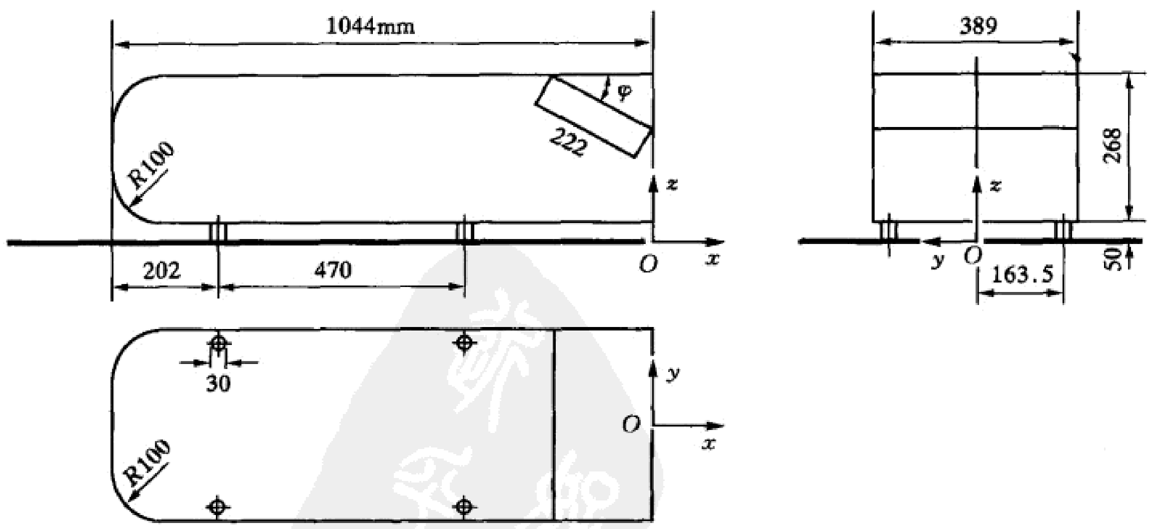


图 7.37　Ahmed 汽车模型的几何形状和尺寸

本例的实验中，一前一后的两部汽车如图 7.38 所示．车被置于地面固定风洞设备的封闭射流之中，实验区域为高 2m，宽 3m，长 9m．两个 Ahmed 模型中，前面为 75% 比例模型，后面为 100% 比例模型，模型后面有 30° 倾角．根据 100% 比例模型的长度($L=$

1.044m)设定不同的车间距，从 $0.25L$ 至 $2L$ 之间不等．自由来流速度设置为 30m/s，75% Ahmed 比例模型长度对应的雷诺数为 1.55×10^6．来流湍流强度保持在 1.8%，阻塞率(blockage ratio)小于 2%，本研究中不作修正．

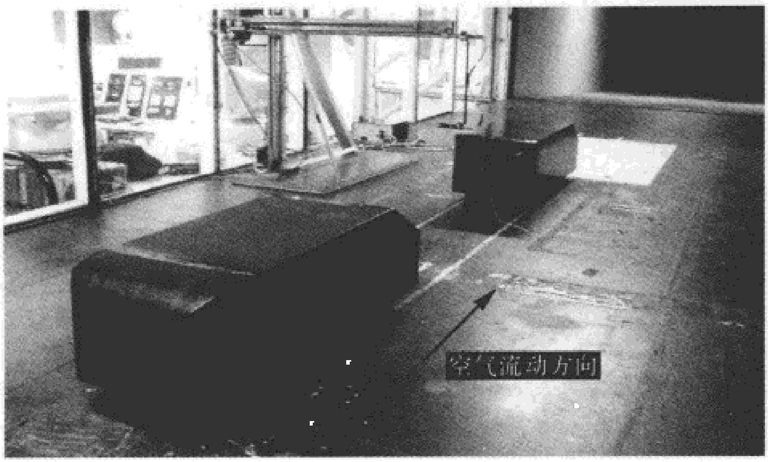


图 7.38 在风洞装置中的前后两辆 Ahmed 汽车

为确定流动结构与后车受力的关系，对每一模型上的升力和牵引力进行测量．通过安装在前车(75%比例模型) 中的 JR3 六分力平衡传感器实施测量．图 7.39 显示了传感器的分布．关于试验装置的更多细节以及下面讨论的 CFD 模型参见 Rajamani(2006)．

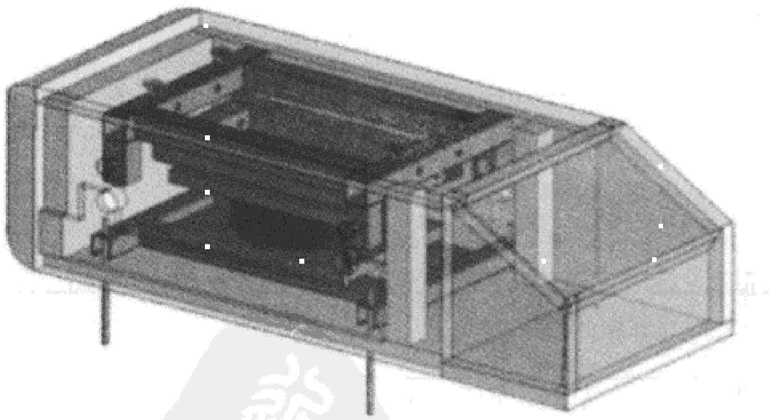


图 7.39 前车模型内力平衡传感器的分布

CFD 模拟：计算区域为风洞的一部分，如图 7.40 所示．图中的放大部分为前后两 Ahmed 汽车模型．实验区域的总长度为 $13L$．入口距前车头部 $4L$，出口距后车尾部 $8L$，等比例模型侧面到两侧距离 $2L$，上方距等比例模型顶部 $2.5L$．实验和计算研究中，前车距地面 0.0375m，后车距地面 0.05m．

在计算域内生成超过 180 万个四面体非结构化网格单元．应用商业 CFD 计算软件 ANSYS-FLUENT 6.1.22 对湍流流动进行模拟计算．对于本例的特定流动，首选湍流模型为

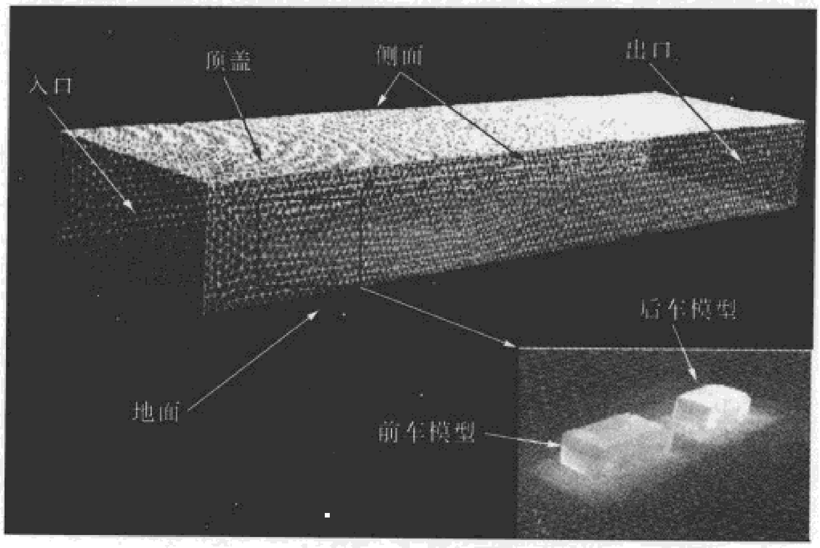


图 7.40 特定风洞中前后 Ahmed 车模型的计算区域

realizable k-ε 模型．为满足质量守恒，采用 SIMPLE 算法建立速度和压力之间的联系，应用多重网格求解器来加速数值计算求解．当残差小于 1.0×10^{-5}时，认为计算收敛．

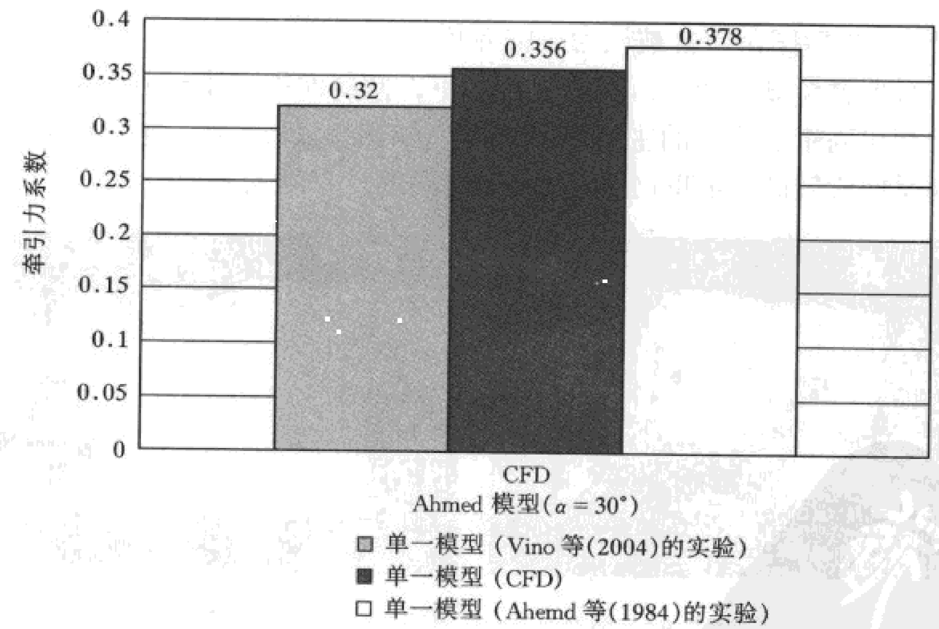


图 7.41 单一 Ahmed 模型牵引系数比较

CFD 计算结果：Ahmed 等(1984)对单一汽车模型临界后部倾角为 30°的情况进行了研究，用于验证 CFD 模型对该种情况的模拟结果．对于前后排列的两个汽车模型的情况，与 Vino 等(2004)的实验数据进行比较．对于单一 Ahmed 汽车模型牵引系数的预测结果如图 7.41 所示，与 Ahmed 等(1984) 以及 Vino 等(2004) 的实测数据比较，有很好的一致

性．前后排列的两车模拟结果如图 7.42 所示，除车距较小时牵引系数的预测与实测之间存在一定的差异外，预测值与实验数据仍然很接近．

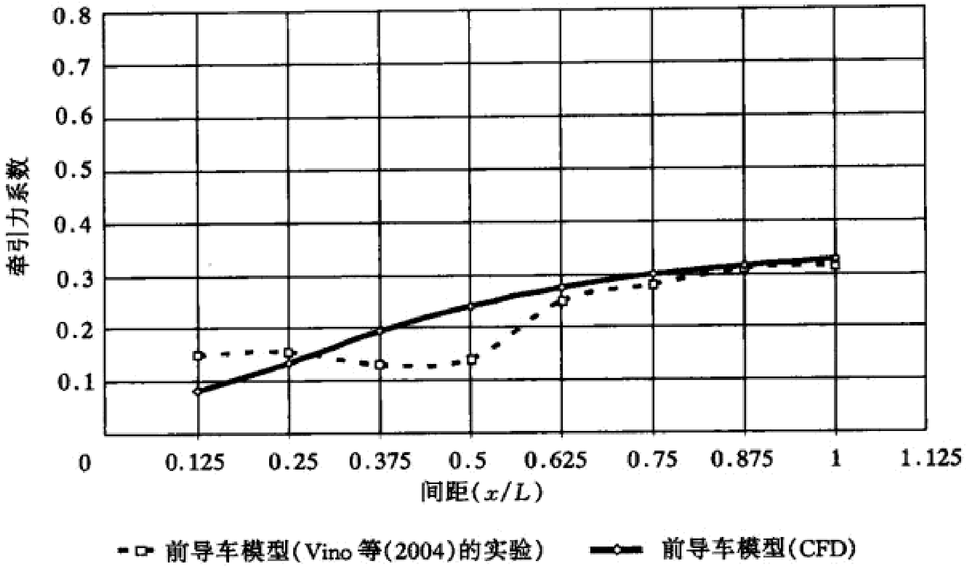


图 7.42　车间距对前导车模型的影响

Ahmed 模型 30°后倾角常常被认为是临界角(Ahmed 等，1984)，因为略微增加或减小该角度，牵引系数就会显著变小．在临界倾角下，倾斜面由于流动分离引起的分离气泡达到最大，这是获得高牵引系数的主要原因之一．如图 7.43 所示，这一高牵引特性的主要原因是出现强反向旋转的 C-pillar 旋涡，而该旋涡内具有巨大的动能．

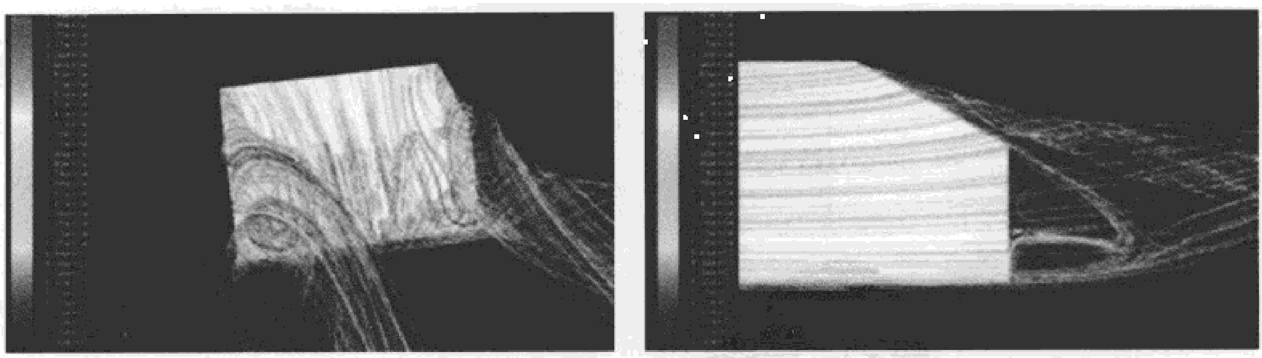
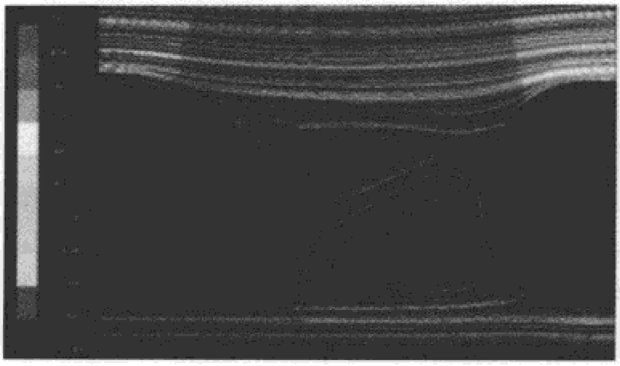
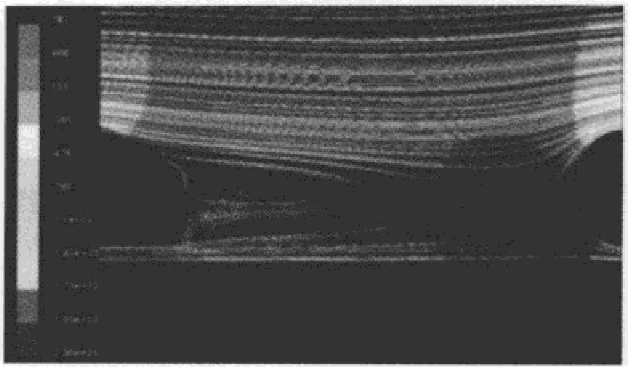


图 7.43　临界角为 30°时的高牵引流动结构

在车距非常近时，如图 7.44 中 $x/L=0.25$ 时，前车的牵引系数比后车的牵引系数低得多．其原因是由于后车处在前车的尾迹当中．后车的出现增加了前车的地面压力，因而减小了前车的牵引力．前车后部倾斜边缘分离流动对后车前部产生流动冲击(flow impingement)，增加了后车的牵引系数，从图 7.44 中的压力迹线可以看到这一点．当车间距为 $x/L=1.0$ 时，后车的牵引系数达到其峰值(见图 7.44)，牵引力的增加源于非常高的流动冲击．



(a) $x/L=0.25$



(b) $x/L=1.0$

图 7.44 汽车之间的压力迹线

CFD 非常适合于对各种选定的形状进行分析. 在预测汽车不同设计结构对流动特性的影响时，这种模拟特别有用. CFD 模拟也可以研究某些风洞无法实现的流动环境. 让我们考查 Ford Falcon EXT 2003 汽车 25% 比例模型，其尺寸由图 7.45 中给出. 该模型是基于车体流线结构的简化模型. 侧面后视镜、保险杠、发动机部件以及车下面的信息等未加考虑. 测试速度为 40m/s，模型长度对应的雷诺数为 3.3×10^6.

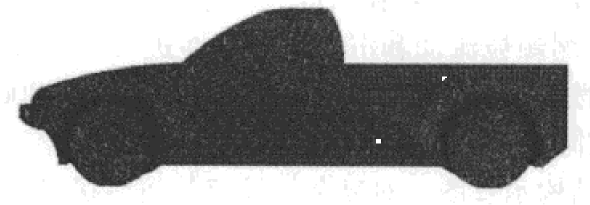


图 7.45 皮卡模型参数

对牵引系数的影响进行分析. 本例中，车后箱处于开放状态. 预测的牵引系数为 0.44，比后箱处于封闭状态的牵引系数 0.38 要大. 当车后箱开放时，从如图 7.46 所示的流动迹线可见，在车后面形成了一个大的循环流动. 从图中所示的对称面上的压力分布可见，接近车厢区域的压力降相当大.

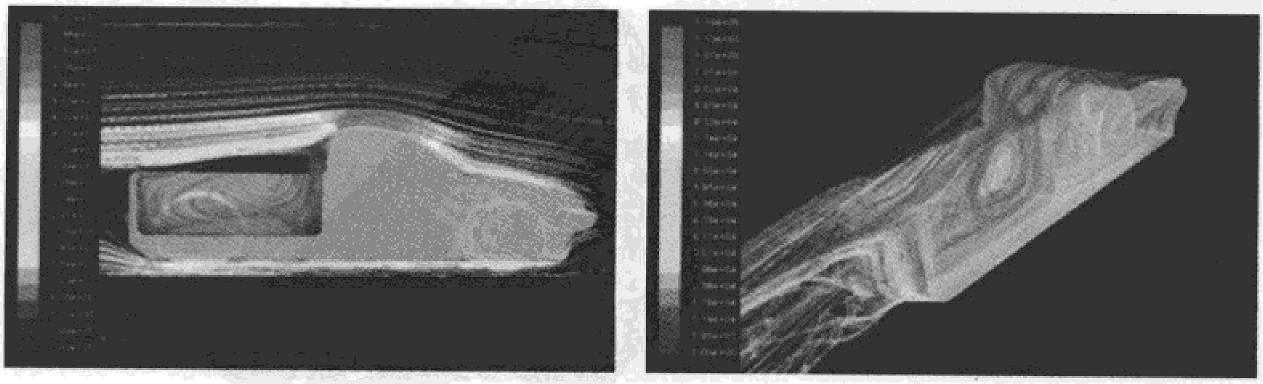


图 7.46 皮卡开放后箱内的循环区域

7.4.4 人鼻腔内的空气/颗粒流动

对各种疾病，除了口服和注射给药以外，还可以通过鼻腔给药．鼻腔给药的优点已经得到了很好的证实，其中之一是适用于治疗鼻腔充血和过敏等呼吸道疾病．这种方法需要考虑的问题之一是药物颗粒在鼻腔内的沉积情况，保证鼻腔喷雾器将药物输送到鼻腔内的特定部位，以大幅度地提高药效．

因为对活体鼻腔以及鼻腔模型内的用药研究既费时又费钱，因此对其深入研究受到很大限制．然而，现在借助快速计算机可以对相同位置鼻腔喷雾的重复性和准确性等进行大量的数值分析，并可能拓宽研究的范围，已经对药物研究带来了一场革命．Keyhani 等(1995)、Yu 等(1998)以及 Horschler 等(2003)证实了应用先进的 CFD 技术带来的巨大效益．用颗粒和空气流动的轨迹、任一位置的速度云图以及速度矢量图等图形描述颗粒的局部沉积，这样就可以获得对特定鼻腔喷雾器颗粒传输效力的详细评价．

可以通过如下参数研究喷雾颗粒的沉积情况：

(1) 气相流动场，如速度场及湍流效应；

(2) 包括颗粒与气流之间相互作用导致的沉积机理；

(3) 颗粒的材料特性和初始喷雾条件，如颗粒密度、尺寸和喷射角度．

应用流体流动场的知识可以预测颗粒流动和沉积情况．在进行 CFD 计算之前，需要对复杂的鼻腔几何结构进行适当的处理．Tu 等(2004a)和 Inthavong 等(2006)对此已经进行了研究，关于几何形状的一些实际问题将在下面进行讨论．

问题描述：图 7.47 为人鼻腔结构示意图．对复杂的鼻腔几何形状建模是非常困难的．采用从鼻腔入口到接近喉部之间不同位置的三维 CT 扫描照片．获得鼻腔通道上每隔 1～5mm 的照片数据，包括 xyz 轴方向鼻腔通道的周界完成几何建模．

通过商业 CFD 软件 ANSYS-FLUENT 6.1.22 的前处理工具——固体建模工具 GAMBIT，在整个鼻腔几何形状内生成计算实体模型如图 7.48 所示．读者应注意，在如此复杂的几何表面上恰当地分布网格是非常费事的事情．因此，本例的网格生成步骤在整个 CFD 模拟过程中是最麻烦的部分．在表面交界处需要更密的网格，以便更好地求解通道内大的速度梯度．

初始模型生成的网格单元数为 82000 个．在这一粗糙网格的基础上，通过进一步计算分析来改进网格的质量，如网格偏斜问题，确定相邻鼻腔壁面以及单元与单元之间的体积变化．然后生成三种网格，网格单元数分别为 286000，586000 和 822000 来检验网格独立性．读者应该清楚，计算结果的精度随计算网格的细化而提高，但同时也增大了计算量．进行网格独立性检验就可以确定最佳的网格尺寸．当气流量为 20L/min 时，对气相的 Navier-Stokes 方程进行求解．图 7.49 显示了不同网格密度下求得的速度分布．从图中可见，网格单元数822000与 586000 的计算精度相比没有进一步的改进．因此，本例中选择 586000 个单元的鼻腔模型，以下的计算结果都是在该模型下获得的．

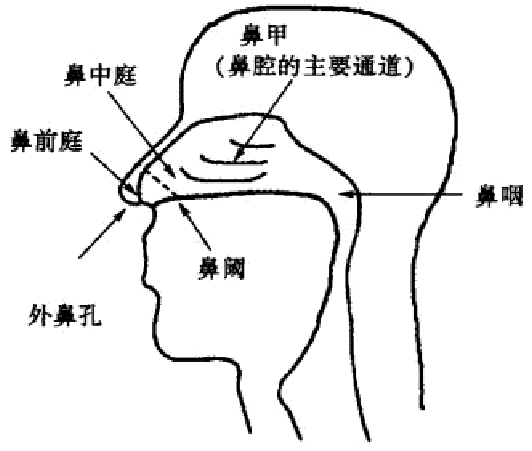


图 7.47 人鼻腔结构示意图

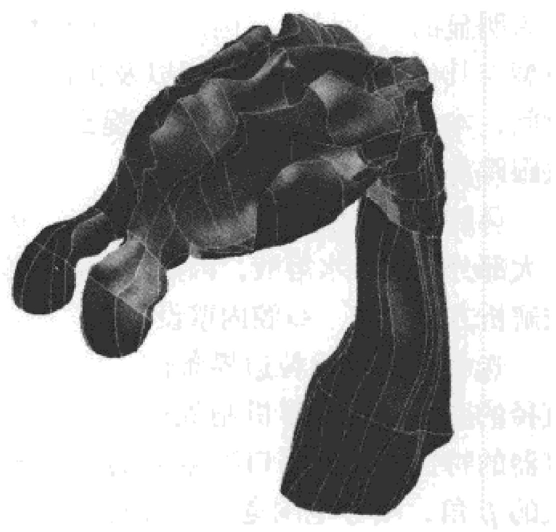


图 7.48 通过CT扫描得到的人鼻腔内表面结构

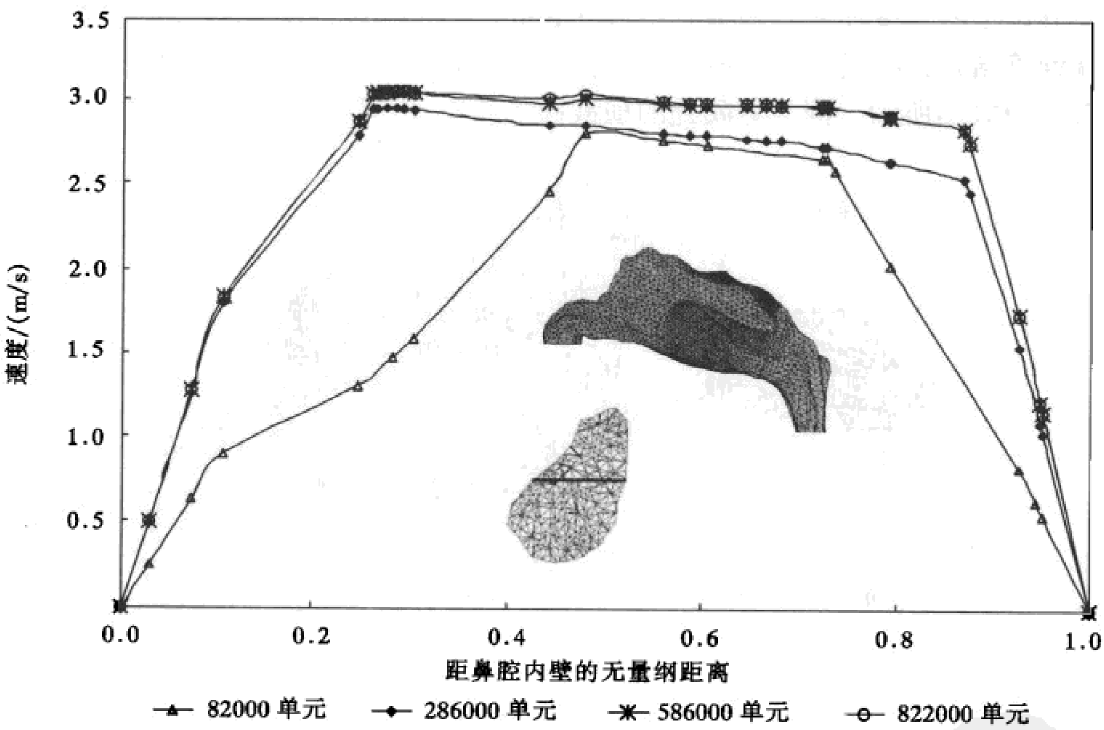


图 7.49 四种不同网格模型得到的鼻翼附近冠状截面上的速度分布

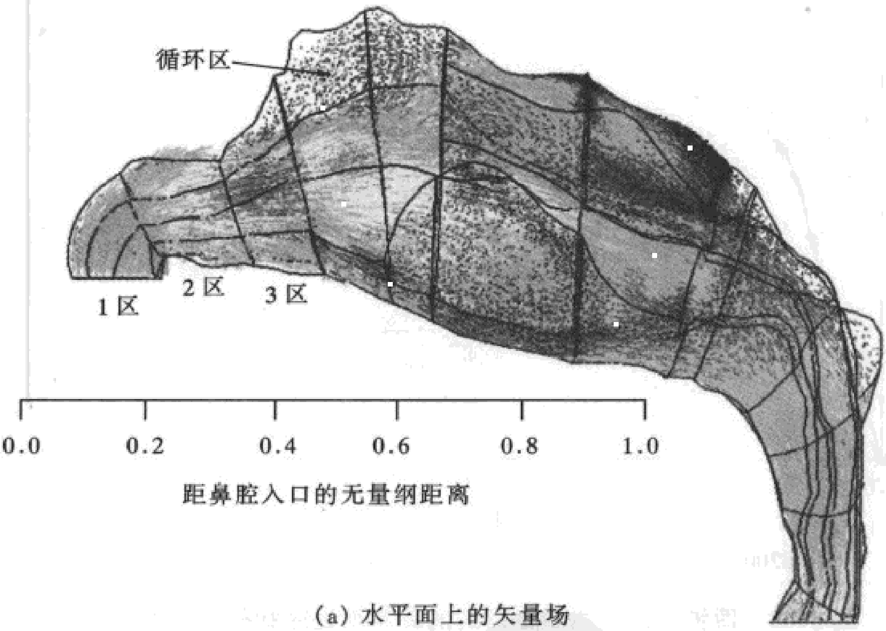
CFD模拟：通过求解所有的 Navier-Stokes 方程获得稳态条件下连续气相流动流场的解．Navier-Stokes 方程用有限体积法进行离散．用 QUICK 格式近似动量方程，通过 SIMPLE 方法实现压力与速度的耦合．根据 Tu 等(2004)的研究，鼻腔内的流动速度可能高达 22m/s．这说明其中的流动为湍流，这一结论也由 Keyhani 等(1995)和 Yu 等(1998)应用 k-ϵ 湍流模型处理流量为 200～300mL/s 流动时得到证实．两方程方法是基于各向同性湍流及速度矢量三个分量具有单一涡黏假设的最常用的湍流模型．对于高旋流流动，湍

流为明显的各向异性，因此将产生计算误差．因为鼻腔内的流动为低涡旋流动，因此 k-ε 模型与其他方法如大涡模拟以及雷诺应力模型相比，既可以满足计算精度，又能节省计算时间．本例采用 Shih 等(1995)提出的 Realizable k-ε 模型．用 Lagrangian DRW 颗粒跟踪方法跟踪鼻腔内粒子的迁移．

鼻腔内的气流量在 20～40L/min．鼻腔内壁采用无滑移增强壁面处理函数进行建模．由于大部分药物为水溶液，因此颗粒被假设为球形水滴．由于缺少实验数据，颗粒的初始条件按解析方法确定．鼻腔内壁设置为“阱”条件，即颗粒接触壁面之后就会沉积到壁面上．

选择适当的颗粒边界条件，模拟大量的真实流动情况．一般来说，颗粒的速度受喷嘴直径的变化以及喷雾机制等很多因素的控制．喷雾锥角 β 与喷雾器的类型有关，反映喷雾器的特性．典型平口喷雾器的 β 角较小，在较窄范围内喷雾．而压力旋涡喷雾器具有大的 β 角，喷雾范围宽．通过对喷雾器喷嘴喷出颗粒传播情况的模拟，观察喷雾角变化时颗粒传播的差别．喷入单一分散性颗粒，记录颗粒在左右鼻腔内的沉积情况．颗粒从固定位置以 10m/s 的速度喷入，喷嘴直径为 0.8mm，喷雾角在 20°～80°之间变化．

CFD 计算结果： 在通过两个鼻孔的总流量为 20L/min 时，空气在鼻腔内的流动特性如图 7.50(a)和(b)所示．因为鼻阈处的横截面积最小，所以气流在该处速度加快，速度从



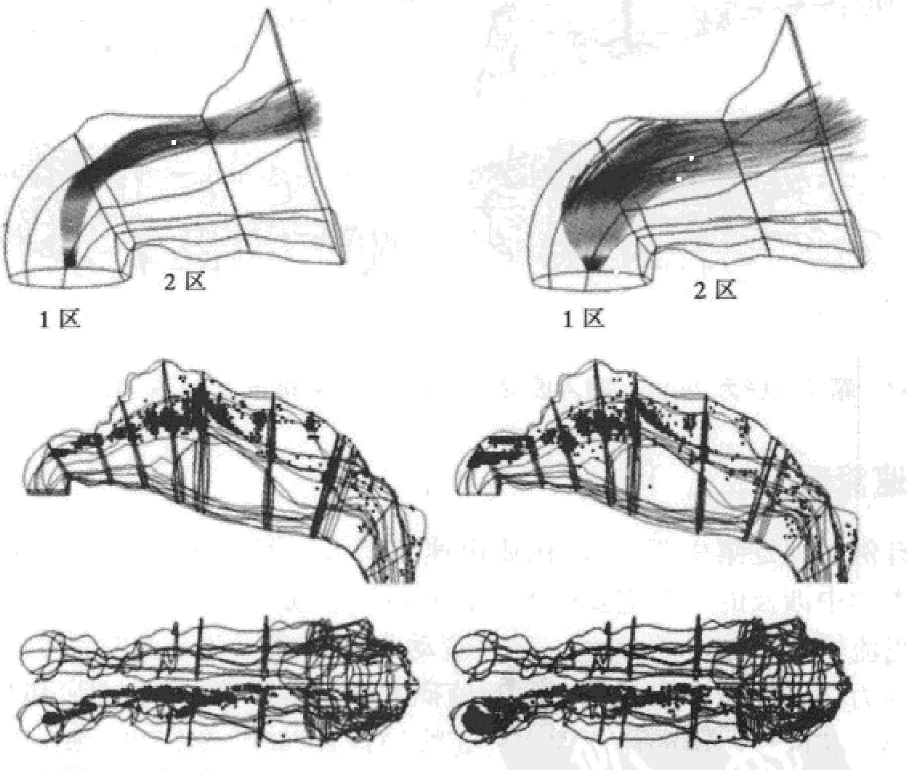
(a) 水平面上的矢量场

(b) 不同截面上的速度云图

图 7.50 人类鼻腔内流动的速度分布

入口的 $u_{in}=2.1m/s$ 达到最大平均速度 2.28m/s．随后，由于鼻腔的扩张，速度随之降低．从图中可见，大部分气流保持在鼻腔中间和较低的区域内，接近鼻腔隔膜壁，向外分离的气流较少．在接近鼻腔上部的扩大区域内存在一循环区域．在鼻咽处，由于流动面积较小，流动速度增大．Zwartz 和 Guilmette(2001)以及 Horchler 等(2003)已经对单相空气流动的复杂流动形态进行了大量的卓有成效的数值模拟研究．读者可以查阅这些重要文献来提高对该问题的理解．

为研究不同喷雾锥角 β 对颗粒分布的影响，考虑到小的颗粒更容易跟随气相速度流动的特点，用窄的喷雾锥角 β 释放颗粒比宽的喷雾锥角 β 要好，这是因为后者会引起颗粒在更宽范围内扩散．颗粒传播范围的加宽降低了顺流传播颗粒(与流动方向一致)与离开气体流动曲率方向颗粒(与流动方向相反)的比率．当颗粒尺寸增大时，这种效果更为明显．图 7.51 显示了喷雾角 $\beta=20°$，$\beta=80°$，颗粒直径为 15μm 时的流动．喷雾角 $\beta=80°$时，流动更加偏离鼻腔中心．当 $\beta=20°$时，28％的颗粒沉积在鼻腔顶部及接近隔膜壁的前两个区域内．当 $\beta=80°$时，颗粒在前两个区域内的沉积率增加到 47％．注意图 7.51 以及图 7.52 中颗粒流动轨迹的颜色图谱与速度的大小相对应．



(a) 15μm, $\beta=20°$, $u=10m/s$　　(b) 15μm, $\beta=80°$, $u=10m/s$

图 7.51　颗粒直径为 15μm，喷入速度为 10m/s，喷雾锥角为 20°和 80°时，颗粒的沉积

图 7.52 比较了直径为 20μm 的颗粒在 $\beta=20°$和 $\beta=80°$时的沉积模式．大量研究表明，20μm 尺度的颗粒 100％沉积在前两个区域内．增加喷雾角 β，可将颗粒喷射到已经弯曲

的流线中，使得更多的颗粒沿鼻腔传播到更远的下游．当 $\beta=20°$时，沉积集中发生在颗粒喷雾点正上方前庭顶部的区域内．当 $\beta=80°$时，可以观察到颗粒沉积在前区中更广的区域内，向鼻阈喷射的颗粒能够传播到 90°弯曲之外．由于颗粒的惯性较大，颗粒最终沉积在鼻腔的中部．

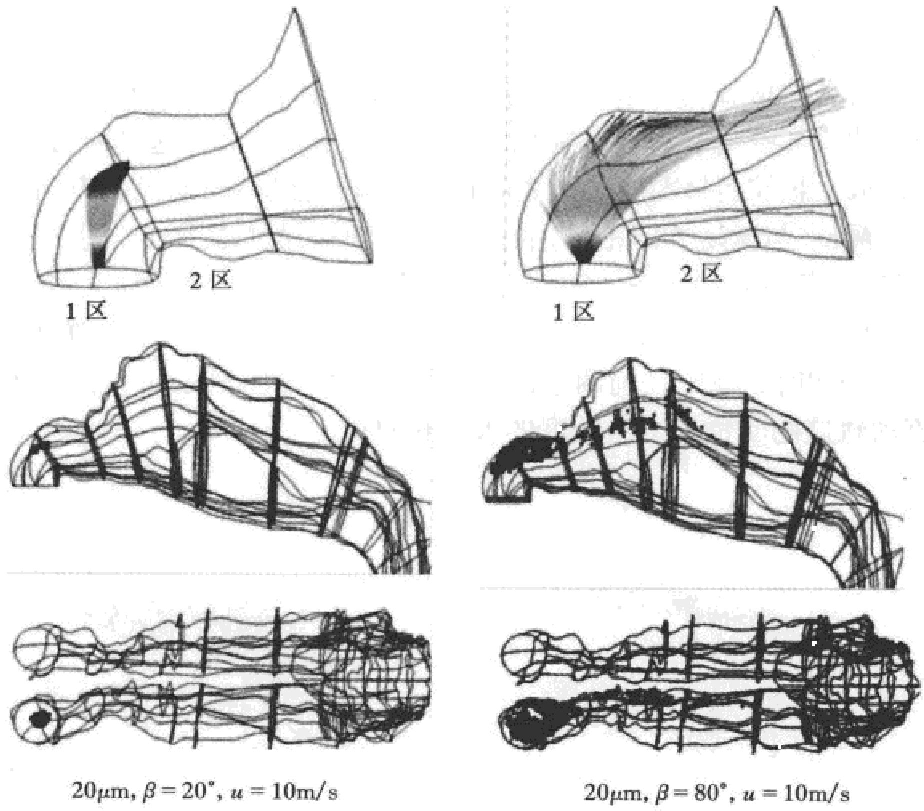


图 7.52 颗粒直径为 20μm，喷入速度为 10m/s，喷雾锥角为 20°和 80°时，颗粒的沉积

7.4.5 高速流动

上面所有例子都是集中于 CFD 在亚声速流动——流动速度低于声速流动中的应用．声速是流体力学中涉及的一个重要内容．在亚声速流动中，弱压力波可以向上游和下游传播．然而，当流体速度超过声速时，流体流动为超声速流动，此时弱压力波不能逆流传播．在空气动力学和宇航领域中的很多数值研究中，大多数 CFD 方法和技术都应用于超声速流动．流体速度与声速的比值称为马赫数(Ma)．如果 $Ma>1$，则流动为超声速；若 $Ma<1$，流动则为亚声速．

与前面亚声速流动实例相对应，本节中给出了两个超声速例子：一个是简单的平板上超声速流动，另一个是复杂的 NACA0012 机翼上的超声速流动．对高速流动求解的特点，将在下面描述．

7.4.5.1 平板上的超声速流动

平板上的超声速流动是一种典型的边界层流体动力学问题. 尽管其几何形状简单，但是目前尚无精确的解析解. 如图 7.53 所示，考查超声速气流平行流过长为 L 薄板的情形. 当自由来流接近平板时，边界层在平板前缘处形成. 边界层存在于流动流体接近平板表面的区域内. 当自由来流离开平板前缘时，由于存在黏性边界层，自由来流在薄板上"消失"，取而代之的是一条假想的曲线. 雷诺数与离平板前缘距离相关，由于其最初值较小，因此接近板面的流体流动为层流. 当流动距平板前缘的距离增加时，雷诺数逐渐增大，当增大到一定值时，流动变为湍流流动. 实际上，流态的这种转捩不是在某一点上，而是存在一个如图 7.53 所示的过渡区域. 如图 7.53 所示，黏性流和非黏性流中产生了冲击层(shock layer)，在平板前缘形成了一个引发激波(shock wave)的曲线. 此外，黏性耗散(动能在黏性流中的损失)能造成流场温度的升高，因此，在该边界层中热传递率很高.

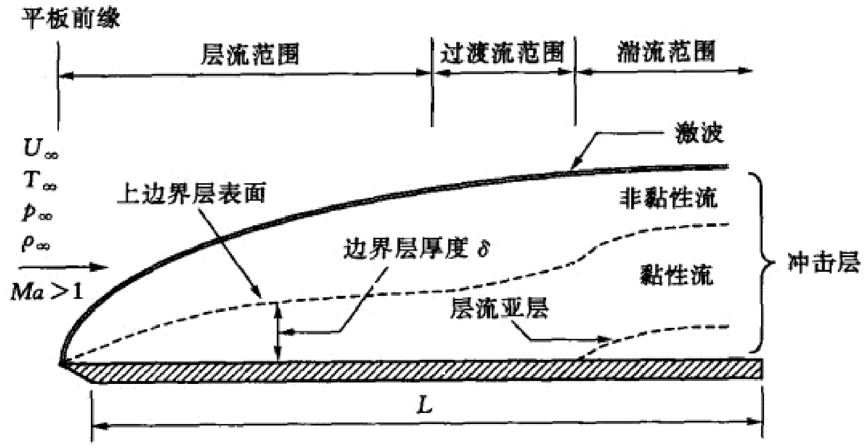


图 7.53 超声速气流平行流过平板以及沿平板充分发展的边界层示意图

问题描述：在这一特定例子中，通过求解复杂的 Navier-Stokes 方程组，读者将了解流动的物理特性. 流经平板的流动是最简单的流动，但其中包含了有趣的流动现象. 本例的计算包括两个部分.

我们将首先从求解简单的二维层流流动开始. 当然，这意味着板的长度应该非常短，这样雷诺数较小. 更为重要的是，本例的主要目的是要证明商用计算软件能够充分捕获期待的流动物理特性，进而证明其实用性. 图 7.54 描述了当 $Ma=3$ 时，流经平板流动数值计算的计算域. 平板的长度选为 $L=2.85\times10^{-5}$m，参照气体标准状态下的特性参数，对应的雷诺数值大约为 2000. 计算域内划分单一结构化矩形网格单元 80 个×80 个. x 方向的计算步长(Δx)为 3.5625×10^{-7}m(0.000285/80). 在 y 方向上，为了获得对流体流动的正确描述，计算步长必须限定在激波范围之内. 根据 Blasius 对平板尾缘计算的预测，可以假设计算域至少为边界层厚度 δ 的 6 倍，而边界层厚度可由下式给出：

$$\delta=\frac{5L}{\sqrt{Re_L}}=3.186\times10^{-6}\text{m}. \tag{7.17}$$

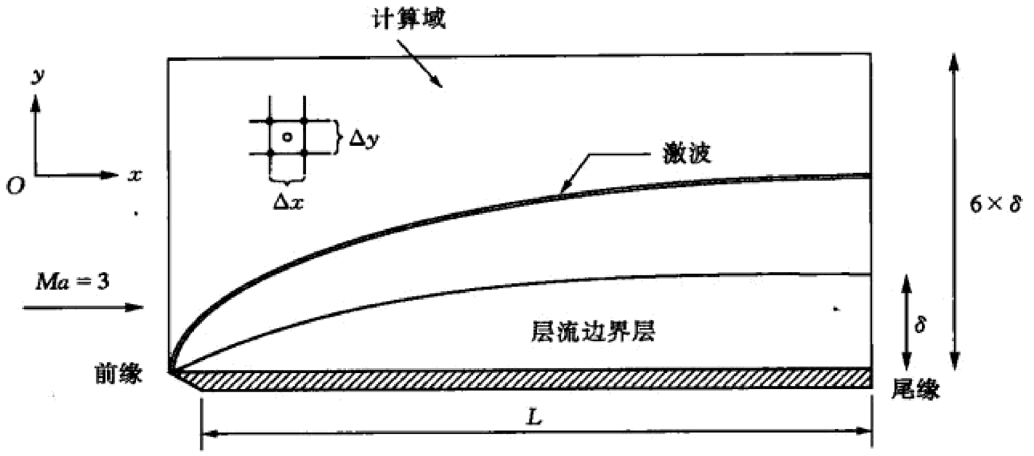


图 7.54 二维计算区域图

因此，y 方向上的步长(Δy)为 2.3898×10^{-7}m($6\times3.186\times10^{-6}/80$)．由于在垂直板面方向上存在大的速度梯度，因此，$y$ 方向对速度的变化比 x 方向更为敏感．为了更好地捕获流场，特别是靠近壁面的流场，y 方向的步长比 x 方向的步长要小．

其次，随着当前计算速度加快以及并行计算机的出现，有可能采用直接数值模拟技术(见第 6 章)预测流体流过简单几何形状时由层流到湍流的转捩过程．图 7.55 为求解三维完全 Navier-Stokes 方程组(complete Navier-Stokes equations)对 $Ma=4.5$ 时超声速边界层的层流-湍流过渡全面描述而采用的计算域．因为局部边界层长度为 $l_s=3.0486\times10^{-4}$m，因此计算域的无量纲长度分别为

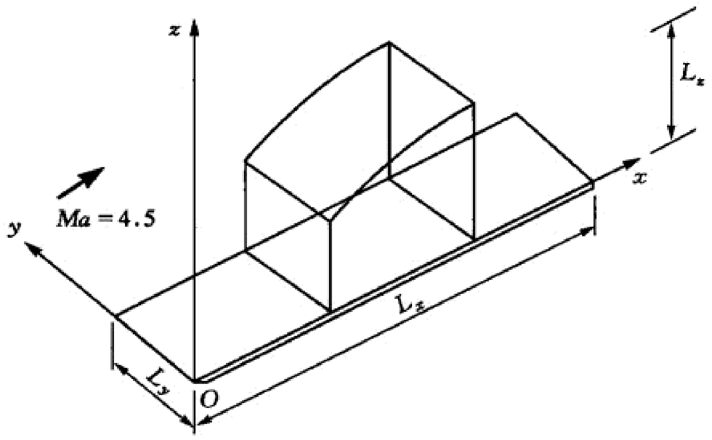


图 7.55 三维计算域示意图

$$\frac{L_x}{l_s}=3259,\quad \frac{L_y}{l_s}=65.6,\quad \frac{L_z}{l_s}=438\sim587.$$

为了更好地管理计算资源，采用包括重叠计算子域(overlapping subdomains)(具体细节见表 7.5)在内的多步直接数值模拟方法对非线性、非稳态流线变化局部进行求解．在最后一列高雷诺数时，为求解波的传播特性，需要增加网格节点数目，在最后的计算子域内包含总数约为 6500 万个节点，可以认为其解能够完全捕获充分发展的湍流流动．对这一特定几何形状上的流动进行的模拟计算及更多细节参见 Jiang 等(2006)．

表 7.5 每一计算域中的参数

计算子域编号	Re	$N_x \times N_y \times N_z$	节点/波长
1	400～1800	864×16×132	60
2	1600～2146	864×32×132	90
	1400～2099	1024×32×160	96
3(过渡区)	1968～2540	1080×48×160	96
	1968～2649	1590×102×160	112
	1968～2649	1590×256×160	112

注：雷诺数的范围是根据局部边界层长度 l_s 确定的，N_x，N_y，N_z 表示 x，y，z 方向上网格节点总数.

CFD 模拟计算：采用完全 Navier-Stokes 方程的好处不仅扩展了研究的流动条件和几何形状范围，并且可以准确确定流动过程中激波的位置以及冲击层的物理特性．下面我们描述三维 Navier-Stokes 方程的形式(方程的二维形式只是三维控制方程在某一坐标方向上对组成变量的简化)．忽略体积力和内热源，三维 Navier-Stokes 方程如下.

连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0. \tag{7.18}$$

x-动量方程：

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v u)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w u)}{\partial z}=\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}. \tag{7.19}$$

y-动量方程：

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w v)}{\partial z}=\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}. \tag{7.20}$$

z-动量方程：

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u w)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v w)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w w)}{\partial z}=\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \tag{7.21}$$

能量方程：

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u E)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v E)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w E)}{\partial z}=\frac{\partial(u\sigma_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx}+v\sigma_{yy}+w\tau_{yz})}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial(u\tau_{zx}+v\tau_{zy}+w\sigma_{zz})}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right). \tag{7.22}$$

假设为牛顿流体，正应力 σ_{xx}，σ_{yy}，σ_{zz}为压力 p 与法向黏性应力分量 τ_{xx}，τ_{yy}，τ_{zz}的乘积，其余元素为切向黏性应力，且

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\qquad \tau_{xz}=\tau_{zx},\qquad \tau_{yz}=\tau_{zy}.$$

正应力和剪应力的表达式见附录 A．对于超声速流动的能量守恒，不再求解应用于亚声速流动问题中通常的热能 H，取而代之的是求解比能量(specific energy)E．三维中的比能量 E(见附录 A 中的方程(A.26))由下式表示：

$$E = \underbrace{e}_{\text{内能}} + \underbrace{\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)}_{\text{动能}}. \tag{7.23}$$

从上式中可见，由于在 $Ma>1$ 的流动中速度很大，因此在能量守恒方程中动能项起主要作用.

方程(7.18)至方程(7.23)是描述可压缩流动的控制方程. 但是，要求解上述控制方程还需要增加方程使方程组封闭. 首先采用理想气体状态方程，即

$$p = \rho RT$$

式中，R 为气体常数.

其次，假设空气为发热的理想气体(calorically perfect gas)，其内能为

$$e = c_V T$$

式中，c_V 为比定容热容.

第三，如果假设普朗特数为常数，对于空气其值约为 0.71，导热系数可由下式求得：

$$k = \frac{\mu c_p}{Pr}$$

黏度 μ 一般可采用 Sutherland 定律计算，其表达式为

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1.5} \frac{T_0 + 120}{T + 120}. \tag{7.24}$$

式中，μ_0 和 T_0 分别为标准状态值.

图 7.56 显示了二维高速层流的边界条件. 在计算域的左侧和上部，对于速度、压力和温度采用 Dirichlet 边界条件，其值为对应的自由来流值. 在计算域的右侧，由于超声速流动的出口条件不受下游条件的影响，因而不同于亚声速流动常用的 Neumann 边界条件，所有流动特性都是在法向梯度为 0 的约束下根据上游计算得来的. 平板表面对所有速度分量均采用无滑移边界条件($u = v = 0$). CFD 的最大优点是可以进行数值实验来了解改变某一流动参数对流动的影响. 通过数值实验，对等温壁面和绝热壁面条件对流动的影响作出评估. 在等温壁面边界条件中，假设温度等于自由来流温度.

直接数值模拟方法中，要在流入边界上采用合适的流动条件. 为了反映流过该边界的实际流动特性，引入不同单对第一模态斜波扰动 (oblique first-mode disturbances)来研究进入计算域的不同流入条件对内部流动的影响程度. 对于流出边界，所有特性都是从二维情况下外推得到的. 对于包围流动沿 y 方向伸展的侧面边界(见图 7.55)，采用同前面所举紧凑式换热器例子中一样的周期性边界条件. 在上边界处，采用自由滑移边界条件，而无滑移条件和绝热条件则应用在平板表面.

CFD 计算结果： 自由来流条件以及模拟层流边界层的热力学常数等相关数据见表 7.6. 采用商业软件 ANSYS-CFX 10 对问题求解，获得所有层流流动条件下的数值结果.

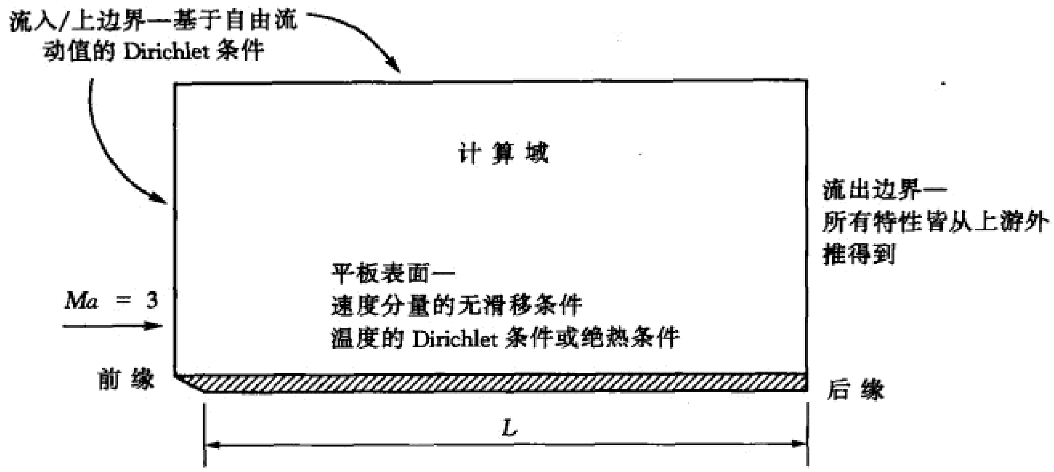


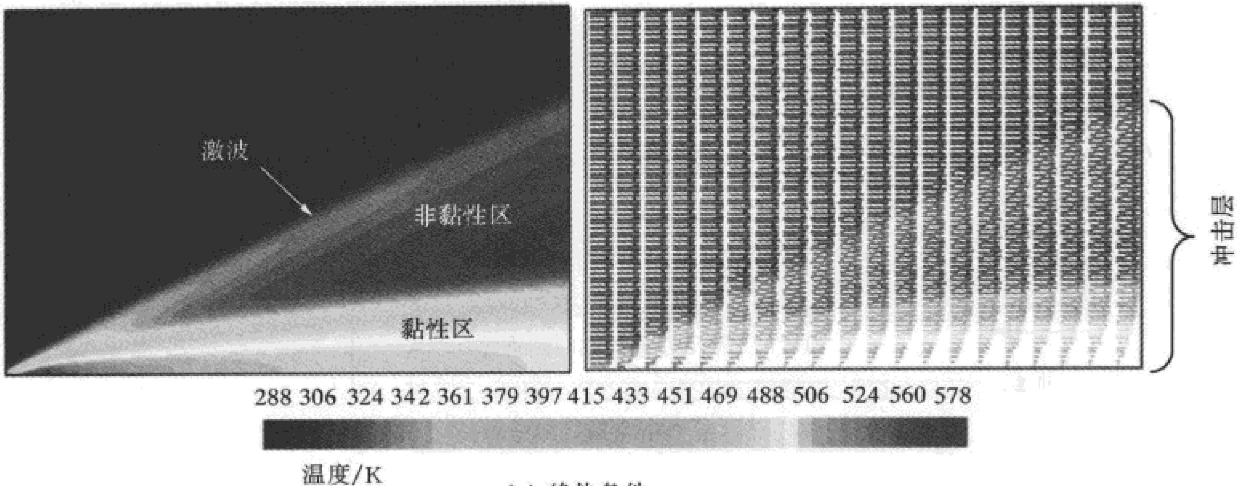
图 7.56 应用在二维层流超声速流动的边界条件

表 7.6 层流流动使用的数据

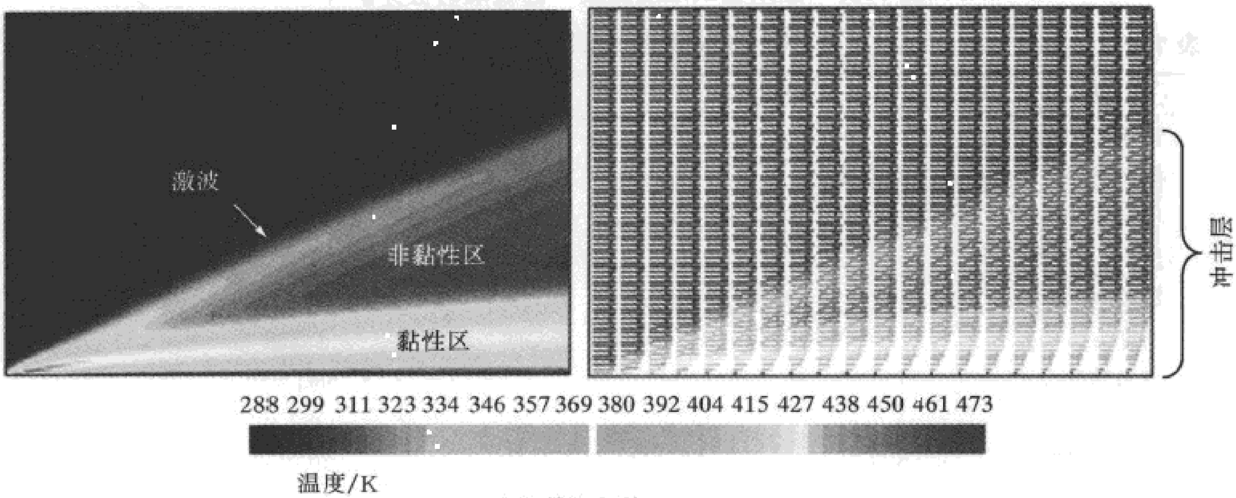
参量	大小
板长 L/m	0.0000285
海平面处自由流动空气特性参数	
声速 U_∞/(m/s)	340.28
压力 p_∞/(N/m^2)	101325.0
温度 T_∞/K	288.16
密度 ρ_∞/(kg/m^3)	1.225
动力黏度 μ/(kg/(m·s))	1.7894×10^{-5}
气体常数 R/(J/(kg·K))	287.0
比定压热容 c_p/(J/(kg·K))	1005.4
普朗特数	0.71
比热容比 γ/(c_p/c_V)	1.4

图 7.57 显示了超声速气流流过平板的稳态温度云图和速度矢量图. 应用 CFD 方法, 在绝热壁面和等温壁面两种情况下, 清晰地区分了冲击层中黏性流动和非黏性流动区域, 并且得到了从冲击层和静区(silent zone)(上游自由来流)脱离的弯曲激波分布. 从图中可见, 绝热壁面增加了固定壁面上方的边界层温度. 其原因在于相对低的密度导致了边界层增厚, 因而冲击层增厚.

为进一步证实前面的观察, 图 7.58 和图 7.59 中描述了板后缘处的无量纲温度以及速度分量 u 的分布. 在分布图中, 采用了 Van Driest(1952)提出的无量纲距离 y, 即 $\bar{y} = y\sqrt{Re}/x$. 无量纲温度(T/T_∞)分布充分地捕捉到了板前缘激波以及接近板表面的边界层行为. 对于绝热条件, 因为板面上的温度梯度为 0, 因此在热层中的温度会比等温情况下要高. 从本质上来讲, 低的壁面温度抑制了边界层流动. 同样, 图 7.59 中所示的接近壁面处的无量纲速度(U/U_∞)分布也显示出绝热情况下具有厚的边界层. 板尾缘处的 Mach 数如图 7.60 所示, 图中表明, 板表面为绝热条件时, 流经平板前缘的激波更强.



(a) 绝热条件



(b) 等温条件

图 7.57 *Ma* = 3 时，冲击层内黏性区和非黏性区的温度云图和速度矢量图

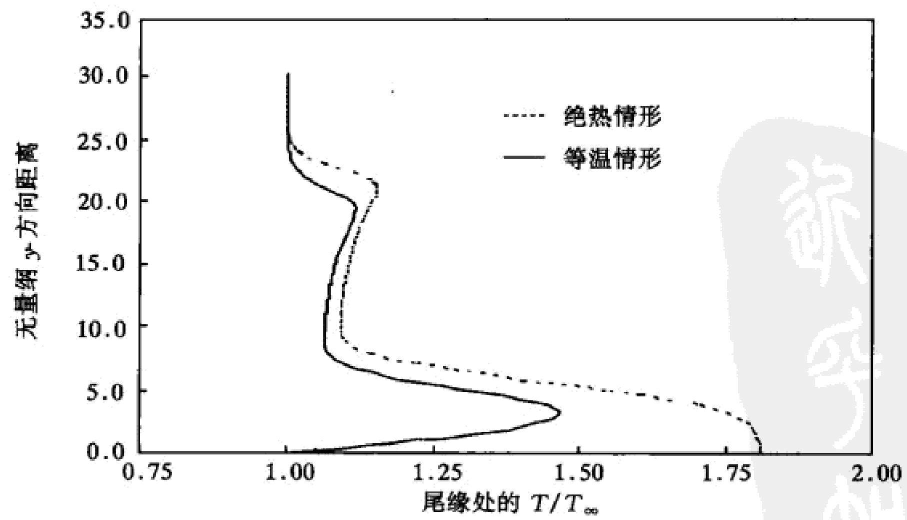


图 7.58 *Ma* = 3 时，绝热和等温条件下，尾缘处的无量纲温度分布曲线

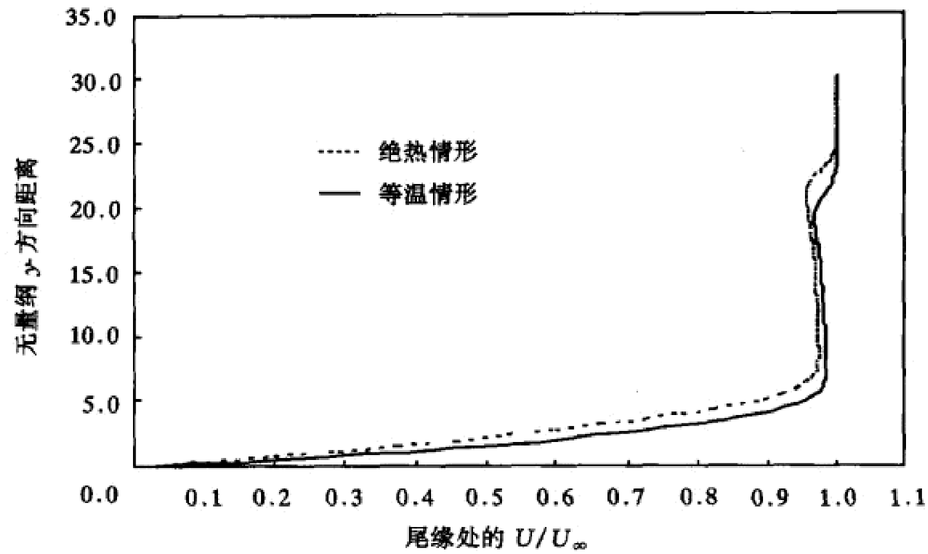


图 7.59　*Ma* = 3 时，绝热和等温条件下，尾缘处的无量纲速度分量 *u* 分布曲线

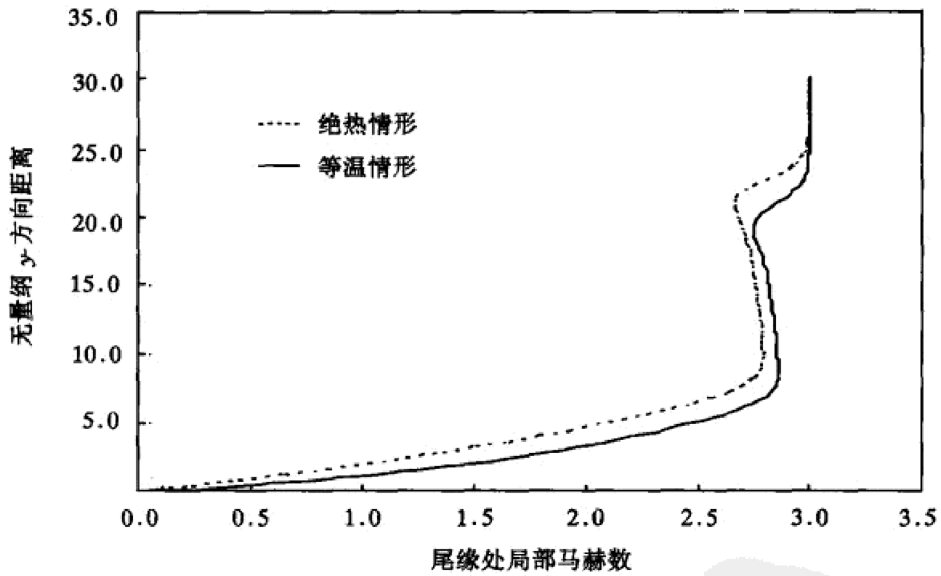
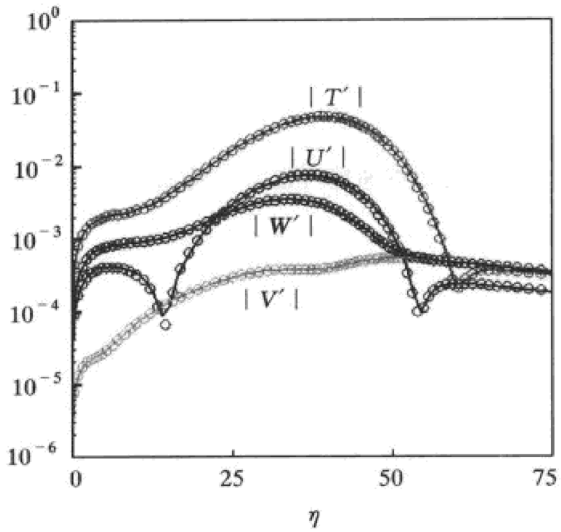


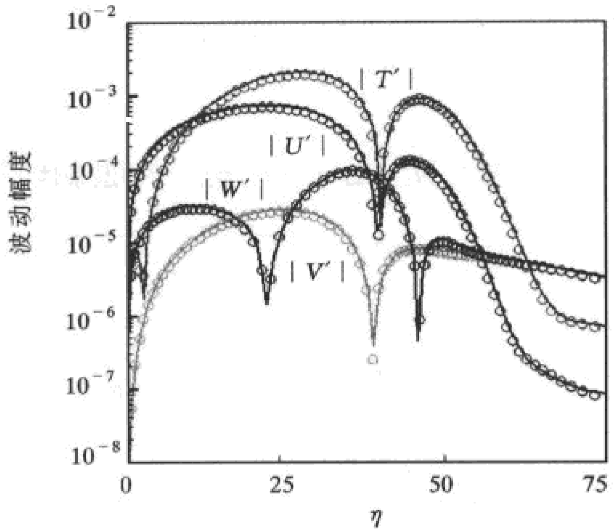
图 7.60　*Ma* = 3 时，绝热和等温条件下，尾缘处当地马赫数分布曲线

当前，不断增强的计算能力提供了极大的可能来重新探讨大量经典的 CFD 问题，比如本例中采用 DNS 技术研究流行的边界层问题．上述描述的层流研究还可以进一步拓展到非稳态流动以及更好地了解从层流到湍流的过渡．对于这一流动问题，采用 Arlington Texas 大学开发的 DNS 计算程序，预测非线性非稳态流动以及在 Mach 数为 4.5 的平板边界层流动中，激波发生之后向湍流的转化．为证实 DNS 的预测结果，Jiang 等(2006)将其与 NASA Langley 的抛物化稳定性方程(Parabolic Stability Equation，PSE)的计算结果进行了仔细的比较．在本节的剩余部分，将对层流-湍流转捩研究的一些精选结果加以讨论．

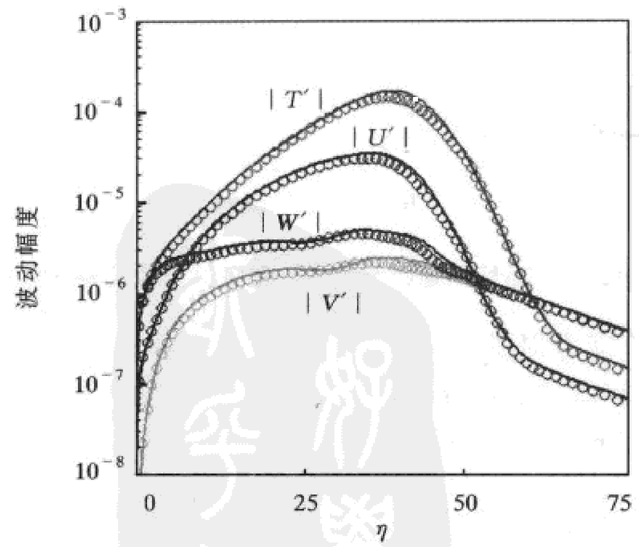
DNS 中一个困难的问题是对流入边界条件进行合适的描述．因为 DNS 是一种完全确定的方法，要对时间和空间范围内的流动进行计算，而规定适当的流入条件至关重要．不同扰动模式下，流动转捩之前波传播特性的 DNS 和 PSE 预测结果见图 7.61 和图 7.62．不同扰动模式下，DNS 对以局部尺度壁面法向坐标为函数的速度分量变化及温度波动的预测结果如图 7.61 所示，预测结果与 PSE 计算结果具有极好的一致性．以局部雷诺数 *Re* 为函数的不同扰动模式下的最高温度波动幅度如图 7.62 所示，DNS 预测结果与 PSE 计算结果也具有极好的一致性．通过每一扰动模式对计算结果产生影响的分析表明，DNS 对线性和湍流生成的初始非线性阶段的求解得到了成功的验证，这充分说明了初始边界条件对层流-湍流过渡流动的独立影响．



(a) 模式(1,1)　波动幅度



(b) 模式(0,2)　波动幅度



(c) 模式(1,3)

图 7.61　*Re* = 1500 时，以 η(局部尺度壁面方向坐标)为函数的三种扰动模式下的温度和速度分布

值得注意的是，PSE 无法预测非线性相互作用之后向湍流转捩的起始点．由于在求解非稳态完全 Navier-Stokes 方程时未作任何特别假设，因而，该方法可以跨越流体动力学多个流动范围进行求解，可以从层流到过渡流的初期和后期甚至可以捕获充分发展的湍流流动中的杂乱无章的流动状态．为了观察发生在平板上的复杂流动结构，图 7.63 和图 7.64 显示了密度波动以及壁面法向旋涡沿流动方向上的云图．从两图中可见，当 $x<4600$ 时，流动为层流；大约从 $x=4800$ 开始，流动不稳定，波动加剧，进入过渡流态；在 $x=5400$ 之后，开始逐渐转变为湍流，并且湍流不断加强，随后在流体中产生剧烈的密度波动；在 $x=6800$ 时，出现了大量壁面法向旋涡．

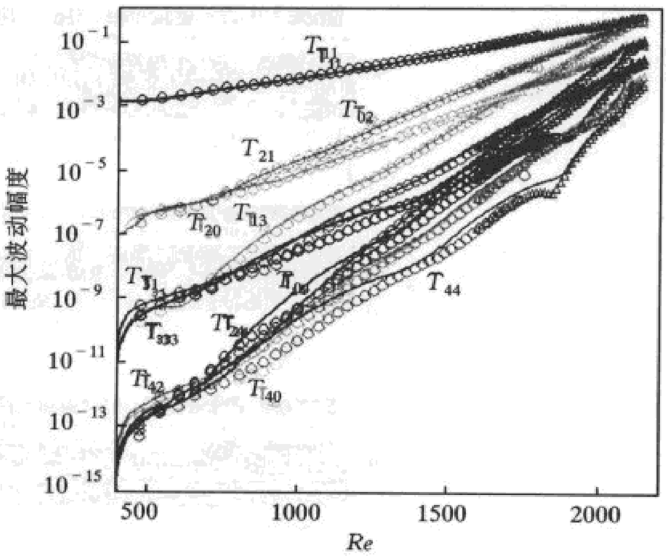


图 7.62　峰值振幅与 *Re* 关系曲线与 PSE 结果的比较

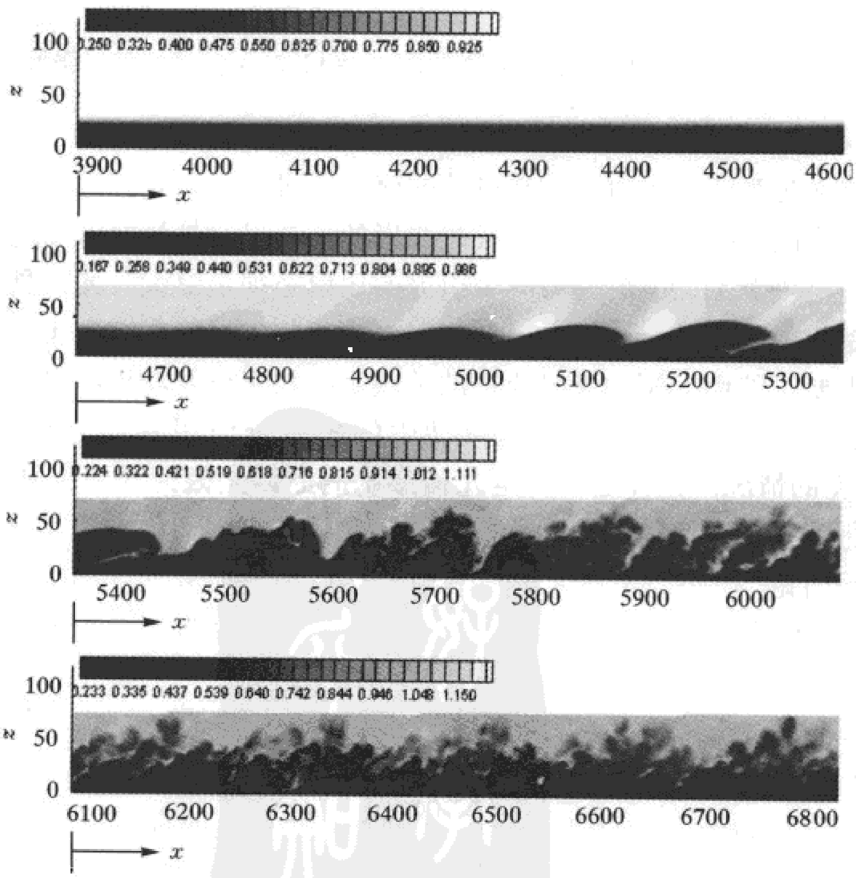


图 7.63　*x-z* 平面中部沿流动方向上的密度波动云图

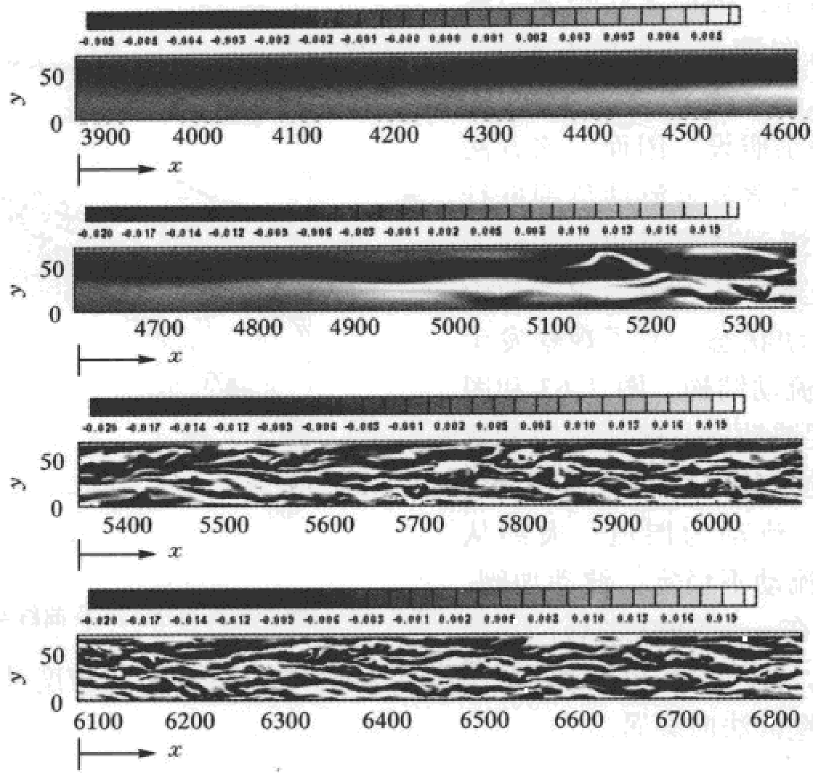


图 7.64 *x-y* 平面上垂直无量纲距离 $z^+ = 12.21$ 处壁面法向旋涡云图

7.4.5.2 机翼上的亚声速和超声速流动

机翼可以定义为为产生升力而特殊设计的流线形机身. 当其置身于流动流体中时, 也将受到流体牵引力的影响. 机翼被设计成流线形的主要目的是最大限度地减小作用在其上面的牵引力. 飞机机翼剖面上的升力与牵引力的比值必须足够大, 使之具有小的牵引力和大的升力, 这是衡量机翼设计效果的重要指标. 为了使飞机能在空中飞行, 机翼表面上产生的升力至关重要. 然而, 驱动飞机前进的关键是吸收飞机发动机能量的牵引力.

问题描述: 为了说明 CFD 在高速流动中的另一个应用实例, 在此考查流体流过 NACA 0012 翼型的情况. 选择这一特定几何形状的原因是因为在研究和设计实践中, 人们已经对其进行了大量的流体动力学研究. 关于翼型有很多通用术语, 最好先熟悉这些术语以便对其进行讨论.

图 7.65 中显示了翼型几何结构示意图以及机翼剖面上的一些相关术语, 这些术语包括:

- 前缘(Leading edge)——迎流的前端或上游边缘;
- 后缘(Trailing edge)——迎流的后端或下游边缘;
- 弦线(Chord line)——连接前缘和后缘曲率中心之间的直线;
- 弦长(Chord) c——前缘和后缘之间弦线的长度;

- 跨距(Span)b——翼面在垂直于机翼剖面方向上的长度；
- 迎风角(Angle of attack)α——运动方向与弦线之间的夹角.

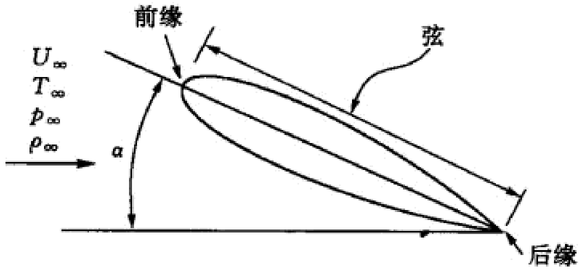


图 7.65 机翼剖面示意图

本节中的 CFD 例子为流经无限长翼面上的亚声速和超声速流动. 对于流经机翼的超声速流动($Ma=2.5$)，用剪应力传递湍流模型(Shear Stress Transport，SST)对雷诺平均(RANS)Navier-Stokes 方程进行求解. 由于 RANS 模拟只关心平均结果，并且长度 b 为无限长，因此，根据上述条件或假设，流动为二维流动. 对于固定弦翼面，可以忽略沿翼面方向上流动模式以及力的变化. 数值计算在二维流动域内进行，研究流体流过翼面不同迎风角时对扩展冲击层的影响，该研究成为本例的第一部分. 当流动低于声速时(本例中 $Ma=0.2$)，当前的计算机硬件允许使用 DNS 技术对不同条件下非稳态流动的起始以及向湍流的转换进行基础性研究. 在此，通过求解完全三维 Navier-Stokes 方程，获得流动方向(x)、翼面展开方向(y)以及垂直方向(z)上复杂流动现象的流动图谱，该研究构成本例的第二部分.

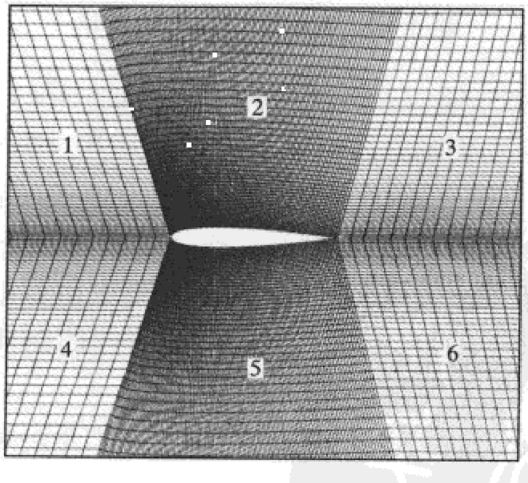
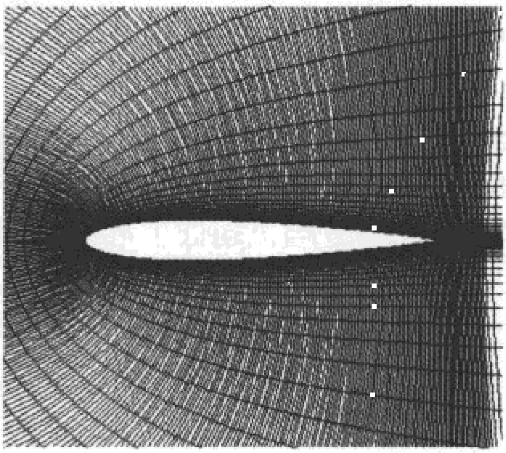


图 7.66 RANS 计算用机翼周围的多块网格

CFD 模拟： 在流体流过翼面的例子中，如何在翼面周围生成合适的网格是一个具有挑战性的问题. 图 7.66 和图 7.67 显示了用于解决该问题的两种不同类型的网格. 如图 7.66 所示的区域结构化网格或多块网格方法(见第 6 章)将整个计算域划分为 6 个相邻的

子区域，特别适合于 RANS 模拟．由于每一区域内可以生成不同的网格，因而具有极好的网格生成弹性，特别是在区域 2 和 5 中增加了网格密度来捕捉前缘和后缘之间弦线处的发展边界层以及沿翼面的扩展冲击层．从实际应用的角度来看，多块网格的诱人之处是可以容易地将网格信息导入任何商业计算软件之中，同时也可以在整个计算域内采用单一网格．三维结构化 C 型网格见图 7.67，可以用于 DNS 计算之中．在二维情况下，共划分 22000 个矩形网格单元，对问题进行数值求解；在三维情况下，共划分 1200（流动方向）×32（机翼延伸方向）×180（垂直方向）个六面体网格单元，对问题进行数值求解．对于后者，计算域内大量的单元体积保证了网格在流动方向、机翼延伸方向以及垂直方向上的无量纲空间尺寸满足：

$$\Delta x^{+}<13,\quad \Delta y^{+}<15,\quad \Delta z^{+}<1.$$



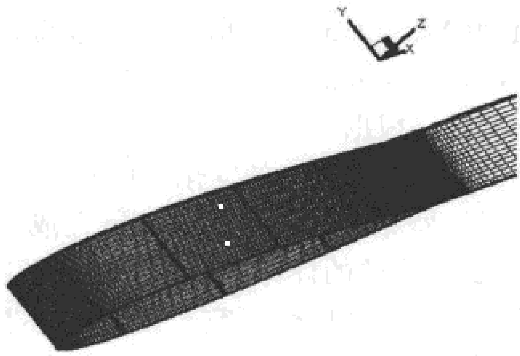


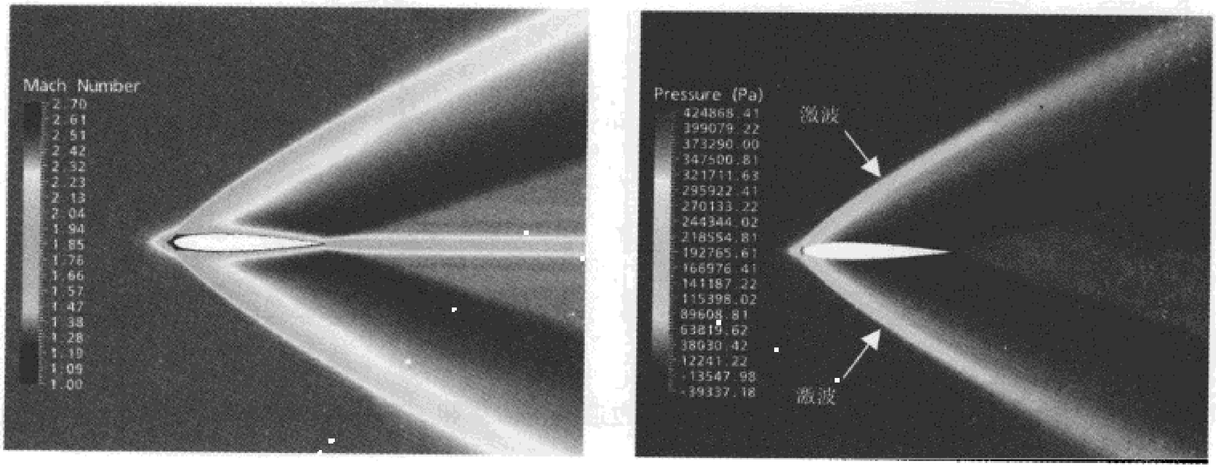
图 7.67 DNS 中采用 C 型网格

在本例中，可用完全可压缩 Navier-Stokes 方程（即方程（7.18）至方程（7.23））描述亚声速和超声速流动．如果三维控制方程中缺少某一方向上的变量分量，那么控制方程就简化为二维形式．前面例子中描述流经薄板边界层流动的边界条件也可以应用到当前的 CFD 例子中．即机翼表面的速度分量采用无滑移边界条件，上部和下部边界采用自由滑移条件，入口边界采用基于来流值的 Drichlet 条件，出口边界采用上游值的外推条件．对于 DNS 方法，在机翼延伸的 y 方向三维流动的侧面采用周期性边界条件．所有数值计算结果均在机翼表面为绝热的假设条件下获得的．

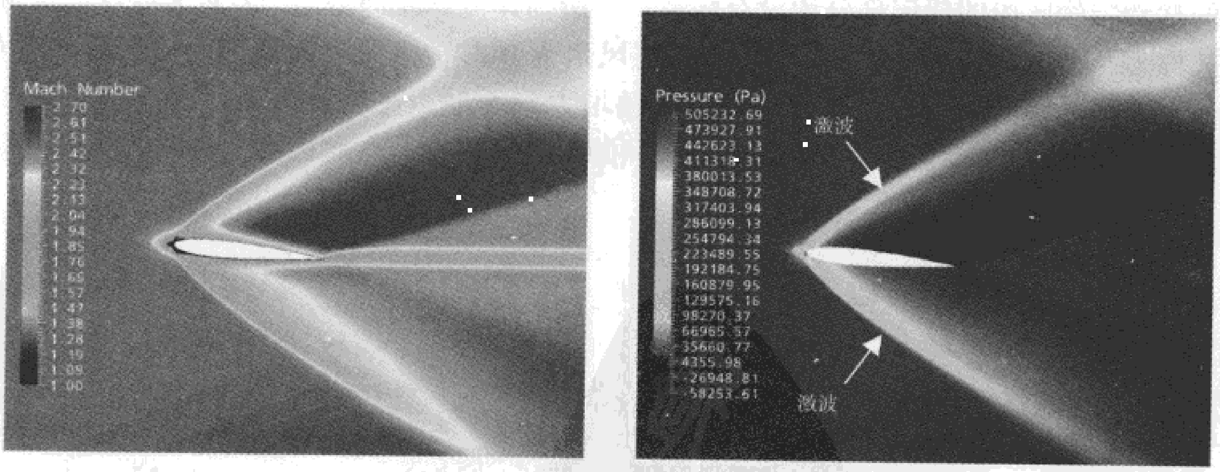
CFD 计算结果：对于 RANS 模拟，应用商业 CFD 计算软件 ANSYS-CFX 10 获得所有超声速流动条件下的数值计算结果．自由来流条件和热力学常数等相关数据与表 7.6 一致．

当来流为 $Ma=2.5$ 的超声速气流流过迎风角为 0°和 5°的机翼时，局部马赫数和压力云图如图 7.68 所示．从图中可见，当流体从翼面前缘向后缘传播时，可以清晰地分辨出机翼上方和下方的激波．因为迎风角为 0°时，流动是对称的，因此，边界层在翼面表面

顶部和底部的发展是相同的．由于翼面顶部和底部之间没有形成压力梯度，因此，旋涡的强度应该相等并且旋转方向相反．而当迎风角为 5°时，从图 7.68 中的局部马赫数云图中可见，流体流过翼面底部表面的速度明显减慢，在相同区域内压力明显高于迎风角为 0°时的情况．此时的压力梯度是有利的．边界层厚度较小，因此其中的旋涡也较小．如果翼面下表面边界层厚度超过翼面上表面边界层，那么压力梯度是不利的，并且其中的旋涡也大．压力差形成了一个向上的合力，即升力，这对流体流动中的翼面至关重要．



迎风角为 0°

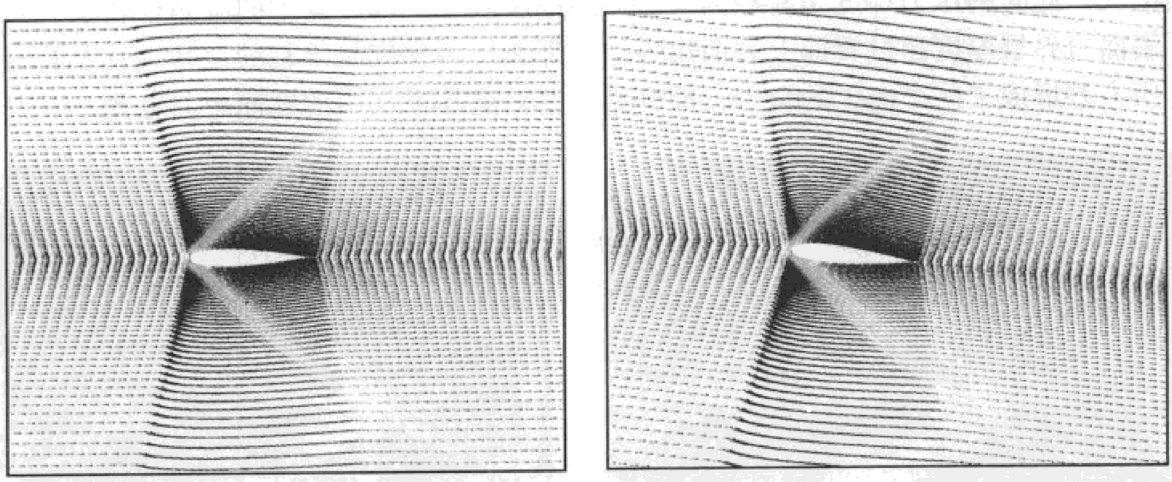


迎风角为 5°

图 7.68　*Ma* = 2.5 的超声速气流流过机翼时的局部马赫数和压力云图

上述讨论表明，翼面的升力与迎风角密切相关．很多资料显示，翼面产生的升力与翼面周围的流动特性之间有着内在的联系．图 7.69 显示了在两种不同的迎风角 0°和 5°情况下，与压力分布相对应的速度矢量谱图．从图中可见，当迎风角较小时，在接近尾翼处，边界层没有分离．然而，存在一个临界迎风角，当超过临界值的迎风角时，迎风角再增加

升力就不再增加了．在本例中，重要的流动分离发生在翼面上表面以及后缘之后的不断扩展的尾迹处．在空气动力学设计中有一个临界迎风角，当超过临界迎风角后，升力骤然下降，这即为失速位置(stall position)．



迎风角为0°　　　　迎风角为5°

图 7.69　*Ma* = 2.5 的超声速气流流过迎风角为 0°和 5°的机翼时的速度矢量图

在如图 7.70 所示的温度云图中，上游远离由“*P*”表示的前缘或驻点（stagnation point）的流动域通常被称为“静区”（silent zone）．因为流动为超声速，因而发生在“*P*”点的扰动与静区中的任何部分均没有联系．下游描述流体在冲击层中有重要变化的区域有时被称为“动区”（action zone）．因为在迎风角为 0°时，机翼表面顶部和底部是对称的，因而上部和下部的温度分布相同．当迎风角增大到 5°时，平衡被打破，在“动区”内产生温度梯度．与 0°迎风角相比，机翼底部表面的温度显著上升，而机翼上表面的温度较低．

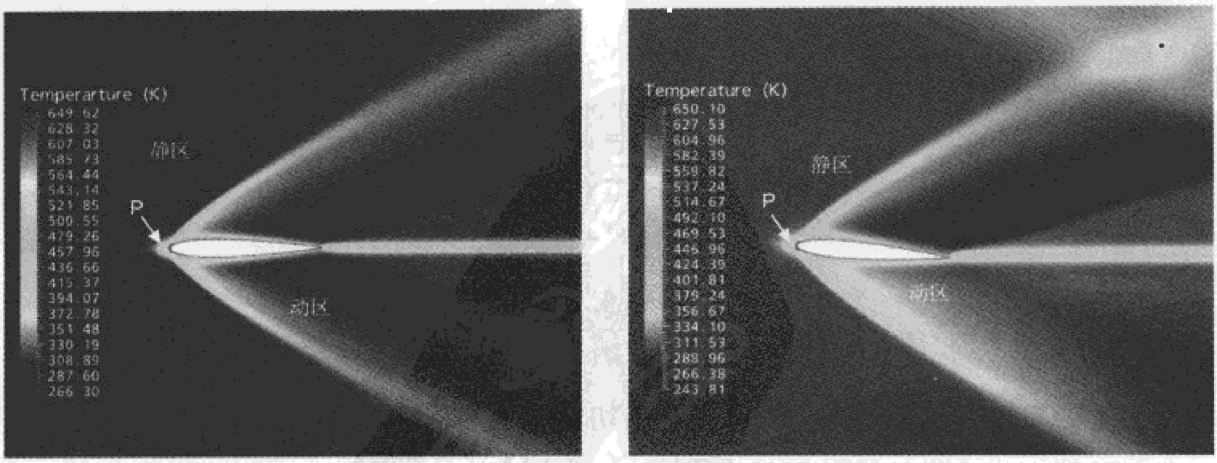


图 7.70　来流为 *Ma* = 2.5 的超声速气流流过迎风角为 0°和 5°机翼时的温度云图

在本节的剩余部分中，将描述 Shan 等人(2005)以及 Deng 等人(2007)通过 DNS 技术对流经翼面亚声速气流的非稳态波动、非线性发展以及转化为湍流时起点的研究. 基于与时间相关的一维 Euler 特征方程分析，流入和流出边界条件采用无反射(non-reflecting conditions)条件. 这一边界条件不同于前节中应用 DNS 对超声速流经平板时边界层流动的边界层条件设定.

Shan 等(2005)研究了 $Ma=0.2$ 的流体流过迎风角为 4°的翼面时，x-z 平面中部处，沿翼面方向不同时刻的旋涡发展，其照片如图 7.71 所示. 在 $t=0.8794$ 时刻，在机翼表面上方出现向下游传播的非稳定波，并清晰地建立了过渡流动的起点. 随着时间的延续，这些三维波在剪力层中不断增大，正如 DNS 计算显示的无序三维流体流动的后期那样，之后的流动在接近尾翼处引起旋涡破裂. 在完全湍流状态下，尾翼之后出现脱落的旋涡，并伴随着尾迹区域内速度脉动间的强烈非线性相互作用而快速增大.

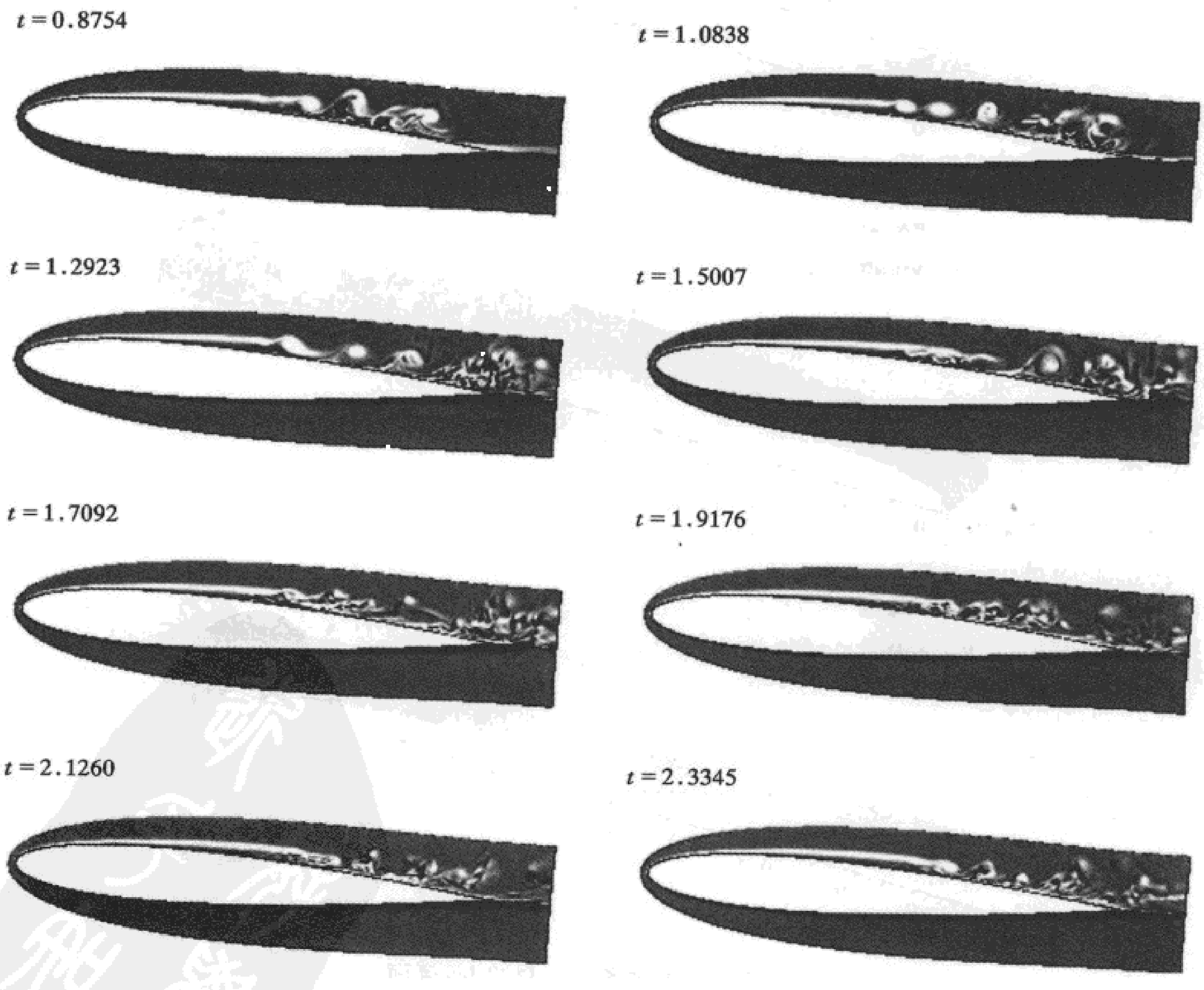


图 7.71 不同时刻瞬时翼面方向旋涡图(t 为无量纲时间 c/U_{∞})

图 7.72 中进一步显示了沿 x，y 和 z 方向的瞬时旋涡的 Iso 表面，可以更好地明了流动的转捩．沿翼面方向出现波动旋涡，这表明流动为三维流动，同时也显示了波动沿翼面上表面的非稳定传播．结果清晰地显示了沿弦线卷起的剪力层及其破灭，旋涡从破裂的剪力层中脱落，在向下游的流动过程中变得扭曲．更为特别的是，脱离出来的旋涡迅速变形，随后在初始旋涡的作用下形成反向旋涡，初始旋涡位于反向旋涡的侧面，在流动转捩为湍流时破裂为小的碎泡．来流方向和翼面延展方向旋涡之间的相互作用导致了 λ 状旋涡的出现，这种旋涡一开始堆积随后破裂．边界层在尾翼后面的流动中变成完全的湍流．

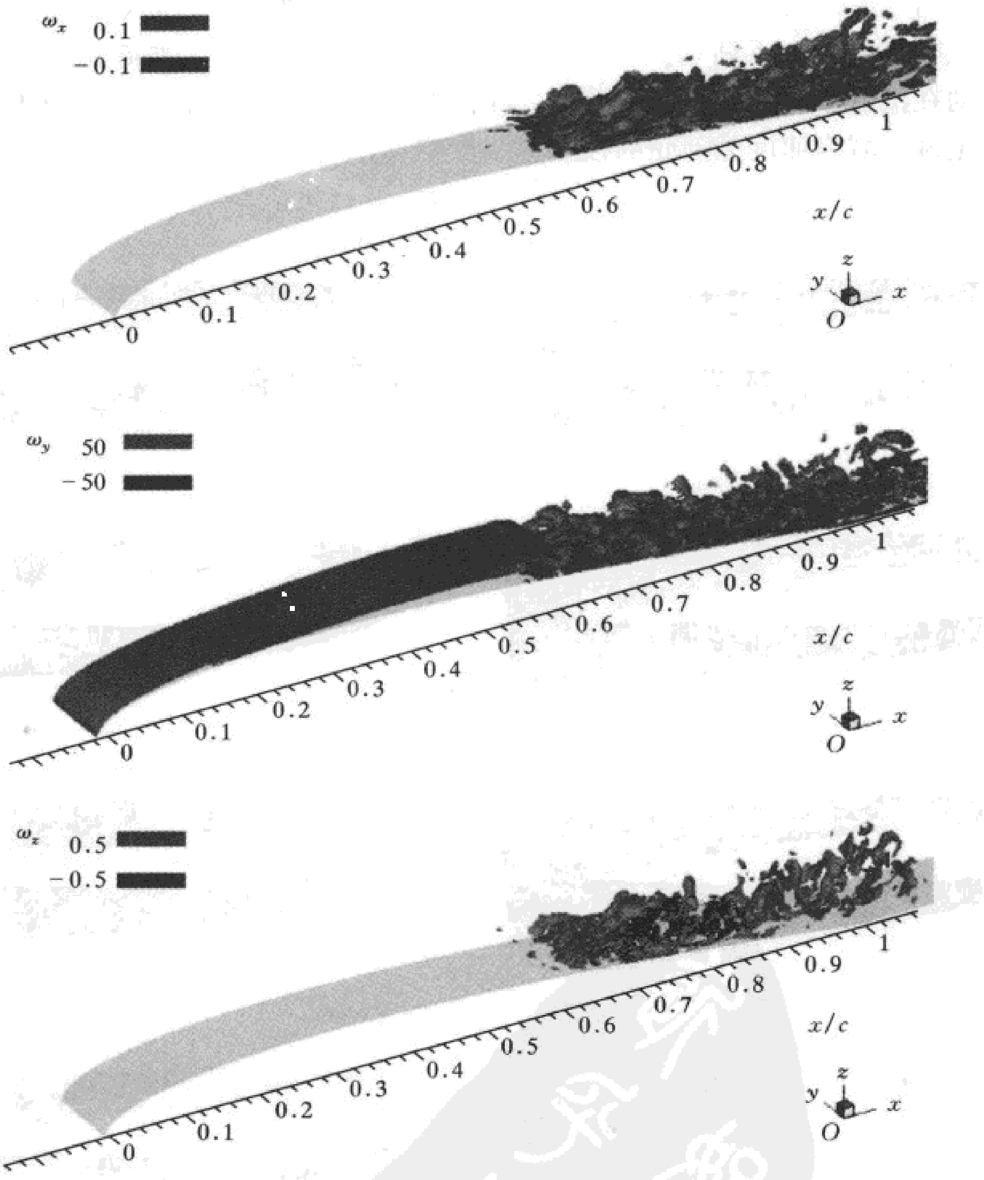


图 7.72 瞬时旋涡分量的 Iso 表面

（从上至下为流动方向分量、翼面展开方向分量以及垂直分量）

为了与上述例子作比较，下面介绍最近由 Deng 等(2007)采用 DNS 在相同迎风角条件下对脉冲喷气机翼流动分离控制的研究结果．在 x-z 平面中部，不同时刻脉冲喷气条件下瞬时翼面方向的旋涡照片如图 7.73 所示．在分离点之前进行的非稳态强制喷气产生了一个大的旋涡，该旋涡基本上在接近机翼前缘产生脱离，导致了边界层提前转捩．图 7.74 中，沿不同直角坐标方向的旋涡 Iso 表面进一步验证了分离剪力层的衰减和旋涡形态的变化．这些流动现象揭示了很多有趣的流动特性．从获得的结果中可见，施加在入口的脉冲喷气强烈影响了分离后的边界层回旋区．图 7.74 中，旋涡的形态证实了存在一个较短的分离区域，并导致分离气泡的大量减少．

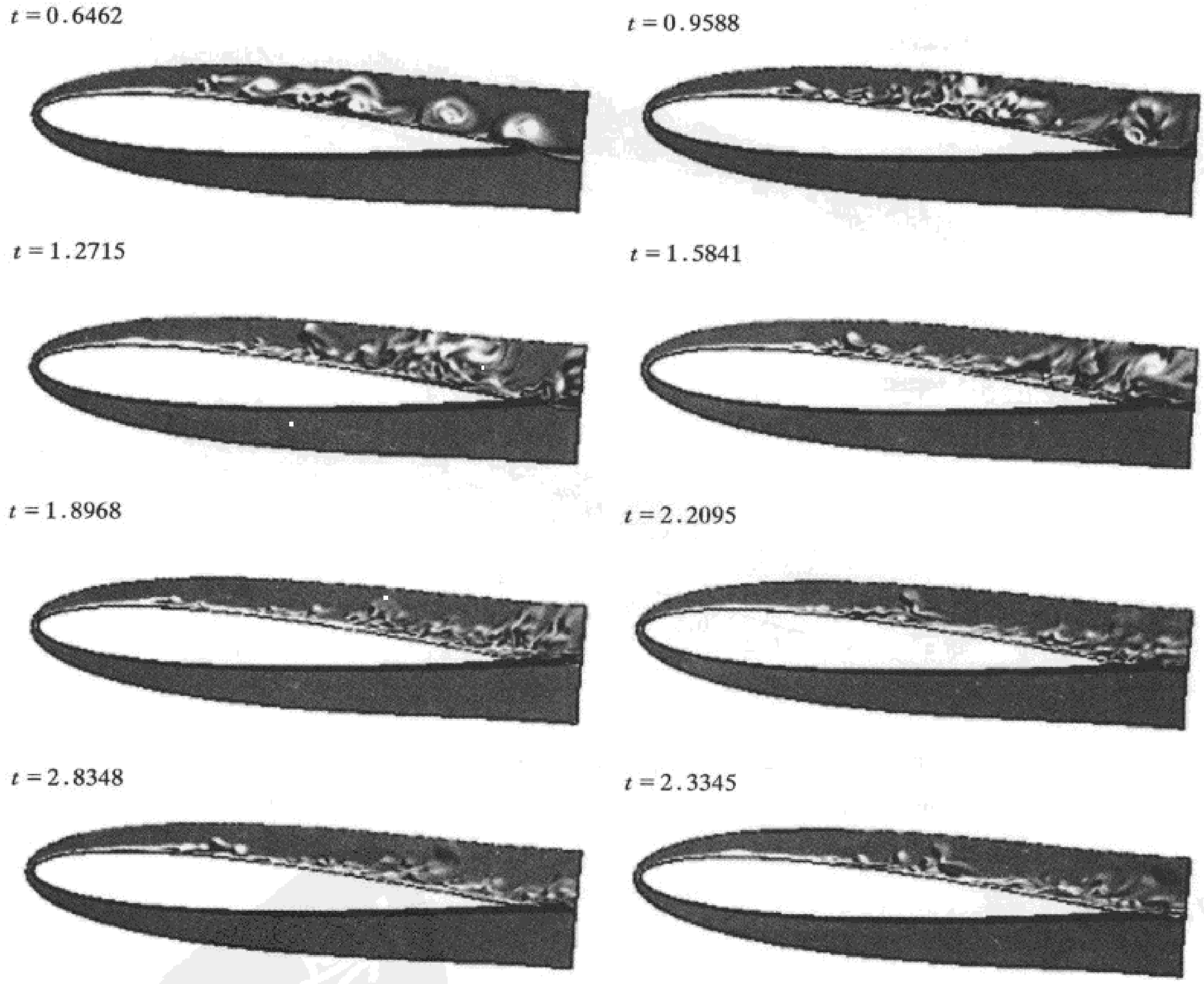


图 7.73　不同时刻脉冲喷气条件下瞬时翼面方向的旋涡(t 为无量纲时间 c/U_∞)

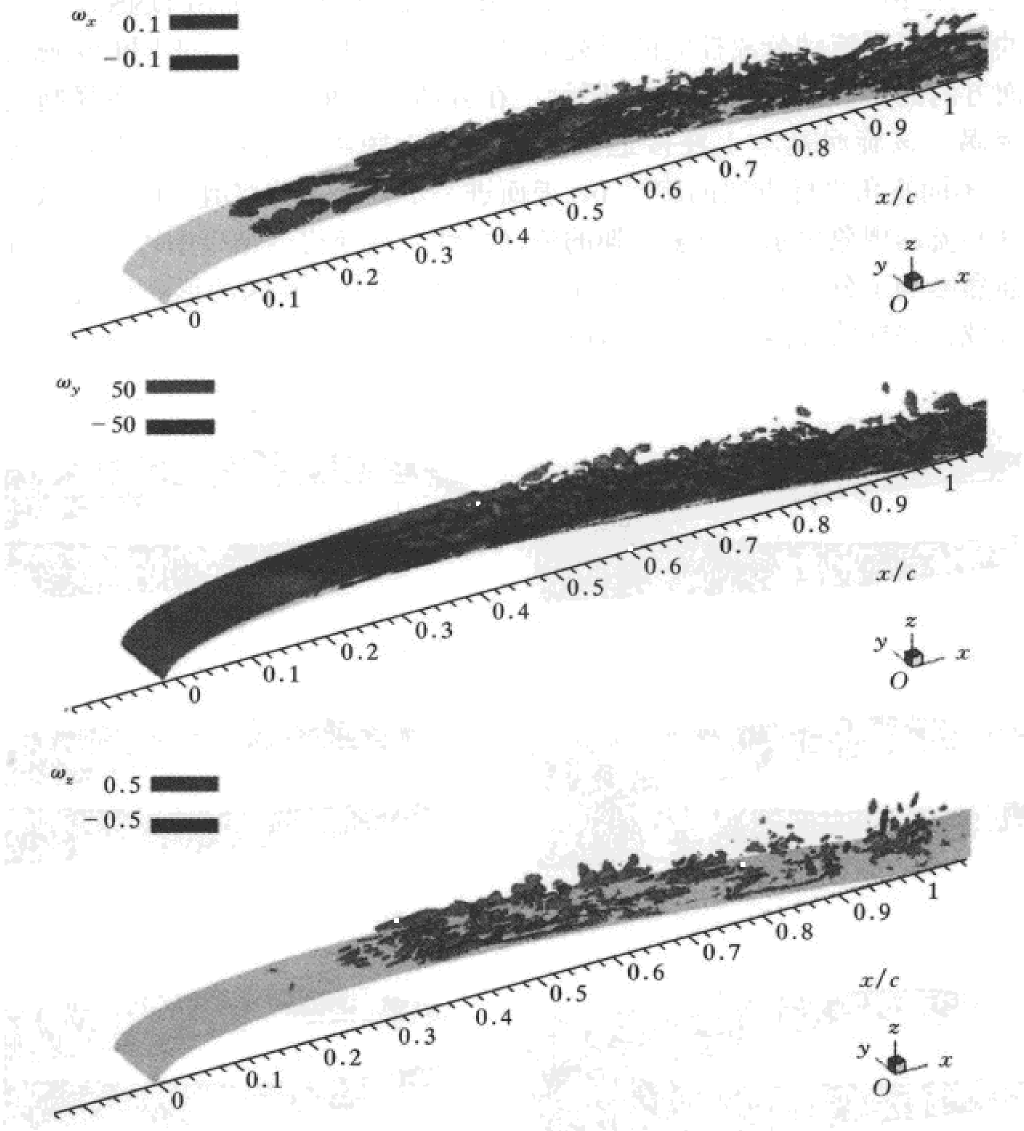


图 7.74 脉冲喷气条件下瞬时旋涡分量的等值 Iso 表面

(从上至下为流动方向分量、翼面展开方向分量以及垂直方向上的分量)

7.5 小 结

本章中通过精心选定的实例说明了 CFD 方法在工程领域中广泛应用的可行性，并且给出了处理这些实际流动问题的一些有用方法.

在第 1 个例子中，应用适当的湍流模型对通风系统进行了详细的设计研究，借此说明这些模型可以作为一种“设计工具”用于建筑工程中.

在第 2 个例子中，涉及了作为“研究工具”的最新 CFD 方法. 对于气体-颗粒流动，

颗粒可以通过增加守恒方程的 Eulerian 方法处理成另一连续性介质，也可以由 Lagrangian 方法在双流体守恒方程中将颗粒处理成离散的固体颗粒流．这两种方法是目前处理气体-颗粒流动最常采用的方法．提醒读者注意，所谓的包含有适当形式的封闭关系式的多相流模型并不只限于气体-(固体)颗粒流动，也可以用于求解气体-液体、液体-固体流动，甚至可以求解气体-液体-固体混合流动．

为考虑动量和湍流方程中与适当源项相耦合的附加能量守恒方程，本章通过两个实例说明了有热量传递的流体流动．在并排或叉排分布的紧凑式换热器中，通过 CFD 获得的大量流体流动信息可以让机械工程师对换热器进行必要的改进，以获得更好的换热性能．更为重要的是，CFD 在帮助核工程师对暴露于空气环境中由于残余核裂变而灼热的 molybdenum 板(复合传热以及辐射传热)的辐射安全以及结构完整性中起到了重要的作用．

第 5 个例子介绍了采用大涡模拟(LES)(并非通常使用的 RANS)对自由火焰燃烧和辐射过程的求解．通过 LES 捕捉到浮力火焰的摇曳特性，使防火工程师以及研究者了解燃烧以及油田意外大面积火灾可能引起的环境问题．

第 6 个例子为气流流过车队的问题，进一步确立了 CFD 作为一种有效的设计工具在改进汽车空气动力学效果方面的作用．这种方法也为汽车设计人员以及工程师们提供了另一个改进汽车结构使之更环保的思路，通过大幅度降低尾气排放水平达到更低的油耗．

第 7 个例子证明了 CFD 网格和数值模型发展已经相当成熟，可以考查人鼻腔内很多复杂的流动．CFD 在生物医药工程领域中已经日益成为一种可行的研究工具，其应用稳步增加．人们特别有兴趣去研究人体血液循环系统中变形血管壁对动脉血液流动的影响．

在工业飞机空气动力学设计中，除了长期应用传统的理论边界层求解技术之外，现在通过有效的 CFD 方法和模型可以处理流过不同飞机形状和飞行条件的超声速气流流动问题．在最后的两个例子中涉及了这一工程领域．现在可以应用商业 CFD 软件，对超声速条件下，求解完全二维及三维 Navier-Stokes 方程．应用直接数值模拟(DNS)来预测流动不稳定以及向湍流转变的起点，该方法提升了对基础流体动力学以及经典物理现象特别是湍流的理解，是 CFD 未来发展的方向．

CFD 发展机遇之门已经敞开．CFD 被认为是 21 世纪流体流动研究的关键技术．到目前为止，尽管很多 CFD 应用已经取得了成功，但是还应该给读者介绍一些新的创新技术，它们将变革当前的 CFD 方法．这将在下一章中作进一步讨论．

复习题

7.1 工程师们在求解他们设计的问题之初，为何更愿意首先使用标准 k-ε 湍流模型，而不采用更复杂的湍流模型，如 LES 方法？何时可以使用 LES 方法？

7.2 对于如图 7.75 所示的管内流动，回答下列问题：

(a) 定义并描述所有的边界条件；

(b) 当出口 $d=0.2$m 时，为获得充分发展的流动，应如何选择合适的 L_1 和 L_2 值？

(c) 指出何处需要精细网格；

(d) 根据你对流体动力学的理解，勾画出本流动问题的流线草图；

(e) 针对这种管内流动，讨论减少压力损失的设计方法，以及如何应用 CFD 来实现.

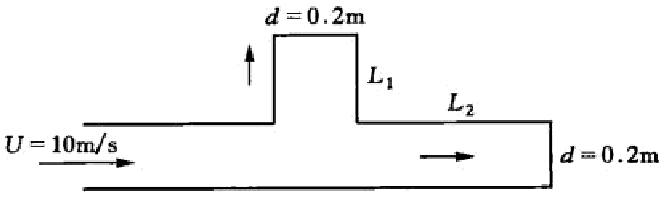


图 7.75

7.3 解释 Lagrangian 方法对流体流动的描述.

7.4 Eulerian 方法是如何描述流体流动的？其与 Lagrangian 方法有何不同？

7.5 将染色颗粒投放到内流之中，跟踪并记录其流动的测量方法，这是 Lagrangian 测量方法还是 Eulerian 测量方法？

7.6 将静止的皮托(pitot) 管置于流动流体之中来测量压力，这是 Lagrangian 测量方法还是 Eulerian 测量方法？

7.7 90°弯管内的流动见图 7.76，回答下列问题：

(a) 对于此几何结构，宜采用结构化网格还是非结构化网格？如何生成该网格？

(b) 根据你对流动守恒方程的知识，勾画出雷诺数为 100 和 10000 时的流动流线图；

(c) 在层流条件下，在入口投入 Stokes 数为 0.1 的粒子，勾画出粒子在管道内的可能流动轨迹；如果为湍流流动，粒子的流动轨迹会有何不同？

(d) 如果 Stokes 数变为 20，层流和湍流条件下粒子的轨迹又会怎样？

(e) 如果采用 Eulerian 方法求解本问题，可以使用何种方法进行测量？

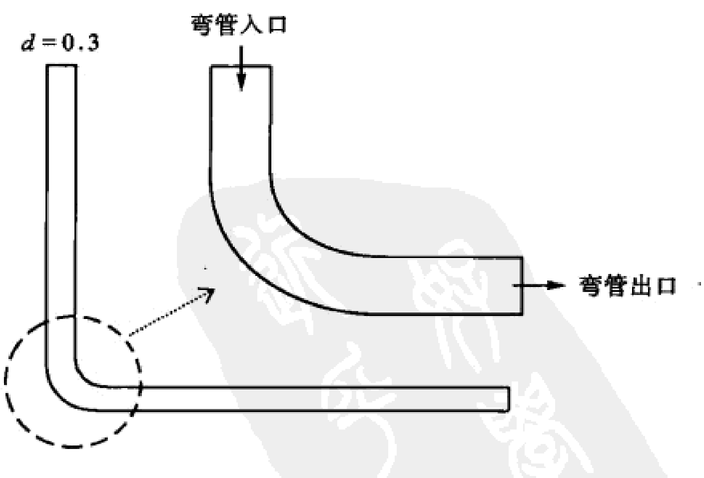


图 7.76

7.8 对于伴有传热的流动问题，试回答：

(a) 紧凑列管式换热器与常规换热器有何不同?

(b) 通常可以采用对称和周期边界条件简化紧凑列管式换热器内的流动. 指出图 7.77 中并排和叉排分布的边界条件.

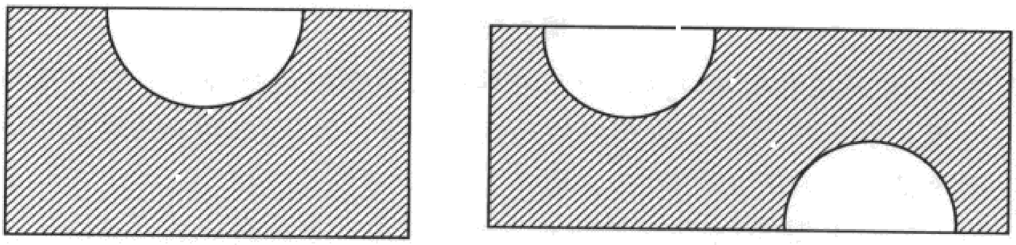
(c) 努塞尔数是哪两个流动参数的比率?

(d) 解释叉排分布比并排分布换热率高的原因.

(e) 何为耦合传热?

(f) 在自然对流中，加入浮力影响有何重要意义? 在传递方程中需要增加的模型因素(modelling effort)是什么?

(g) 何为辐射传热? 热辐射是如何影响固体表面温度的(参见传热耦合和辐射换热)?



(a) 并排分布 (b) 叉排分布

图 7.77

7.9 Ahmed 模型常被用于对非流线形车体建模. 图 7.78 为行驶在同一直线上两汽车模型之一以及网格结构简图. 试分析此问题，并回答下述问题：

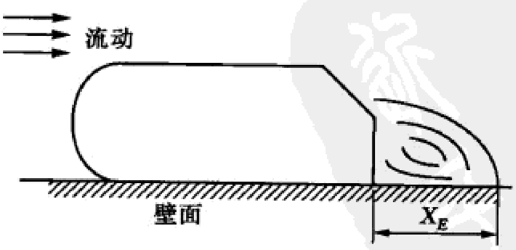
(a) 解释每一车体周围采用精细网格的原因；

(b) 指出车体周围的高压和低压区域；

(c) 前车对后车牵引系数的总体影响是什么?

(d) 如果两车的间距非常接近(即 $x/L \approx 0.25$，其中 x 为距离，L 为车长)，牵引力系数和升力系数会怎样?

(e) 当使用不同的 k-ε 湍流模型时，一个模型高估了湍动能 k 而另一个低估了该值，试说明两种模型得到的预测结果与图中正确试验值 X_E 之间的差别.



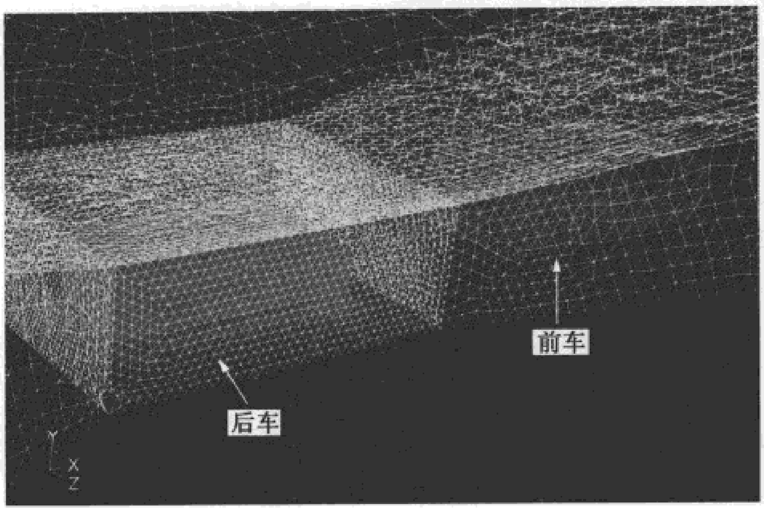


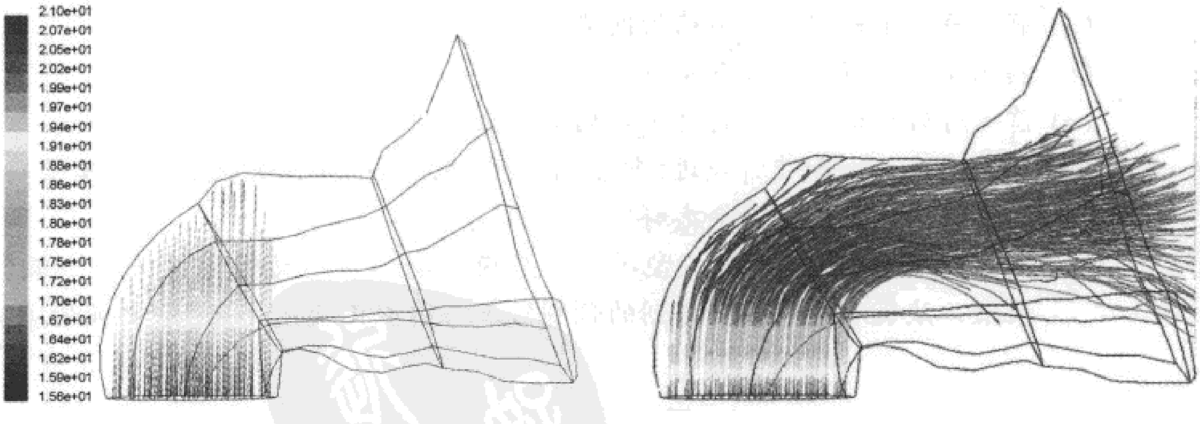
图 7.78

7.10 图 7.79 为从底部入口释放的两种单一尺寸颗粒的轨迹分布图．颗粒轨迹用其速度大小着色，图(a)中颗粒的速度高一些，图(b)中颗粒的速度小一些．颗粒初速度为来流速度的 10 倍，即 $U^*=10=U_{\text{particle}}/U_{\text{air flow}}$.

(a) 图(a)和图(b)中颗粒流动的 Stokes 数大约是多少？

(b) 当(a)中颗粒流动轨迹撞击到上壁时，其速度是多少？并与同样位置上(b)中流动轨迹速度作比较．

(c) 解释(a)中流动轨迹(直线)和(b)中流动轨迹(曲线)之间的不同．(提示：比较速度分布)



(a) (b)

图 7.79

7.11 对高速流动，简要回答下列问题：

(a) 为什么直接数值模拟 (DNS)技术在研究超声速流动中特别有用？

(b) 在超声速流动中的流出条件与亚声速流动中常用的 Neumann 边界有何不同?

(c) 如图 7.80 所示,对于流过平板的超声速流动,试讨论何种类型的边界条件适于捕捉流动特性.

(d) 讨论使用等温壁面条件代替绝热壁面条件对边界层发展的影响,以及对超声速流动中温度分布的影响.

(e) 讨论使用 DNS 方法比抛物化稳定性方程(PSE)等理论方法具有的优点.

(f) 对于流过翼面的流动,讨论图 7.81 中网格构成的必要性.

(g) 当 NACA 0012 翼面迎风角为 5°时,底部表面的压力会如何变化?对温度的影响是什么?(见有关"机翼上的亚声速和超声速流动"章节)

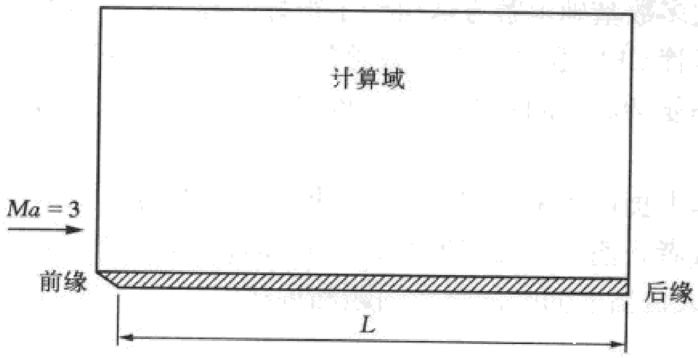


图 7.80

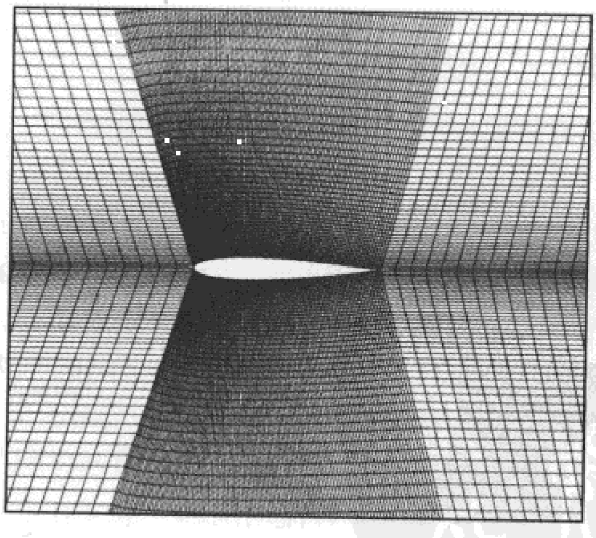


图 7.81

8 CFD中的某些前沿课题和探究方法

8.1 概 述

在过去的30年中，CFD得到了很大的发展．在很多应用领域中，CFD正迎来一个成熟的发展阶段，绝大多数基础求解方法得到了很好的建立，并且很多方法被用到大量的商业计算软件之中．尽管CFD取得了很多显著的成就，但仍然迫切需要发展和完善，以满足不同工程领域求解复杂流动问题的要求，也包括一些研究领域，特别是生物医药研究领域．

到目前为止，本书提供的素材只是CFD使用和应用的一个导引．对于那些渴望从事研究工作的读者，或者目前正在做研究和开发的读者，本章将特别介绍CFD的最新发展，以及很多CFD研究人员当前面临的重要问题和挑战．

8.2 最新数值方法和技术

8.2.1 不可压缩流动

不可压缩流动可定义为流动速度与流体介质的声速相比可以忽略不计时的一种流动近似．根据这一定义，我们日常生活中遇到的绝大部分流体及其流动都属于不可压缩流动范畴．从数学上讲，由不可压缩条件，不可压缩流动方程具有特有的、可压缩流动方程中不会出现的挑战性问题．从物理上讲，不可压缩流动是含有压力波的椭圆方程，由于不可压缩流动中压力波速度为无穷大，因此为满足流动的不可压缩性，急需相应的计算方法．不可压缩Navier-Stokes方程和可压缩Navier-Stokes方程之间的主要差别在于连续性方程．不可压缩方程一般可以看成是可压缩方程的奇异极限(singular limit)，其中压力场为需要求解的一个部分．充分满足质量守恒方程是求解一系列控制方程的基础．

很多涉及空气、水以及生物流体等工程流动问题一般都在不可压缩流动范围内．由于流动装置的设计越来越复杂、精密，经常要采用CFD技术来处理这类流动．本着逐步加深难度的想法，从实用的角度，本书已经介绍了基本的守恒方程以及相应的合适的计算方法．为说明流体工程中面临的不可压缩和低速流动的挑战及其复杂性，作者将在此进一步讨论不可压缩流动的最新研究成果和未来发展趋势．

基于初始变量逼近的最常用的两种算法为：①基于压力迭代的方法；②基于人工压缩法(Artificial compressibility method).

基于压力迭代的各种方法中，Harlow 和 Welch (1965)发展了标记网格(marker-and-cell，MAC)方法，该方法是第一个采用源于压力 Poisson 方程的初始变量方法. 通过这种方法，压力被用做连续方程的映射参数. 常密度 Navier-Stokes 质量和动量方程(见方程(3.13)、(3.24)和(3.25))，可以写成如下通式：

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0, \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}. \tag{8.2}$$

采用动量方程的散度，Poisson 压力方程可由下式求得：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}=\frac{\partial h}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \tag{8.3}$$

式中：

$$h_i=\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}-u_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \tag{8.4}$$

由于该方法的引入，现在已经出现了各种 MAC 方法，并且成功地进行了数值计算.

另一种常用的压力相关方法是分步过程(fractional-step procedure)方法(Chorin，1968 以及 Yanenko，1971). 该过程一般分两步：(1)通过求解动量方程获得辅助速度场，其中压力梯度项要么不加考虑要么从前一时间步长中求得；(2)与 MAC 方法相似，通过 Poisson 方程计算压力，将辅助速度场引入到无散度(divergence-free)速度场中. 排除压力梯度项后，该方法由下式表示：

$$\frac{u'_i-u_i^n}{\Delta t}=-u_i^n\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_i^2}, \tag{8.5}$$

$$\frac{u_i^{n+1}-u'_i}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i}. \tag{8.6}$$

式中，u_i^n 为前次 n 层的速度；u'_i 为中间速度，为当前 $n+1$ 层的速度.

通过采用方程(8.6)的散度，Poisson 压力方程的形式可由下式表示：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2}=\frac{1}{\Delta t}\frac{\partial u'_i}{\partial t}. \tag{8.7}$$

读者应注意，分步方法需要评估边界条件对中间一步变量的影响(Orszag 等，1986). 对中间步骤采用物理边界条件可以克服这一困难. Rosenfeld 等(1991)对此进行过充分的讨论.

人工压缩法是通过增加压力项时间导数及人工压缩性参数来修改连续性方程. 增加压

力项的时间导数及人工压缩参数 β 修正的连续性方程为

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0. \tag{8.8}$$

与非稳态动量方程联立，构成与时间相关的双曲线方程组．一系列前处理方法(Choy等，1993；Turkel，1999)以及 Briley 和 McDonald(1977)提出的交替方向隐式(alternating direction implicit，ADI)方法、Rogers 等(1991)采用的迎风差分算法等数值算法，都是针对可压缩 Navier-Stokes 方程的求解方法，可用来求解不可压缩流动问题．人工压缩法缓解了每一迭代步骤中对质量守恒的严格要求．然而，要想有效地利用该方法，就必须完全了解人工压缩的物理意义和数学内涵．Chang 和 Kwak(1984)给出了如何选择人工压缩参数的建议．

总地来说，作者认为上述方法都已经得到了很好的确立并得到了广泛应用，成功地解决了大量的流体流动问题．其中，绝大多数已经成为解决流体工程问题的常用方法．当前，很多综述文章和 CFD 书籍中都写到对黏性不可压缩流动的计算方法．关于这些方法的最新发展，推荐感兴趣的读者参阅 Gunzburger 和 Nicolades(1993)、Hafez(2002)、Loner等(2002)、Gustafsson 等(2002)以及 Kiris 等(2002)的相关研究工作．也有关于拓展这些基本方程到大量特殊应用之中的报道：例如，基于可压缩守恒方程的 0 马赫数方程，在预测-修正(predictor-corrector)处理的基础上，通过增加分步方法，Najm 等(1998)运用半隐算法对精细化工中的密度剧烈变化的化学反应流动进行了稳定计算．

尽管不可压缩 CFD 方法取得了很多进步，但作者仍然认为应该关注计算效率，这与求解 Poisson 压力方程直接相关．选择合适的压力求解方法相当重要，特别是当求解高密度网格、求解大物理区域和/或短时间步长求解瞬时流动问题时更是如此．对于矩形区域的计算，基于 CRAYFISHPAK① 计算软件求解器，采用直接(非迭代)快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform，FFT)(Sweet，1973)很容易求解压力方程．但在普通的三维坐标系下，上述 Poisson 方程的直接求解方法并不那么简单，由于直接求解方法太费时，有时甚至难以实施，因此，迭代求解法仍然是求解复杂几何形状流动唯一可行的选择．由于传统迭代求解法收敛速度慢，求解效率低，因此需要发展更好的求解方法．最近并行计算的出现为加速计算提供了一种可能的方式．为使计算速度最快，迭代矩阵求解器，如 Saad 和 Schultz(1985)提出的通用最小残余方程求解器(Generalized Residual Minimal Equation Solver，GRMES)的平行计算版(基本上属于 Krylov 族中的方法)，对于求解压力方程是一种可行的方法．另一种值得探索的方法是由 Kwak 等(2005)提出的多重网格加速技术．

① CRAYFISHPAK：FISHPAK 椭圆方程求解方法的一种矢量形式，最初由位于科罗拉多州的(美国)国家大气研究中心(National Center for Atmospheric Research，NCAR)开发．

8.2.2 可压缩流动

从历史上看，很多求解可压缩流动方程数值方法的发展都与可压缩流动在空气动力学以及航空、航天中的重要性密切相关. 当飞机在大气中飞行时，飞机周围的气流速度非常快，导致雷诺数很高，湍流影响主要集中在很薄的边界层中. 如果忽略摩擦阻力，气流流动可能是由引起激波的波阻(wave drag)和基本无黏性的压差阻力(pressure drag)造成的. 后者要求设计特殊的算法来求解无黏 Euler 方程. 正如 Fujii(2005)综述的那样，在 20 世纪 70 年代，CFD 首先应用于跨声速流动的模拟中. CFD 充分捕捉到了飞机跨声速飞行中流动的激波，此后，商业飞机的设计过程发生了彻底的改变. 在 20 世纪 80 年代中期，CFD 已经用于航天运输系统，包括返回式运载工具(reentry vehicles)中高超声速流动的模拟. 这些问题大都可以通过无黏 Euler 方程加以求解. Fuiji 和 Obayashi (1987a，1987b)首先采用完全可压缩 Navier-Stokes 方程对航空和航天领域中的实际流动进行了模拟. 对于高速流动，应用这些方程求解机翼周围的黏性边界薄层仍然面临许多困难. 为充分预测近壁面湍流流动，进行流动分析，进而进行流动控制，就必须细化网格. 近壁面处精细网格极大地限制了计算的时间步长，这导致了求解计算量的剧增.

最早用于可压缩流动的算法是 Mac Cormack(1969) 基于中心差分的显式方法. 即使在现在，这种方法仍然被广泛使用. 为避免求解过程中激波前峰间断面引起的计算振荡，在方程中引人人工耗散(artificial dissipation)的概念. 最常见的是添加四阶耗散项，也有成功采用更高阶耗散项的. 另一种求解可压缩流动方程的有效方法是 Beam 和 Warming (1978)提出的隐式方法，该方法是基于对 Crank-Nicholson 方法分解的近似因子. 同 Mac Cormack 方法一样采用中心差分，因此必须在方程中加入显式四阶耗散项.

最近，Roe(2005)在其综述文章“CFD——回顾与展望”中指出了 CFD 算法未来发展的一些关键课题. 其中之一是当激波非常强的时候，如何捕获激波的问题. 因此，希望发展一系列迎风格式，避免将不当误差引入到解的光滑部分，更好地处理不连续问题. 在下节中，将向读者介绍高阶求解格式的最新发展. 本书不详细介绍这些算法的细节，建议感兴趣的读者参看更多的文献，以加深对问题的理解. 另一种重要的方法是通过使用适应性网格来捕捉非稳态运动激波前锋，这也将在下面进行讨论.

8.2.2.1 高阶求解格式

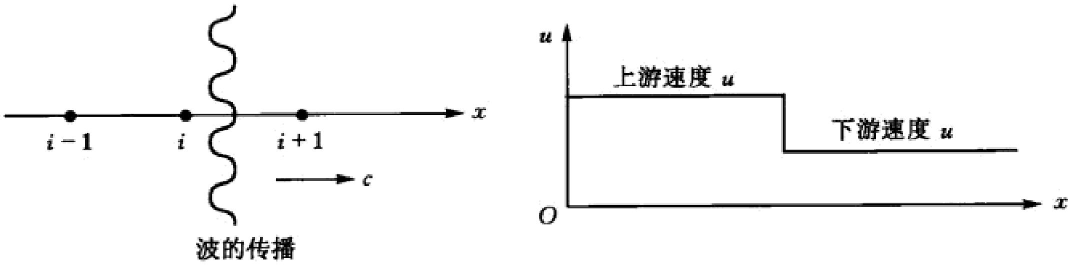
考虑无黏 Euler 方程的简单实例. 一维波方程的非守恒形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{8.9}$$

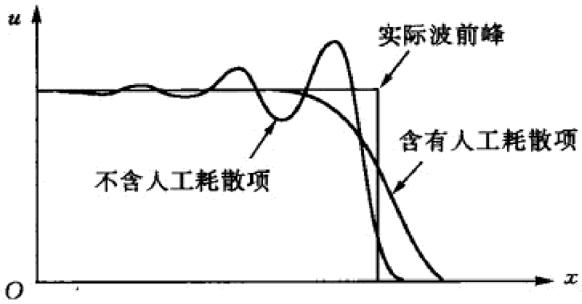
式其中，c 为波沿 x 轴传播的速度.

如图 8.1(a)中描述的那样，在波交叉处速度出现了间断. 假设 c 为正值，网格节点 i 处的特性流动应依赖于上游流场节点 $i-1$ 处的特性. 另一方面，节点 $i+1$ 处的流动对节点 i 处的流动应无影响. 选择的数值算法必须反映这一流动现象. 如果梯度$\partial u/\partial x$ 如

MacCormack(1969)描述的传统方法那样采用中心差分近似，那么在间断波前峰附近，速度 u 的分布会出现振荡. 在某些情况下，会导致数值计算不稳定以及无序解. 如前所述，通常的补救方法是引入人工耗散项. 尽管数值解表现为单调变化(无振荡)，但如图 8.1 (b)中数值表示的那样，扩散特性未能获得期待的结果.



(a) 物理表示



(b) 数值表示

图 8.1 波沿 x 轴正向传播时流场的物理表示以及临近间断波面的含有人工耗散项与不含人工耗散项的数值表示

为了消除这一影响，在过去的一二十年间已经发展了一些更好的算法. 这些最新算法包括 Sweby (1984)提出的流量限定器(flux limiters)、Anderson 等(1986)提出的 MINMOD 和 SUPERBEE 格式、守恒定律单调迎风格式(Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws，MUSCL)方法中的倾斜限定器(slope limiters)(见 Van Leer(1974，1977a，1977b，1979)，Godunov(1959))以及近似 Riemann 求解器(Toro，1997). 在文献给出的很多激波捕捉技术当中，总变量减少(total variable diminishing，TVD)算法被认为是适于捕捉激波的方法. 方程(8.9)中，速度梯度$\partial u/\partial x$ 的积分(总变量)按下式离散：

$$TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|. \tag{8.10}$$

为了获得单调变化，必须满足条件 $TV(u^{n+1}) \leqslant TV(u^n)$. 通常，希望数值算法既能用最小数值耗散描述小尺度流动结构，又能捕获间断而没有伪振荡，这样的算法设计是一项几乎无法实现的任务. 一阶迎风格式(见附录 B)在非连续处附近不会产生振荡，很容易看出其满足 TVD 条件. 然而，由于引入了人工耗散项，该方法在间断面附近也有很大的扩散.

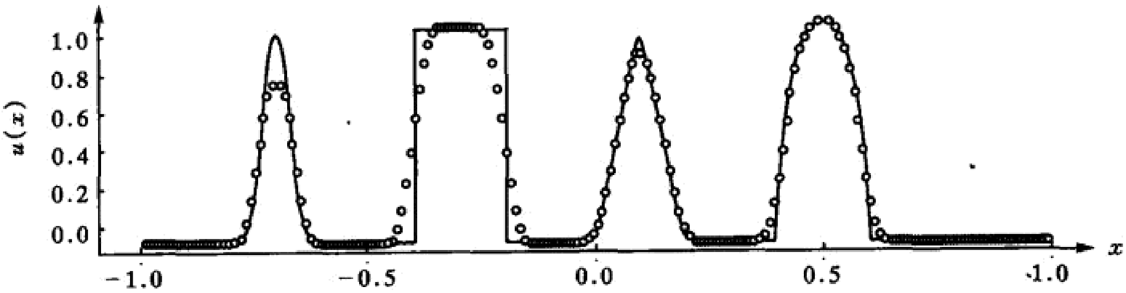
因此，该领域中的研究面临的最大挑战是发展流动光滑区域内具有高精度以及间断区域内不出现强烈振荡的计算方法．Colella 和 Woodward(1984)首先尝试通过引入分段抛物线法(Piecewise Parabolic Method，PPM)来解决后者：由四点中心模板(four-point centered stencil)定义界面值，通过限定该值来控制计算结果的振荡．之后，Leonard (1991)将这种限定方法与更高阶(达到九阶)界面值相结合．请注意，PPM 可以认为是 Van Leer 提出的 MUSCL 算法的扩展，而 MUSCL 是 Godunov 方法的扩展．由于极值附近为一阶近似，因此这些限定方法会引起求解精度的下降．

从不同的思路，Shu 和 Osher(1988，1989)以及 Harten 等(1989)提出了基本无振荡(Essentially Non Oscillatory，ENO)三阶算法，接着，Liu 等(1994)以及 Jiang 和 Shu(1996)又提出了改进算法：五阶加权 ENO(weighted-ENO，WENO)，对所有可能的模块分别加权平均，这样可以更好地定义界面值．经过设计的这些权，在光滑区域内可以获得很高的计算精度．然而，在间断面附近，同 ENO 方法一样，WENO 方法仍然表现出扩散行为，该方法依然抹平了界面的前部．最近，为更好地描述近极值处的流动，由 Suresh 和 Huynh(1997)提出的方法扩大了 TVD 的约束，对界面处的重构值加以限定，通过使用局部几何方法来放松近极限点处的单调性约束，以便同时保持单调性和高阶精度．这种方法称为 MP，其中，MP 表示“单调保持”(Monotonicity Preserving)，为五阶精度，用来处理迎风方法常见的窄模(narrow stencils)问题，即其不能区别激波和极值．

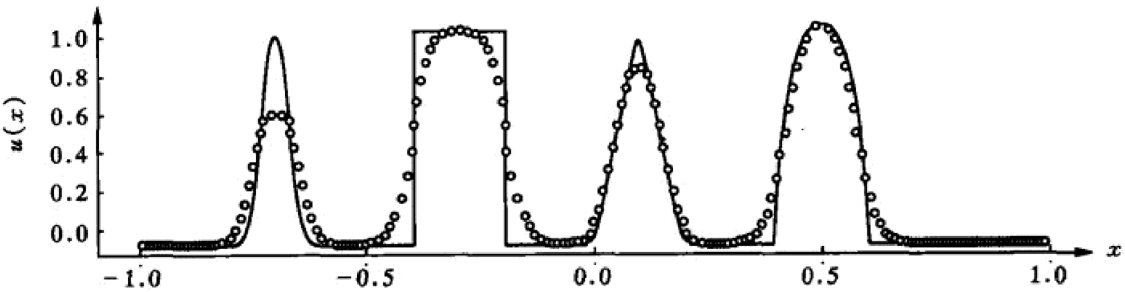
为了说明上述方法，图 8.2 中显示了出现在 Suresh 和 Huynh(1997)文章中一维对流方程(8.9)的一些计算结果．毫不奇怪，未经过滤的方法因为违背 TVD 条件，所以通常在间断位置附近出现不希望的振荡．尽管 ENO 方法保持了速度 u 的单调变化，但用对跃变的过度限定去满足可实现性(realizability)条件，其结果也不比未过滤方法好多少．高阶方法，如五阶的 WENO 和 MP 方法不仅可以满足速度 u 的单调变化，而且在近极限点附近也满足了可实现性条件．图中显示，MP 方法明显优越于 WENO 方法，特别是在接近间断处的速度 u 的分布，后者在该处仍然显示出一定的速度扩散．

最近，Daru 和 Tenaud(2004)将 Suresh 和 Huynh(1997)的 MP 方法推广到七阶精度，通过使用局部线性化以及空间的多维分裂(splitting)来求解多维的 Euler 和 Navier-Stokes 方程．他们评价这些算法尽管没有保持高精度，但与高阶 WENO 方法相比，虽然计算成本低很多，但仍然给出了非常精确的计算结果．他们还指出，空间多维分裂的典型缺点与不可压缩流动的分步方法相似，在边界黏性流动计算时，存在着对中间步骤边界条件如何进行处理的问题．感兴趣的读者可以进一步研究相关问题以对 MP 方法进行改进．

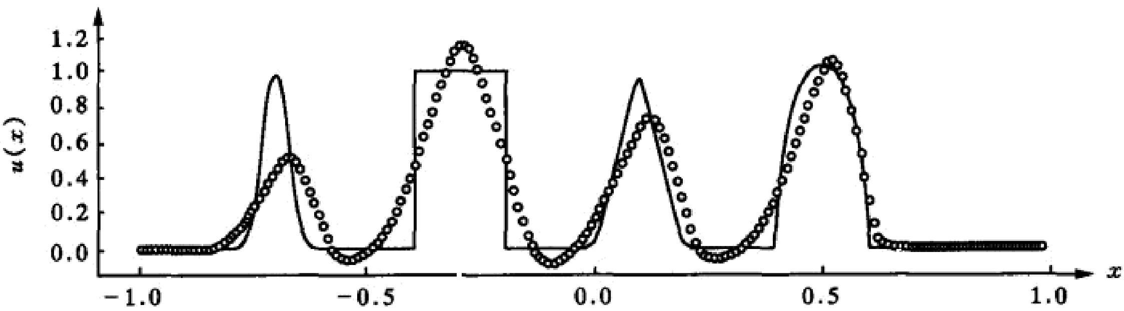
从上述简单介绍中可以看出，很明显，非稳态可压缩流动数值模拟的高阶求解 TVD 算法是一个重要的研究领域，其研究趋势是发展更高阶的算法来更好地捕捉强激波的分布．在下节中，作者将介绍另一种前沿的研究方法：在计算域为跟踪不断移动的激波前沿．这种方法与现行使用的固定网格条件下去捕获激波的方法不同．



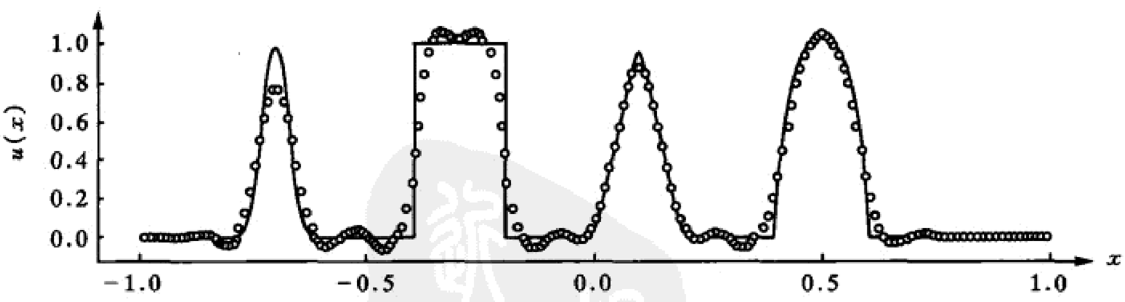
(a) MP 五阶算法



(b) WENO 五阶算法



(c) ENO 三阶算法



(d) 未过滤算法

图 8.2 Suresh 和 Huynh(1997)对非稳态一维对流方程的计算结果

8.2.2.2 适应性网格

对于强迁移的激波前沿，由于求解过程中解是连续变化的，因此可能需要采用动态适应性网格来求解存在于流动域内的随时间推进的强间断．最近，有很多适应性网格被论

及，如 Thompson 等(1999)和 Kallinderis(2000)等的文章．为更好地了解该领域中各种最新技术的应用，鼓励感兴趣的读者深入阅读相关文章．

r-网格重新细化(r-refinement)技术是适应性网格的成功技术之一．其基本思想是遵守某些适应性标准，设计一种算法，使原来非适应性网格随着计算域内求解的变化而重新分布，同时又保持求解域的统一性和数据结构．为实现适应性网格，可以采用已有的很多成功方法来重新分布节点或重构网格．然而，任何方法的成功都要依靠合适的用于引导网格位置的准则．Benson 和 McRae(1991)采用梯度算法来获得权函数，用各变量的局部梯度(曲率)来评估求解过程．我们考虑由 Ingram 等(1993)发展的二维多块动态适应算法(multi-block dynamic adaptive algorithm)来演示激波的移动．如图 8.3 所示，通过跟踪在求解过程中从右至左外部激波的演变并观察网格的方位、拓扑变化、单元体积等，可以发现网格是连续变化的．通过在激波前沿周围的密集网格，可以很好地捕获那些突然间断的部分．

h-网格重新细化(h-refinement)技术是另一种在文献中非常流行但很少用到非稳定流动问题的方法．这种用于二维三角形单元以及三维四面体单元的适应网格重构方法是由 Hassan 等(1999)提出的．该方法根据计算数据的变化插入或删除网格节点，从而改变单元体积和形状，因此，单元数量整体上会增加或减少．这确实是一项更普遍的技术，因为这种联系节点的算法同网格生成过程中改进网格分布或者为要达到某些预期网格条件的算法是一样的．一般而言，h-网格重建技术并不严格限定用于单一网格结构．这种灵活性使之允许采用结构化网格与非结构化网格的组合网格．动态适应性网格也能生成贴体的一系列网格层．

适应性网格在 CFD 应用中才刚刚开始，很多问题还未完全解决(McRae，2000)．首先，需要进一步研究单元形状/尺寸/方位等之间的关系，以图 8.3 所示的问题为例，要对 r-网格重构技术在结构化网格上、在邻近激波前沿的网格倾斜以及网格纵横比等进行重点研究．高倾斜单元会给数值计算带来严重问题，流动特性的激烈变化也可能导致求解过程的发散．其次，必须认识到，即使是最佳适用技术(权函数)，也不可能对所有求解部分提供相同精度的解．最近，Soni 等(2001)指出使用适应性权函数是"适应性网格生成的一个具有挑战性的领域"．第三，h-网格重构技术对非结构化三角/四面体网格特征的定义反映了该方法的求解能力，求解能力依据单元表面相对于解的方位，而该方位在局部可能完全是随机的．这对光滑区域没有任何问题，但当求解区域内解变化剧烈时，会给求解带来很大的困难．

8.2.3 移动网格

很多工程应用中使用了移动网格．在第 1 章中，以柴油内燃发动机内流动的模拟作为一个例子，其中，用变形的网格模拟活塞和气阀的运动，这样可以更好地观察汽缸内的流动特性．第 1 章中另一个重要例子是对旋转叶轮的模拟，旋转叶轮在气体搅拌器中很常

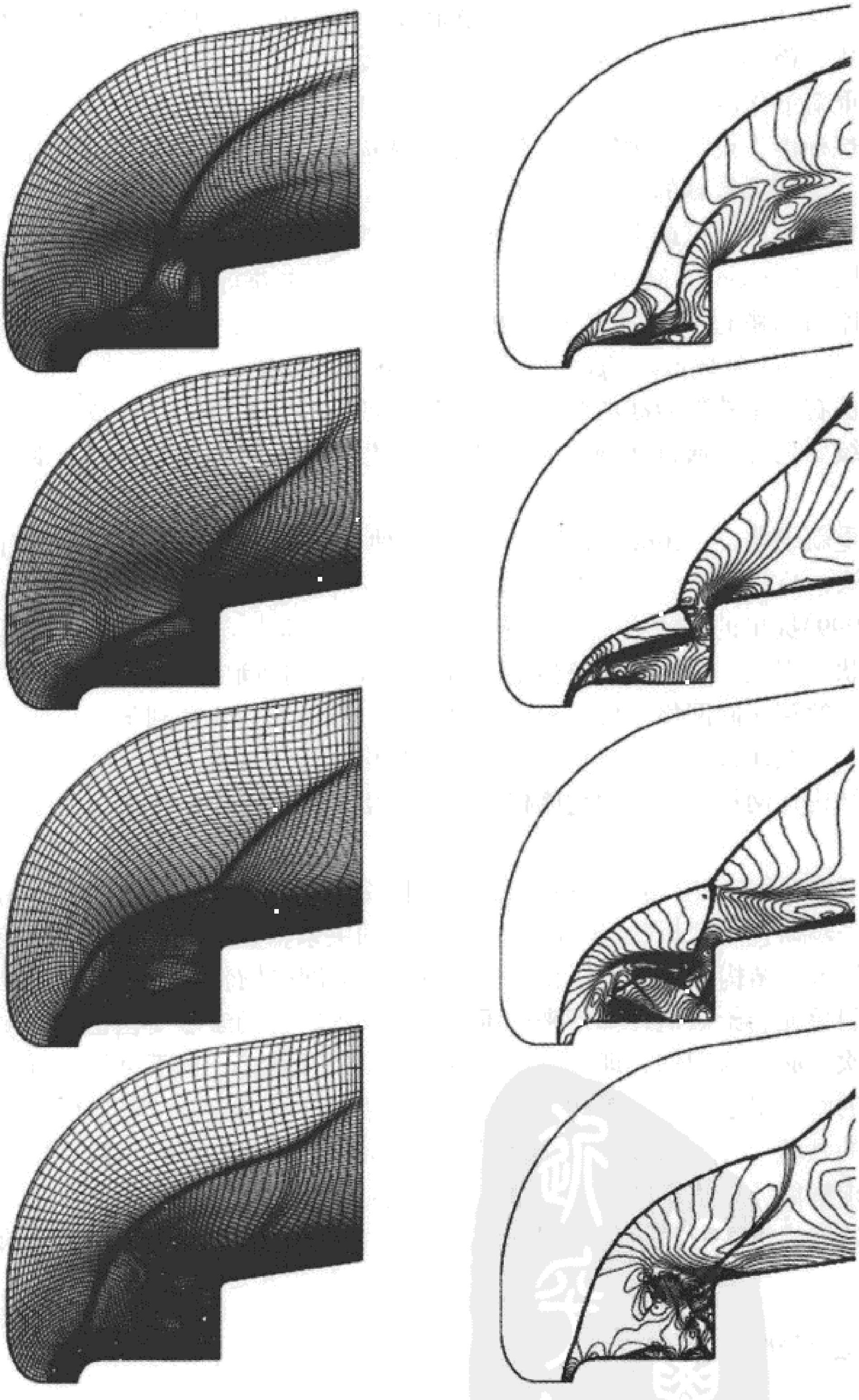


图 8.3 Ingram 等(1993)获得的基于 r-网格重新细化动态适应网格的网格和密度云图

见. 为求解该问题，网格的一部分被附着在叶轮上，可以自由运动，而包围叶轮的其他部分则保持静止. 值得注意的是，这种方法也可以应用到转子-定子相间作用的涡轮机当中. 正如 Lilek 等(1997a)以及 Demirdzic 等(1997b)指出的那样，移动网格允许附着在定子和转子上，两部分网格之间沿两者的分界面进行“滑动”而无须网格变形. 网格在交界面上无须匹配，这种网格灵活性允许在不同的计算域内使用不同种类型的网格和/或取得期望的效率. 这种方法除保证严格守恒有一些困难之外，从本质上来说对其应用没有限制. 最近，Farhat (2005)回顾了航空领域中预测流过柔性和/或移动变形物体流动的 CFD 应用. 主要的应用集中在计算非线性空气弹性变形方面，包括局部接近声速效应、限定循环(limit-cycle) 振荡、高迎风角飞行条件以及振动等问题. 尽管湍流模型在建模和离散、动态网格的壁面定律(Koobus 等，2000)以及运动机翼周围被旋涡所主导的宽范围马赫数流动的数值模拟(Kandil 和 Chang，1988)等方面取得了成就，但 Farhat(2005)指出，目前移动网格的成功应用绝大部分还集中在复杂形状的无黏流动情形，对于黏性流动仅限于简单形状. 为弥补移动网格的这一不足，作者同意 Farhat 的观点，需要进一步完善 CFD 移动网格算法的鲁棒性(robustness)，并与自动局部网格重构技术相结合.

上述讨论的所有问题当中，计算域的移动是通过外部效应被预先确定的. 对于另一种流动问题，如自由表面流动，由于网格随边界运动，因此计算域的运动必须当做求解过程中的一部分加以计算. 在大多数情况下，自由表面分界面是液体和气体之间的边界，如海洋从周围大气中分离出来；或者是液体与水之间的边界，如水冷冻成冰. 对于这样的问题，处理交界面运动时数值算法的效率和稳定性是重要的课题. 因为交界面上的每一个网格节点都随时间不断变动，表面网格可能会因为网格的不均匀分布和无约束运动而更加不规则. 为保证数值计算的整体性以及求解的稳定性，需要用保留交界面曲率变化信息的网格生成算法重新分布网格节点. 下面以 Yeoh 等 (1990)对立体容器内三维自然对流和水结冰的数值研究为例进行讨论.

图 8.4 显示了不同时刻水和冰变形的计算域. 水中出现自然对流，并在其作用下，冰-水界面发生明显变形. 从图 8.5 中可见，出现了两个明显的逆时针冷水流动区域，其原因在于水在 4℃时其密度达到最大. 正如预料的那样，在该温度附近，冷水的逆流明显影响到冰水界面的变化. 模拟这样的流动问题通常需要非常小的时间步长来向前移动冰水交界面，并且需要在每一时间步长内，在不同的计算域中采用贴体网格来生成新网格. 这些步骤对计算过程中的简捷性、鲁棒性以及计算成本都会产生不利影响. Tezduyar(2001)指出，求解包含大的网格移动问题时，其计算效率明显下降. 因此，仍然需要发展更好的方法以便更好地处理带有移动界面或移动边界的流动问题.

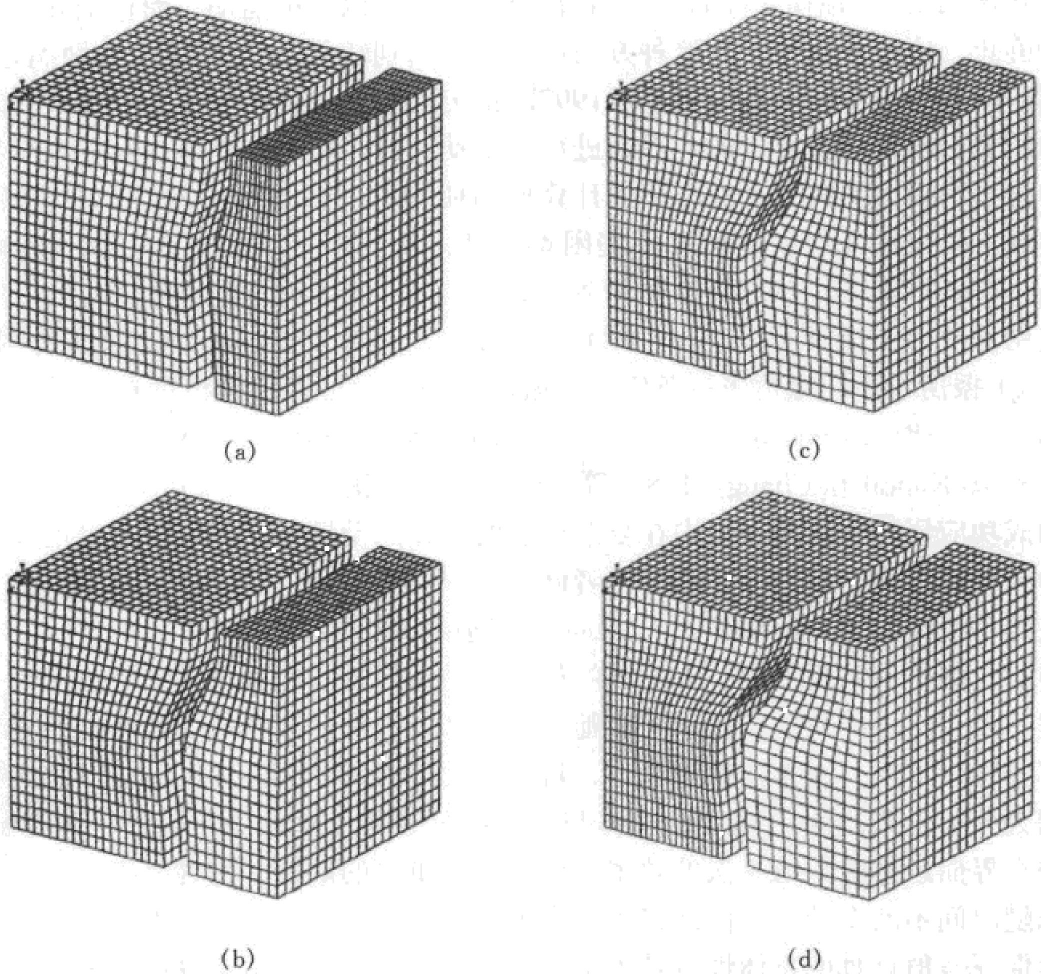


图 8.4 Yeoh 等(1990)对不同时刻水(左侧)、冰(右侧)变形域的网格划分结果

(a) 12.7min; (b) 25.5min; (c) 38.2min; (d) 54.1min

8.2.4 多重网格

在第 4 章中，讨论了采用多重网格加速大型非线性代数方程组迭代过程收敛的问题. 同时在第 5 章中，又介绍了通过 5 重网格的 V 型循环高效求解该方程组最简单的求解策略. 但这并不意味着对其进行了全面的描述，作者主要是想让读者对该方法有个基本的了解. 然而，考虑到该方法在现代 CFD 中的重要性，本节对该方法的基本思想作进一步的探讨.

在 V 型循环中，开始的计算是在精细网格上进行的，所得结果逐渐向下面一系列粗糙网格传递，在最粗糙网格上得到结果后再向上传递回到精细网格. 这一过程被不断重复，直到获得满意的收敛结果. 从数学上来说，多重网格方法的优点是在整个流场上强化了数值计算误差的衰减. 误差的整个频谱会在数值求解的过程中在整个流场中进行传播. 对于离散网格增量 Δ_m，高频误差(high frequency errors)可以用最小值 $\lambda_{min} = 2\Delta_m$ 表示.

大多数迭代方法，如 Jacobi 和 Gauss-Siedel 迭代(见第 4 章)，经过数次迭代就能有效去除高频误差. 在固定网格上迭代收敛速度减慢的原因是因为低频误差不易消除. 然而让我们设想一下在精细网格上进行数次迭代之后，将计算结果传递给粗糙网格. 此时，高频误差基本消失或隐藏在粗糙网格之中，由于粗网格采用大的 Δ_m，则求解过程的误差便以比精细网格更高的速率衰减. 因此，中间结果不断地输送到更粗糙的网格，低频误差得到大量衰减，当这些结果返回到精细网格时，低频误差与只在精细网格上进行相同数量的迭代次数得到的值相比已经小得多了.

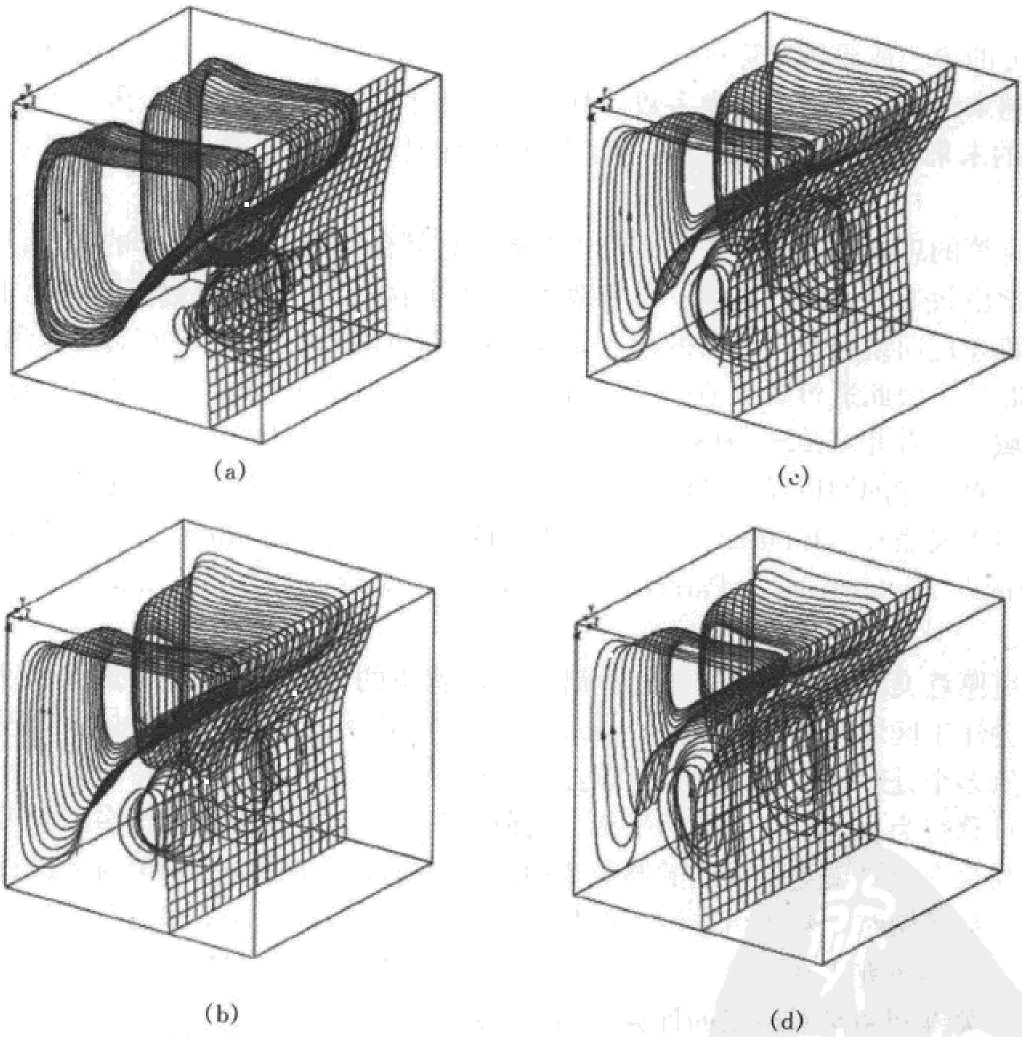


图 8.5 Yeoh 等(1990)对一定容积内不同时刻交界面位置和例子迹线的三维立体图

(a) 12.7min; (b) 25.5min; (c) 38.2min; (d) 54.1min

从上面的分析可见，对于给定的流动区域，多重网格方法与其说是一种特殊的求解代数方程组的方法，倒不如说是一种求解策略. 最近，正在进行的研究仍然致力于优化求解过程，特别是要改进每一网格层上求解代数方程的数值方法. 在设计“最优”多重网格

策略的过程中仍然存在很多挑战，比如在精细网格上如何更方便地确定先进的迭代方法或对先进迭代方法之间进行恰当的组合，是采用直接方法获得粗糙网格上的结果还是采用不同的循环策略，是采用V型循环与W型循环的组合还是采用全多重网格-F循环等. 此外，人们还致力于将多重网格方法拓展到并行计算当中，以获得比传统单机或双处理器计算更快的运算速度. 这一研究领域的最新发展趋势和进展参见 Mavriplis(1988)、Wesselling(1995)、Timmermann(2000)、Thomas 等(2003)等文献.

8.2.5 并行计算

大部分的单一或双核计算机(PC机或工作站)中，中央处理器(CPUs)运算速度越来越快，结构越来越紧凑. 现在，大多数计算机芯片的运行速度已经接近极限. 考虑到高性能CFD计算的未来发展趋势，要想获得运算速度上的任何重大进展，最终却要采用并行计算.

并行计算的思想是基于计算机系统中对多个计算任务同时进行运算的构想. 商业并行计算机通常由数千个处理器组成，具有数十亿的内存，计算能力以数百万甚至上十亿计. 并行计算机超过向量超级计算机的优点是规模可扩性(scalability). 并行计算机通常兼容标准计算机芯片，因此造价要便宜一些. 并行计算，特别是在CFD中，是一个宽广的研究和开发领域. 作者并不给出并行机的构造、分类以及程序设计的细节，那将超出本书所涉及的范围. 对上述问题以及CFD中采用并行计算产生的问题进行深入的学习，感兴趣的读者可以参考发表在《International Journal of High Speed Computing》、《The Journal of Supercomputing》或《Journal of Parallel Programming》等杂志上的文章以及 Simon (1992)所著的书籍.

作者更愿意突出那些仍然需要充分研究才能解决的课题. 为了有效地利用并行计算，我们首先关注于区域分解(domain decomposition)和负荷平衡(load balancing)问题. 区域分解定义为给多个处理器划分数据和计算任务. 区域分解的主要目的是在所有的处理器上保持统一的计算行为，即所谓的负荷平衡. 负荷平衡看起来很简单，但很多因素可能使之变得复杂. 如包含化学反应率源项的燃烧流动，当静态温度超过某一阈值时才进行计算. 另一个例子是粒子跟踪，粒子可能沉积在某个特定的子区域内. 这些都给并行计算带来了严峻的挑战，对其研究正在进行中.

另一个关键问题是对特定的计算机结构，随着处理器的大量增加，带来了计算机平行规模与计算性能间的冲突. 因而出现了一个重要的问题：计算效率与处理器数量的依存关系. 一般说来，并行计算的性能可能受处理器指令、处理器之间的通讯以及同步时间(即处理器在程序并行部分运行之后到达某一共同点所需要的时间)等的影响. 还有就是可移植性(portability)问题，人们正致力于开发并行计算机程序的标准环境. 近年来，从标准计算机语言 FORTRAN 发展到高性能 FORTRAN(High Performance FORTRAN, HPF)(Forum, 1993; Koebel 等, 1994)，基于网络的不同类型的并行计算环境，如并行虚拟机

(Parallel Virtual Machine, PVM) (Sunderam 等, 1990; Mattson, 1995)以及标准信息通行界面(message-passing interface, MPI)(Forum, 1994)等，已经投入使用，扩展了并行计算的能力和适用性.

当前，很多 CFD 研究者可能已经认识到并行计算仍然存在如下一些问题：

① 在很多情况下，缺乏比常规的串行(向量)计算机明显的优越性；

② 难以有效编程；

③ 极度缺乏可移植性.

现在出现的这些问题可能在不久的将来会较好地得到解决. 现代并行计算机的计算速度也很有可能达到或超过最大型的多处理器 Cray 超级计算机. 当前，航空工业率先应用了并行计算进行实际分析和设计. 随着并行计算机的发展对实际应用产生的更大吸引力，更好地解决了更为复杂的实际流体流动问题，其他工程领域最终将逐步跟随航空工业的脚步使用并行计算.

8.2.6 浸入边界方法

为模拟心脏工作机理以及相关的血液流动，Peskin(1972)首次引入了浸入边界方法(Immersed boundary methods). 该方法的特点是可以在固定的直角坐标系下进行任何模拟计算. 它是一种在流动上直接施加浸入边界的新颖方法，这样就可以避免心脏复杂几何形状对网格的苛刻要求. 自从该方法诞生以来，人们已经提出了许多修正与改进，并确立了相当数量的演变方法.

流体流过固体实体的示意图如图 8.6(a)所示. 传统的方法是依据特定的物体形状采用结构化或非结构化网格. 这种方法首先定义覆盖边界 Γ_b 的表面网格，然后生成包围流体 Ω_f 和固体 Ω_s 占据区域的内部网格. 对于有限差分方法，将偏微分控制方程转化为与网格相一致的曲线坐标系，然后控制方程在计算域中可以相对容易地进行离散和求解. 对于采用结构化网格的有限体积法，控制方程的积分形式被离散，网格的几何信息直接合并在离散方程之中. 如果采用非结构化网格，不论是有限体积法还是有限元法，都可以将所有相关的局部单元几何信息合并到离散方程中. 这两种方法无须进行网格坐标转化.

另一方面，让我们考查图 8.6(b)中所示的非规则(non-conformal)实体的直角网格. 在此，浸入边界仍然用覆盖边界 Γ_b 的表面网格来表示，但直角网格的生成与该表面网格无关. 因此，固体实体穿过直角网格体积. 由于网格与固体边界不一致，因此，接下来的任务就是在临近固体边界处修正控制方程形成合适的边界条件. 由此，控制方程可以采用任何技术，无论是有限差分法、有限体积法还是有限元法进行离散，而无须进行坐标变换或复杂离散算子. 这是浸入边界方法的实质.

当然，在浸入边界方法中，施加适当的边界条件并不是一件容易的事情. Mittal 和 Iacccarino(2005)指出，可以对控制方程中的源项(或力函数)进行修正，重新产生新的边界. 有两种方法可以提供浸入边界上的边界条件. 第一种方法被称为连续力方法(the

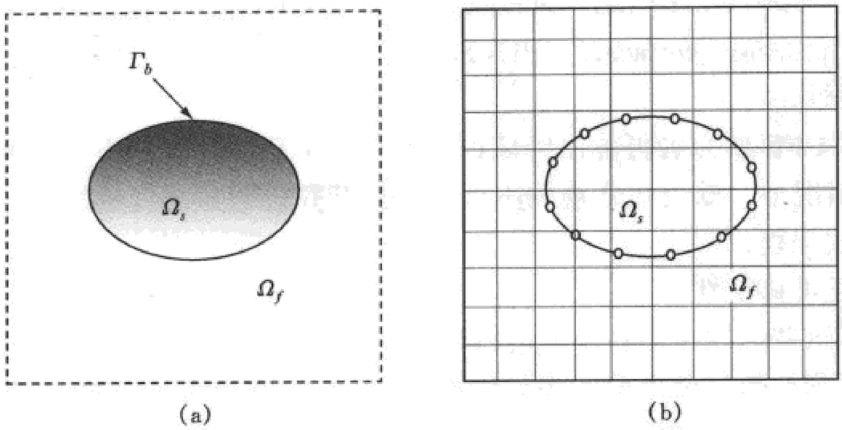
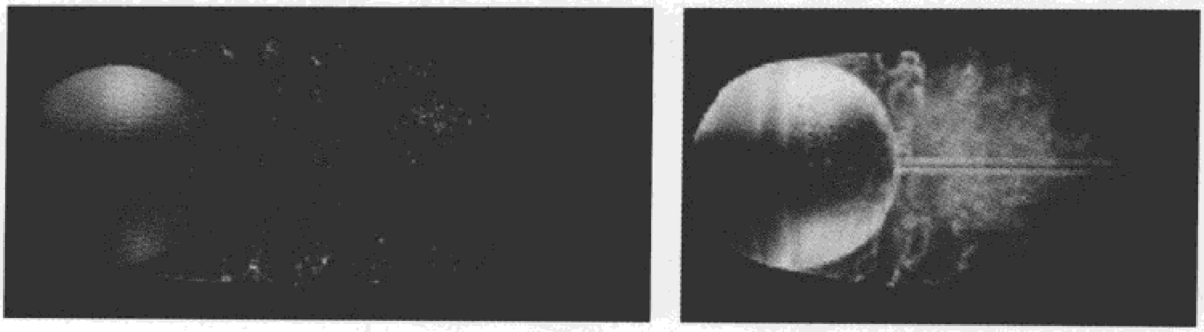


图 8.6 (a) 显示流体流经一般物体的示意图(固体体积为 Ω_s，其边界为 Γ_b；流体体积用 Ω_f 表示)；(b) 控制方程在直角网格上被离散的浸入实体示意图

continuous forcing approach)，在整个计算区域内，将力函数加入到离散前的连续方程之中；第二种方法被称为离散力方法(the discrete forcing approach)，力在方程离散后才引入到离散方程中．连续力方法对弹性边界流动浸入边界非常有吸引力．对于这种流动，该方法有可靠的物理基础并且实施起来非常简单．生物学中存在大量的弹性边界，已经获得了很多成功的应用，如精子的运动(Fauci 和 McDonald，1994)以及多相流动(Unverdi 和 Tryggvason，1992)等，都证明了这种方法的可行性．对于离散力方法，虽然不如连续力方法实用，但是能够很好地表述高雷诺数流动的浸入边界．该方法还可以直接控制数值解的精度、稳定性以及离散守恒性．这种方法已经成功地用于可压缩流动流过圆柱形表面以及飞机翼面(Ghias 等，2004)、肋片样粗糙曲折通道(Iaccarino 等，2003)、扑翼片(flapping foils)(Mittal 等，2002)以及自由落入流体中的物体(Mittal 等，2004)的流动模拟．很明显，选择采用连续力方法还是离散力方法取决于具体的流体流动过程．关于这两种方法的数学基础和数值分析的更多细节，可参考 Mittal 和 Iacccarino(2005)的文章．

为了说明浸入边界方法的应用，图 8.7 中显示了靠近圆球后面流动尾迹的流动结构．由 Yun 等(2006)进行的数值模拟结果与实验流动图片进行了对比．结果显示，大涡模拟与实验结果有很好的一致性，从而确认了浸入边界方法的有效性．

浸入边界方法正在快速普及．上文仅仅引用了几个算例，甚至还只能算是对该方法应用的肤浅描述．随着计算精度和效率的不断改进，各种创新方法，如浸入边界方法中适应性网格(Roma 等，1999)等的不断发展，可以预见，浸入边界方法将在新的复杂湍流流动、流-固耦合及多材料和多物性模拟领域，以及诸如生物和多相流动等业已很好描述的领域中得到更多的应用．



(a) (b)

图 8.7 Yun 等(2006)给出的靠近圆球后面流动尾迹的流动结构

(a) $Re=10^4$ 时的浸入边界模拟结果；(b) $Re=1.5\times10^4$ 时的实验照片

8.3 最新计算模型

8.3.1 直接数值模拟(DNS)

流体的湍流是一种非线性现象，空间和时间尺度的频谱很宽. 已经发展和应用的诸多湍流模型已经表明对湍流流动的模拟是一件困难的事情. 经过数十年的不懈探索，其中的一些模型已经成为很多实际设计和分析的工具. 直接模拟是一个活跃的重要的研究领域，最近，随着计算机性能的提高，对湍流流动的模拟又重新回到湍流的直接模拟上来，以满足不断增加的对真实反映湍流流动(复杂性和雷诺数)的需要.

第 6 章中描述了直接数值模拟(DNS)相关的计算方法，对应用实例中所有相关空间和时间尺度都有足够精细的求解. 有效的模拟必须适于所有的流动尺度，包括黏性所引起的最小流动尺度. 这意味着捕捉湍流流动中所有的动能耗散是非常重要的. 最小尺寸范围的估计可从称为 Kolmogorov 微小尺度(Kolmogorov microscales)中得到. 假设微尺度长度 η 只依赖于速度 v 和湍动能耗散率 ϵ，由量纲分析，可得

$$\eta=\left(\frac{v^3}{\epsilon}\right)^{1/4}. \tag{8.11}$$

如果问题的积分长度和速度尺度分别为 L 和 u，且我们按同样方式进一步假设湍流耗散尺度和湍流产生尺度一样为 u^3/L，根据 Tennekes、Lumley(1976)的结果，有如下关系式：

$$\frac{L}{\eta}=Re_L^{3/4}. \tag{8.12}$$

式中，$Re_L=uL/v$ 是基于速度脉动大小和积分长度的雷诺数.

当雷诺数增加时，湍流中最大和最小长度尺度之间的差别会增加，因此，求解湍流流

动的网格节点数目随 $Re_L^{9/4}$ 增加. 如果还考虑时间步长约束，计算时间将与雷诺数的立方成正比. 可见，具有高雷诺数的湍流流动无法进行直接模拟. 然而，湍流中的某些现象，如自由剪切层速率、近壁面行为等，在高雷诺数范围内存在渐近性质，因此，仍然可以在“相当高”的雷诺数范围内进行数值模拟，捕捉这些现象以便提高对流动现象的了解，并用于计算模型的改进.

在此讨论一些与 DNS 模拟有关的数值问题. 典型 DNS 模拟中的关键问题是流动域内的网格精细度. 包括高阶导数等需要统计数据的应用中，将比其他应用需要更密的网格. 对网格细划的研究表明：DNS 计算中存在一些重要规则. 使用者可以采用的一个重要规则是网格至壁面的距离可以为 5η 量级，该尺寸对大多数平均流动、湍流的二次瞬时流动以及动能传递方程中所有项的预测都是充分的. 为支持另一重要规则，以自由剪切层流动计算为例，可以期望 DNS 计算过程中能够获得很好的二次瞬时湍流统计结果.

DNS 要考虑的另一个问题是采用合适的数值方法，在很宽的时间和长度频谱范围内获得符合实际流动的准确解. DNS 通常需要一个精确的时间历程. 由于采用的时间步长较小，严格的 CFL 条件可以满足，显式方法一般是稳定的，因此大多数直接模拟采用显式推进而不是隐式方法. 当然，还要特别注意在接近壁面处采用非常精细的网格来捕捉小范围内的流动结构，这一区域内的黏性项如用显式可能不稳定，在瞬时计算中可以通过以隐式的方法来处理这些黏性项，从而克服不稳定的问题. 时间推进方法最常用的是二阶 Adams-Bashforth 方法和三阶或四阶 Runge Kutta 方法. 读者可以参考 Rai 和 Moin(1991) 应用这些方法对管道中的湍流流动进行的直接模拟，以加深对使用这些方法的了解. 实际上，Runge Kutta 方法在相同计算精度下允许大的时间步长，因此该方法可以减少一定的计算量. 在显式推进中，Crank-Nicolson 隐式方法(见附录 C)常用来处理黏性项以确保计算的稳定性.

DNS 也需要适当的离散方法. DNS 流行的离散方法无疑是谱方法(spectral method). 然而，为了有效地处理离散问题，该方法对几何形状和网格类型有一定的限制. 对于通常采用的有限差分法或有限体积法，必须重申空间差分能量守恒的重要性. 在很多雷诺平均 Navier-Stokes(RANS)计算中，通常推荐采用迎风差分格式，因为引入的耗散有稳定数值计算的趋向并限定求解的范围. 然而，当这些方法用于 DNS 时，由于数值方法产生的耗散常常比物理黏性产生的耗散大很多，导致计算结果与求解问题的流动物理特性之间相距甚远. 为克服这种伪扩散(false diffusion)问题，在很多 DNS 模拟中采用无扩散(diffusion-free)中心差分格式，采用的精度在二阶到四阶之间. 然而，Rai 和 Moin(1991)发现，五阶偏迎风格式(upwind-biased scheme)产生的一阶和二阶统计结果与实验数据吻合得很好. 这表明，如果网格足够精细，高阶精度偏迎风格式是复杂形状湍流直接模拟的一种较佳候选方法. 当然，如果流动域内的网格不够精细，伪扩散问题可能还会出现.

通常，在 DNS 中，流动区域的初始条件和边界条件的设置可能也是一件困难的事情. RANS 计算中只需要平均条件，与之相比，DNS 必须获得三维速度场的所有细节信息，

包括每一时间步长上湍流流入平面(或表面)上完整的来流速度场. 由于初始条件和边界条件的存储可能需要相当长的时间，因此会对后面的流动计算产生严重的影响. 在 RANS 中可以应用的一些边界条件，如对称边界条件，并不能直接应用于 DNS 之中. 对于流出条件，边界条件设置必须严格防止边界上压力波返回到计算域内部. 除了尽最大努力将初始条件和边界条件描述成真实条件外，DNS 模拟还必须经历一定的时间使流动充分发展符合其正确的物理流动特性. 确定流动是否充分发展的最好方法是监视某些流动参量的变化. 流动参量的选择依模拟的流动不同而不同. 一开始参量可能显示出整体减少或增加的趋势，但当流动充分发展后，参量值随时间的变化应显示出统计平均量不变的特性. 在这一阶段，可以对结果进行统计平均(如平均速度及其波动).

最近，DNS 有了更多的应用，如旁路转类(by-pass transition)方法对平板边界层中由穿越的尾迹而激发的湍流斑或旋涡结构确认进行的模拟(Geurts，2001). 读者应认识到这种模拟通常需要进行数百小时的计算才能获得要求的解. 毫不奇怪，计算机的运算速度和内存限制了所能采用网格节点的数目. 当然，随着计算机运算速度的加快和内存的增加，可以求解更复杂和更高雷诺数的流动问题. DNS 可以精确地提供流动的细节信息，覆盖了宽范围的长度尺度和时间尺度的大量信息，可以用于更好地了解流动的物理特性，如湍流产生的机制、能量传递以及湍流流动中的耗散或者可压缩性对湍流的影响. 通过 DNS 对流动物理特性有意义的观察，往往能够更好地认识那些不可能通过实验测得的现象.

8.3.2 大涡模拟(LES)

大涡模拟(LES)是直接求解大尺度涡运动的一种模拟方法，而对小尺度涡的运动则采用近似，这在第 6 章中已作过简单介绍. LES 方法建立于 20 世纪 60 年代，源于对大气流动的预测，随着计算机规模和性能的提高，与 DNS 一样，大涡模拟已经成为一种重要的模拟计算方法.

如前所述，LES 需要描述仅由大尺度涡构成的流场. 大涡流场可以通过过滤程序获得. 通过局部过滤函数(Gaussian 或 top-hat 过滤函数)去除小尺度涡，只保留并求解大尺度场或者能够精确求解的其他尺度涡. 然后将瞬时流动变量分解为经过过滤的部分(整个流场的局部平均)和亚网格尺度(subgrid scale，SGS)部分(没有被过滤器宽度滤掉的尺度). 在有限体积法中，将过滤器宽度定义为网格体积的平均值是合理和自然的事情. 粗略地讲，大于过滤器宽度的流动涡即为“大涡”，而小于过滤器宽度的就为需要建模的“小涡”. 当对不可压缩 Navier-Stokes 方程进行过滤时，就可以得到与第 3 章中 RANS 动量和能量方程相似的一系列方程. 与 RANS 相似，在方程中必须引入代表亚格子模型近似的附加项. 在 LES 中，附加项为亚网格尺度的湍流应力和热流量，需要用亚网格尺度(SGS)模型来封闭方程组. 最常用的亚网格尺度模型是由 Smagorinsky (1963)提出的. 因为该模型是通过涡黏假设来描述的，因此与通过 RANS 方法获得的 Reynolds 应力有很多相似之处. 亚格子尺度湍流应力模型为

$$\tau_{ij}-\frac{\delta_{ij}}{3}\tau_{kk}=-2v_T^{\mathrm{SGS}}\bar{S}_{ij},\qquad \bar{S}_{ij}=\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}. \tag{8.13}$$

式中，v_T^{SGS} 为亚网格尺度运动黏度；$\bar{S}_{ij}$ 为大尺度场或被准确求解尺度的应变．亚网格尺度涡黏 μ_T^{SGS} 关系式 $v_T^{\mathrm{SGS}}=\mu_T^{\mathrm{SGS}}/\rho$ 源于有量纲变量，并由下式给出：

$$\mu_T^{\mathrm{SGS}}=C_s^2\rho\Delta^2|\bar{S}_{ij}|,\quad |\bar{S}_{ij}|=\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}. \tag{8.14}$$

式中，Δ 为网格过滤器的宽度；C_s 为模型常数，根据流体流动问题的不同，C_s 在 0.065 ～0.3 范围内变化．

LES 和 RANS 方法对湍流黏度采用不同的评估方式．方程(8.14)中，LES 从过滤后的速度场中直接确定湍流黏度．然而，参见第 3 章中方程(3.42)，RANS 需要通过湍流动能 k 以及其耗散率 ε 这两个附加的新变量来评估湍流黏度．在过去的十年中，除 Smagorinsky 模型之外，其他一些基本的亚网格黏度模型，如 Métais Lesieur (1992)提出的结构函数(Structure Function)模型、Sagaut(2004)提出的混合尺度(Mixed Scale)模型(与被求解尺度涡有 3 倍的关系)等也被提出来了．读者应该认识到所有这些模型都假定流动为湍流、充分发展和各向同性，任何偏离这些假定所产生的信息都不予考虑．为获得模型对非均匀流动的自适应，工程流动的模拟更可能建立在不断变化的模型方程上，这将在下面进行简单的讨论．

Germano 等(1991)首先发展的变动模型是一种自适应设计的 SGS 模型．以后所有的发展基本上都是使用了 Germano 恒等式(Germano identity[①])(Germano 等，1991)：

$$\tilde{L}_{ij}=\overline{\bar{u}_i\bar{u}_j}-\tilde{\bar{u}}_i\tilde{\bar{u}}_j=\tau_{ij}^T-\tilde{\tau}_{ij}. \tag{8.15}$$

式中，($\tilde{\ }$)代表二次过滤操作，称为“试验”过滤器，比()及$()^T$(用试验过滤的速度来计算的量)具有更大的过滤宽度．该变化过程可以用于任何亚网格模型．令 L_{ij} 与 $C_s^2M_{ij}$ 相等，其中 M_{ij} 由下式给出：

$$M_{ij}=-2(\tilde{\Delta}^2|\bar{S}_{ij}|\bar{S}_{ij}-\tilde{\Delta}^2|\bar{S}_{ij}|\bar{S}_{ij}). \tag{8.16}$$

式中，$\tilde{\Delta}$ 为实验过滤器宽度与 Lilly(1992)方法的结合；模型常数 C_s 可以通过误差项 $L_{ij}-C_s^2M_{ij}$ 平方的最小化来获得，即

$$C_s^2=\frac{\langle L_{ij}M_{ij}\rangle}{\langle M_{ij}M_{ij}\rangle}. \tag{8.17}$$

上述表述过程是变动 Smagorinsky 模型的基本方程．依据相似的思想，其他动力学模型，如 Zang 等(1993)以及 Shah 和 Ferziger(1995)发展的混合 Smagorinsky 尺度相似模型、Meneveau 等(1996)的 Lagrangian 变动模型，它们的使用已经相当成功，并且拓宽了 LES 的应用．

① 经典力学中也被称为 Leibniz 恒等式．

LES 需要的数值模型和边界条件基本上同 DNS 中使用的模型和边界条件一样. 因为变动 Smagorinsky 模型在接近固体壁面处可以自动减小模型常数来修正流动行为, 因此非常适用于对包含近壁流域流动的描述. 然而在某些湍流流动问题中, 采用原始 Smagorinsky 模型或其他基于 SGS 模型, 对近壁流动也可能采用 RANS 建模中的壁面函数. Driest (1956)壁面阻尼函数可以根据距离壁面的垂直距离来减小近壁的涡黏, 该方法已经被证明是成功的. Piomelli 等(1987)提出的公式是 Driest 壁面阻尼函数的一种变形, 也可以用于抑制近壁涡黏. 这两种模型都已被用于商业软件 ANSYS-CFX 之中. 基于 Yakhot 和 Orszag(1986)提出的重正规化群(renormalization group)(RNG)理论, 涡黏将根据亚网格尺度雷诺数而减小. 这种方法被商业软件 ANSYS-FLUENT 采用. 壁面函数在 LES 中的使用表明, 对解决附着流动问题(attached flow problems)已经做得相当充分了(Piomelli 等, 1989).

像 DNS 一样, 大多数模拟真实流动的 LES 方法仍然非常耗费计算时间. 由于计算时间的限制, 绝大多数 LES 算法中可能普遍存在着网格精细程度不足的问题, 因此不能捕捉到高频波数下某些重要的动力学特性. 这些高频波既没有被过滤掉也没有被模化. 同时, 数值截断误差开始影响到 SGS 模型, 因而可能失去原始的物理特性. 最近, SGS 模型中直接用数值截断误差取代上述显式模型方法以克服某些缺点. 该模型被称为单调积分大涡模拟(monotone integrated large eddy simulation, MILES). 该方法能否成功的关键是如何构建合适的数值方法来描述 SGS 模型. 最近的研究显示, 采用高分辨率激波捕获方法(high-resolution shock-capturing)(见 8.2.2.1 节)是可行的. 此处, 作者不再介绍 MILES 典型算法, 因为那将超出本书介绍的知识背景, 感兴趣的读者可参看文献 Garnier 等(1999), Sagaut(2004)以及 Hahn、Drikakis(2005)等, 以便对 MILES 的理论背景有更深入的理解及其在湍流流动模拟中的具体应用.

8.3.3 湍流流动的 RANS-LES 耦合

RANS-LES 耦合方法是因求解高雷诺数流动的迫切需要而产生的, 特别是对壁面约束流动, 近壁面需要非常精细的网格, 不宜采用全 LES 模拟. 在近壁区域内, 对黏性以及包含高速涌入、低速喷出(常称为波纹过程, streak process)的缓冲(buffer)亚层的近壁面湍流结构的精细求解是至关重要的. 在低雷诺数至中雷诺数时, 波纹过程是产生湍流流动的主因, 必须给 LES 提供全部流动结构才能获得对该现象的准确描述. 对工程中感兴趣的高雷诺数壁面约束流动, 如钝体(bluff bodies)绕流, 精确 LES 要求的计算资源可能十分巨大以至于不可能满足. 由于 RANS 湍流模型对近壁面预测已经投入了大量工作, 因此可以用 RANS 模型来代替全面精确的 LES 对近壁面流动进行预测, 以较小的计算成本来捕获近壁面湍流结构. 然而, 我们知道, RANS 方法无法计算远离壁面的湍流脉动频谱, 而 LES 有显式截断频率, 可以选择描述湍流脉动的精确程度, 因此不必进行非常精细网格的求解就可以获得精确的结果. 所以, 理想的方法是将两者结合起来使用, 在近壁

面的少量内流(非稳定 RANS)区域采用 RANS 方法来处理，而在占主体的外流区域中用 LES 求解. 在 LES 计算区域中，网格大小主要依据求解最大湍流尺度的需要，而不必依据近壁面湍流过程.

可以通过许多不同的方法处理湍流流动的 RANS-LES 耦合. 前面章节中描述的使用 LES 分析附着流动(attached flow)的问题中，采用了减少计算成本的壁面律函数，这在某种意义上即是 RANS 和 LES 的联合. 然而，在处理复杂的几何形状时，应用壁面函数模拟分离流动时会出现严重的问题，也缺乏普适性. 在植入近壁面网格(embedded near-wall mesh)内，作为 RANS-LES 组合，采用简化 RANS 模型(即混合长度型 RANS)求解湍流边界层方程(Balaras，1996；Wang 和 Moin，2002)，甚至采用全 RANS 模型，都可以用来解决壁面函数问题. 最近，Labourasse 和 Saqaut(2004)回顾了最早由 Morris 及其同事(1997，1998)提出的非线性扰动方程(Non-Linear Disturbance Equations，NLDE)方法，该方法是另一项 RANS-LES 耦合技术，可以处理一定复杂程度的流动问题. 同 RANS-LES 耦合相似，通过 RANS 模型求解近壁面流动场，通过 LES 求解远离壁面的非定常主流场的能量和动力学，并应用附加亚网格模型处理未被精细求解的感兴趣区域内的脉动. 在本节的最后，作者将集中介绍 RANS-LES 组合模型的基本概念和优点.

RANS-LES 组合模型可以分为两类. 第一类是将物理空间进行区域分解，计算域被分成若干子域. 其中一些子域用 RANS 方法计算，其他子域则用 LES 计算. 在非稳态 RANS 区域内，可以采用两方程模型，可以是标准 k-ε 模型、k-ω 模型或其他湍流模型. Davidson 和 Peng(2003)在近壁面流动场中应用了 k-ω 模型，并通过预先设定的转换平面(switching plane)实现计算域之间的过渡. 过渡平面或交界面的位置可由多种方法确定. 可以通过比较 RANS 与 LES，选择使用调配函数(blending function)(变化剧烈或平缓)(Davidson 和 Peng，2003；Temmerman 等，2005)、从湍流/物理条件的计算可得到的非定常湍流尺度(Tucker 和 Davidson，2004)或求解不同的偏微分方程等方法自动确定交界面的位置(Tucker，2003). 尽管 RANS-LES 组合模型在某些特定应用实例中取得了很好的结果，然而，对 RANS 和 LES 计算区域交界面的适当处理是模型成功的关键，这是一个活跃的研究领域. 第二类是在没有事先确定转换平面的情况下进行组合计算. 这种模型优于第一类模型. 然而，在这种模型中可能需要对 RANS 使用亚网格模型，这就限制了该方法的使用. 与 NLDE 相似，在整个计算域内都采用相同的数值计算格式，振荡等不稳定状态可能出现在 RANS 区域内(这是该方法的主要缺点)，因此，第二类模型并不明显优于第一类模型. Speziale 的特别大涡模拟(very large eddy simulation，VLES)(1998)、分离涡模拟(detached eddy simulation，DES)(Spalart 等，1997) 以及重正规化群方法(Langhe 等，2005a，2005b)都是这些模型的例子.

RANS-LES 耦合是求解分离流动问题的极好选择，可以从 Strelets (2001)、Squires 和 Constantinescu(2003) 对流体流过球体或圆柱、NACA 0012 机翼、后向台阶以及飞机起落架等的成功应用实例中看到这一点. 对于流经周期性山丘的流动，只需 LES 1/20 的网格

节点数就能对总能量和平均速度分布进行很好的预测．一般说来，RANS-LES 组合的网格密度与 RANS 中使用的网格密度相当，但在相同的粗糙网格条件下，可以获得好于 LES 的结果．该方法对非定常流动中的能量预测也要好于全 RANS 模拟．当前，对这种方法的主要研究课题是湍流的合成．感兴趣的读者可以参考 Batten 等（2004）的研究，可以更好地理解这一方法对湍流方程封闭的要求．

8.3.4 多相流

在第 7 章中，我们通过简单和复杂的几何形状，如 90°弯管和人类呼吸系统内的气体-粒子流动来说明 CFD 是如何提高对物理过程理解的．实际上，很多其他工程应用中也常包括多相流动，如液体中的气泡或气体中的液滴、流化床燃烧、燃烧机械中液体燃料的喷射等都是很好的例子．

在计算机计算能力和性能取得重大进展的背景下，多相流动正处于大量研究的十字路口处．第 7 章中描述了计算两相流动的两种常用的方法，即 Eulerian-Eulerian 和 Eulerian-Lagrangian 模型．连续相流动通常采用 Eulerian 方法．对弥散相，可以通过 Lagrangian 框架内的离散方法或采用与连续相类似的连续 Eulerian 方法进行离散．当粒子的质量流量较小时，粒子相可以通过大量有限数目的粒子来表示，粒子的运动用 Lagrangian 方法进行计算．这些粒子被注入到流动域内，其运动轨迹由预先计算的载流流体的速度场决定．这种方法为单向耦合(one-way coupling)方法．当粒子的质量流量较大时，粒子对流体流动的影响需要加以适当的考虑．双向耦合(two-way coupling)同时对粒子的运动轨迹和载流体的流动进行计算，每一个粒子通过每一个控制体单元时对载流体的动量、质量和能量都有影响．对于气体-粒子流动应用的 Eulerian-Eulerian 和 Eulerian-Lagrangian 研究范围，读者可以参见 Tian 等(2005，2006)的研究成果．

恰当描述粒子之间的碰撞和团聚等相互作用以及粒子与壁面之间相互作用的模型正在研究之中．这些内容相当复杂，对此的进一步了解可参看 Crowe 等(1998)的著作．最近，Morsi 等(2004)、本书作者之一 Tu 等(2004))尝试对粒子贴近弯曲壁面边界的流动进行预测，并且得到了某些鼓舞人心的结果．正在进行的研究包括粒子-壁面行为等很多复杂的问题．在目前阶段，对于实际应用模型的鲁棒性仍然存在着不确定性．

当大质量流量粒子流动发生相变时，将用到双流体模型(Eulerian-Eulerian 方法)．此时，两相都被处理成具有不同速度场和温度场的连续流．为了计算两相之间的相互作用，需要构建适当的相间交换关系项来封闭方程组．最近，Kolev(2005)以及 Ishii 和 Hibiki (2006)对应用于气-液流动的双流体模型的原理进行了详细的描述．由于过冷沸腾(sub-cooled boiling)多相流动问题存在相变，因此其建模和模拟存在着巨大的挑战．将气泡和流体皆处理为连续相的双流体模型，需要添加壁面模型来预测受热壁面形成的气泡成核现象．基于大量的实验观察，发现脱离受热壁面的气泡由于合并、剪切形成大大小小的气泡或由于凝结而消失在大量过冷流体流动中．通过在双流体模型中引入总体平衡方法(popu-

lation balance approach)形成积分部分来处理气泡的聚并和破裂行为，确定弥散相中气泡的尺寸. 因为气泡直径强烈影响流体流动的牵引以及非牵引特性，因此必须正确地确定气泡的尺寸. 对这种特殊类型的多相流动，人们进行了很多研究，读者可以参看 Yeoh 和 Tu (2005，2006a，2006b)对模型的最新发展. 除增加壁面模型和气泡机理模型以及边界条件之外，对该流动的计算方法同本书中描述的方法相似.

最后，有必要提及另一个经典多相流流动，即自由表面流动，如明渠流动、船周围的流动、包括凝固或熔炼的模型浇铸等. 对自由表面的处理除了采用界面跟踪(移动网格)外，通常还采用另一类被称为“界面捕捉”(interface-capturing)的方法. 这些方法同浸入边界方法等有相似之处，对固定网格也要进行计算. 如通过求解由 Hirt 和 Nichols(1981)首先引入的 VOF(volume-of-fluid)方法(表明控制体积内是充满液体还是气体)，求解液含率的附加传递方程，确定自由表面的形状. 这种方法的主要课题是对方程中对流项的离散过程. 低阶格式有抹掉界面并造成两种流体人为混合的趋势. 与可压缩流动中的激波一样，抹平效应降低了数值模拟的效果，因此倾向于选用高阶的求解格式. 对于变化更剧烈的界面，基于 level-set 方法的界面捕捉方法是一种选择. 此处，流体的特性被硬性规定为阶梯形变化. 然而，当捕捉黏性流动时会出现问题，需要引入穿过界面的任意有限厚度区，以确保流体物性迅速变化时的连续光滑. 关于 level-set 设置方法的细节参看 Sethian (1996).

8.3.5 燃 烧

湍流和燃烧之间的相互作用是一个具有巨大研究兴趣的领域，因其复杂难以得到解析解，甚至在很多情况下对其基本的了解都很困难. 因为火焰中很薄的化学反应区域内，湍流和化学反应具有强耦合性，因此，非预混合或扩散火焰湍流尤为复杂.

在处理湍流燃烧流动时存在很多困难. 首先，由于湍流在很宽的时间和空间尺度范围内变化，因而混合程度千变万化，燃烧方式也就变化万千. 其次，燃烧组分的化学反应为高度非线性，对流动变量影响极大，温度和密度可能剧烈变化，在火焰区域内部的温度以及密度可能相差 8 倍. 第三，燃烧过程通常含有很多化学组分参与许多反应步骤，这就导致了非常复杂的传输特性. 第四，由于燃烧时间尺度和长度尺度一般小于最小湍流尺度，因而通过数值或实验方法对其精确求解很困难.

然而，从基本原理上来说，所有类型的燃烧都由相同的质量、动量、能量和化学组分守恒定律所决定. 如果这些控制方程能够不做任何近似而进行数值求解的话，那么就能知道关于流动和燃烧的所有信息. 这其中蕴涵了对燃烧流动进行直接模拟的思想. 在绝大多数情况下，化学反应尺度比最小的湍流尺度即 Kolmogorov 尺度要小得多. 这就是湍流燃烧比无反应湍流流动表现出更具挑战性的原因. 由于模拟对象具有一定的复杂性，因此对湍流火焰进行直接数值模拟研究是非常困难的. 如果逐一描述化学反应的细节，那么计算成本会显著增加，在某些情况下会急剧增加. 试想一下，最简单的甲烷燃烧过程就有超过

200 个反应步骤需要加以适当描述．因此，毫不奇怪，湍流燃烧的直接数值模拟仍然限于小规模的实验室火焰．

为了实现对实际燃烧系统中复杂化学反应流动的求解，经过简化的燃烧过程模型已经得到了广泛的应用．下面就非预混合和预混合燃烧建模进行简略描述，并进行简要的讨论．

通过把燃料燃烧描述为无限快速整体一次性化学反应(急速反应)，简单化学反应系统(the simple chemical reacting system，SCRS)假设氧化剂与燃料按化学反应剂量比生成反应产物．因为我们只关心燃烧过程的整体性质，因此忽略了中间的诸多反应．在该模型中，可以根据混合比例 f 的大小，将反应物、生成物与伴随惰性成分的质量比例表示成固定的代数关系．因此，只需求解一个关于 f 的附加传递方程，而不必对每一个化学组分的传递方程一一进行求解．为了处理由于湍流引起的质量比例的波动，可以通过混合比例 f 的概率密度函数对各变量的瞬时值进行加权平均，求得这些变量的平均值．截尾 Gaussian 函数 (Clipped Gaussian functions)和 B 函数是典型的概率密度函数，通过采用概率密度函数可以获得最好的计算结果．建议感兴趣的读者参看 Lockwood 和 Naguib(1975)、Pope (1976)以及 Jones (1979)等了解更多的细节．

由 Spalding(1971)以及 Magnussen 和 Hjertager(1976)提出的涡破碎概念(eddy break-up concepts)是另一种方法，其中，燃料消耗率作为局部流动的特性函数被求解．反应的混合控制率包含在湍流时间尺度项内．该模型中，燃料反应率取燃料耗散率、氧气耗散率以及生成物耗散率三者中的最小值．在模型中，含有由 Arrhenius 动力学速率表达式描述的动力学控制反应项，来控制燃料的反应速率以及混合控制反应速率(mixing-controlled rate of reaction)．该模型使用简捷，并且已经显示出相当好的预测结果．但是，预测结果的优劣很大程度上依赖于所使用的湍流模型．

除 SCRS 和涡破裂模型之外，另一个流行的燃烧模型是层流火焰面(laminar flamelets)模型．这种方法假定火焰为准稳态，并且依反应-扩散而分层，层流火焰在湍流中不断地移动和伸展．假设这些火燃层比所有的湍流尺度都薄，因此火焰内部结构具有层流焰的结构形态．与 SCRS 相似，通过求解传递方程获得混合比例．瞬时组分质量分数则由实验测得的层流状态关系式推导而来．组分的脉动也可以通过上述计算平均变化量的概率密度函数求得．这个模型允许包括详细的化学反应．应用涡破裂和层流火焰面模型对燃烧室火焰中的速度场和温度场的模拟见 Yeoh 等 (2002)．读者可以参看该文章，以便更好地了解火焰动力学中对燃烧火焰的模拟．

上述很多传统燃烧模型对火燃的描述都是基于准稳态条件的．为了预测非稳态火焰燃烧，如点火、升空和熄灭等情况，可能需要修正包括与各标量耗散率相关的状态关系式，并且能够区分火焰的燃烧和熄灭状态．Peters (2000) 提出了一个绷紧的层流火焰面模型(strained laminar flamelet model)以适应这种要求．另一种可行的方法是组合概率密度函数输运模型(compositional probability density function transport model)(Dopazo，1993)，用以

模拟湍流反应流动中有限反应速率化学动力学效应．该输运方程既可由 Pope (1994)提出的 Lagrangian 随机方法求解，也可以由 Valino (1998)发展的基于 Euler 方法框架的随机场方法求解．显然，燃烧模拟仍然是一个非常活跃的研究领域．随着计算机运算速度的提高以及并行计算的发展，燃烧火焰的时间精确(time-accurate)LES 变得更为可行和普遍．业已发现使用 LES 方法可以更好地捕捉火焰中的不稳定流动．最近对浮力作用下自由燃烧火焰(第 7 章中描述的 CFD 应用实例)的研究以及 Desjardin 和 Frankel(1999)对强辐射非预混湍流喷射火焰的研究证实了这一点．

8.3.6 流-固耦合

柔性结构与周围流体之间的相互作用能够产生多种现象，可应用在诸如飞机机翼的稳定性分析、桥梁设计以及血液在动脉中的流动(后面将作更详细的介绍)等．本节将通过一系列气动弹性力学(computational aeroelasticity，CAE)的应用来讨论计算气动弹性力学中诸多分析技术，这些基本方法同样可以用于其他相关流-固耦合(fluid-structure interaction，FSI)问题之中．

尽管很多 CFD 方法以及结构力学计算工具已经各自得到了发展，但很多研究者仍然寻求流体动力学和结构力学计算方法的综合，来处理流-固耦合问题．这些方法包括两个模拟模块之间复杂的交互过程．因此，正如 Kamakoti 和 Shyy(2004)综述的那样，其任务是选择基于问题的合适的流体模型和结构模型，开发有效连接两种模型的交互界面．CAE 可以分为三类：完全耦合(fully coupled)、紧密耦合(closely coupled)以及松散耦合(loosely coupled)．

在完全耦合模型中，通过组合流体和固体运动方程改写控制方程，并同时进行非定常模拟的求解和积分．因为需要求解的方程涉及两个不同的系统：Eulerian 流体方程和 Lagrangian 固体方程，因此这种方法存在严重的局限性．由于结构系统方程的刚性，对大量问题使用单一计算方法求解这些方程是不可能的．不同于完全耦合分析方法，在松散耦合模型方法中，固体和流体方程被分别求解．这就导致了两种不同计算网格在交界或边界处的不一致．为了将不同计算区域联系起来，发展了界面连接技术，用以不断交换模块之间的信息．图 8.8 中显示了在气动弹性变形模拟中，流体、固体求解方法以及界面信息交换方法．松散耦合模型方法可以灵活选择不同的求解方法，但是由于计算模块只是在各自计算域内充分收敛之后信息才被更新，因此导致耦合过程计算精度降低．该方法通常限于小扰动和中等非线性问题的模拟．在紧密耦合模型中，不仅可以对流体和固体使用不同的求解方法，而且由边界模块交换信息使两种求解方法紧密耦合．信息交换时，表面载荷从 CFD 表面网格映射到固体力学网格，位移场从固体力学网格映射到 CFD 表面网格上．这意味着需要对 CFD 表面网格采用边界移动技术，可用的移动网格计算方法，如弹性分析和无限插值方法(Hartwich 和 Agrawal，1997)或 Huang 及其同事(1994，1999，2001)指出的移动网格偏微分方程方法等，能在求解过程中实现整个 CFD 计算域内网格的重新布置．

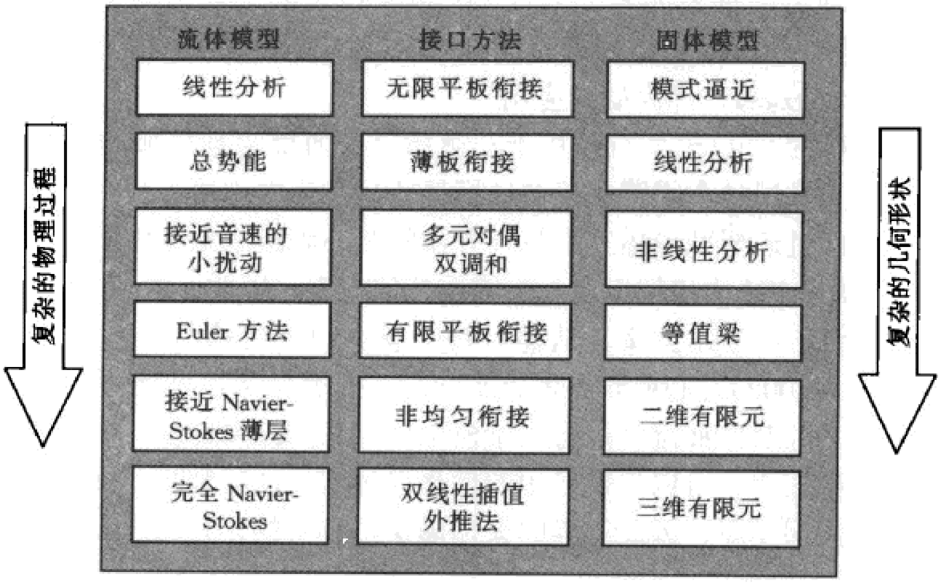


图 8.8　Kamakoti 和 Shyy(2004)采用的气动弹性变形模拟流体、固体求解方法以及选择的界面信息交换方法

对流-固耦合所取得进展的简单描述的目的是想为读者提供一些流-固耦合计算中适合的求解方法和界面连接方法．本节中呈现的材料并非毫无遗漏．大量的研究课题正在进行，但并未得到解决．未来要发展高阶方法，以便更好地捕捉流体流动中更为复杂的流动物理特性，并且要建立包括非线性因素在内的详细的固体结构模型．从根本上讲，流-固耦合对大系统的精确建模仍然需要更有效的方法以及提高计算中的鲁棒性．

8.3.7　生物流体动力学

人们对更好地了解人体呼吸和心血管生理学的生物医学或生物-流体工程有着极大的兴趣．由于对呼吸道内气流以及对心血管内血液流动数值模拟方法的应用和发展已经取得了重大进展，研究成果正在改变我们对其中流动行为的认识．医学成像技术，如核磁共振成像(magnetic resonance imaging，MRI)正在为构建准确的生物学几何模型提供全新的观察方式，可以考查正常人体和病人体内气流和血液的流动速度和压力．在第 1 章和第 7 章中，给出了一些与生物医学相关的实例．尽管通过三维计算模型已经获得了大量的数据，但还有大量重要的工作有待完成(Grotberg 和 Jensen，2004；Taylor 和 Draney，2004)．

根据 Ku(1997)对心血管系统引起心脏病发作或中风可能性的诊断，动脉狭窄处产生的自激振荡引起患者发病．作用在病人动脉壁上的静力和动力负荷可能持续不断地破坏血管狭窄处的帽状斑块(plaque cap)，从而将碎片引向动脉下游，这可能引起心脏病的发作或中风．人们试图采用基于 CFD 方法的数值计算模型来量化难以表述的现象．Perktold 等(1991)曾采用有限元方法，采用刚性壁面近似描述颈动脉分支模型模拟牛顿流体的脉动流动．尽管因为动脉壁面移动量很小(可以认为是稳态流动)，这种假设可以接受，但对动

脉产生较大变形的地方可能就不再适合了(比如年轻人的动脉血液流动). Rappitsch 和 Perktold (1996)曾在狭窄模型中描述了白蛋白的输运，而 Lei 等(1997)则致力于端-端吻合术(end-to-end anastomoses)计算模型的应用.

尽管可以用现有的 CFD 模型对存在于动脉瘤复杂血液流动区域的三维流动进行详细的描述，但要进一步发展整个闭路血液循环模型还存在许多挑战. 其中不仅包括如前所述的各种局部模型，而且还要准确描述由数百万血管及心脏组成网络中的有压流动关系的整体模型. 由于可以用 MRI 构建特定病人心脏的几何模型，因此，应用 CFD 方法预测血液流动的变化，并制订心脏手术方案，从而对每个患者制订特殊治疗方案成为可能(Taylor 等，1999). Wilson (2002)对心血管手术方案的最新研究结果已经为下肢动脉硬化患者制订了特定的治疗方案. 对血液流动进行三维模拟，计算其流动速度，用以模拟血管窄处的血液流动情况. 模拟表明，可以提供有用的信息以确定流动的郁积，而流动郁积可能产生血栓或使血管的内流层变厚，因此这样的模拟确实是必要的，并为患者特别是心血管患者提供了诊断意见.

心血管内流动研究的另一个挑战是如何发展分子-细胞水平与宏观流体流体力学相结合的模型. 这些模型应该能对动脉粥样化组织与动脉壁之间的相互作用以及血液流动对动脉壁细胞和组织作用力进行研究. 对于这样的流动，需要发展直接包含物质粒子特性的特殊空间尺度：多尺度模型(multiscale models). 该模型将在下节中讨论.

对于呼吸系统，气流在不同的肺部条件下会产生一定程度的改变并发生流-固耦合作用. 对气体呼出和吸入流动的研究具有重要的意义. 当吸入空气时，可能会诱发流动的不稳定，会产生打鼾以及上呼吸道气流堵塞而造成睡眠中的呼吸停止. 肺部呼吸道是多相流体动力学在生物学中的重要应用之地，其中的空气流动还存在一些相关问题，包括存在液体内膜或液体阻塞的柔性管道等. 考虑柔性呼吸道表面张力、弹力以及气流的作用，对如何控制柔性呼吸道的形状和内部液体薄层，确定在何种条件下导致呼吸道堵塞是极为重要的，当液体层形成塞子关闭(并压扁)呼吸通道并限制气体的流通时，就会产生哮喘.

描述三维 Navier-Stokes 内流流动的三维流-固耦合模型已经得到了发展. 研究表明，通过纯黏性机理，非对称弯管产生的非线性压力流动关系能够展示出流动的缺陷(Heil, 1997; Heil 和 Pedley, 1996). 这项研究工作将计算拓展到非均匀弯管内、雷诺数为数百时三维流动的描述中(Hazel 和 Heil, 2003). 含有柔性结构的生物流体动力学模型的发展正处于大规模研究的十字路口，作者只是揭开描述呼吸系统应用的一角. 要了解血管生物功能或功能障碍的物理原因和这些现象的实质，在计算上、实验上以及分析上仍然存在困难.

很多对生理学流体研究的几何模型还集中在刚性壁面近似的假设之上. 实际上，在心血管系统中的脉动流动以及呼吸道系统中的气体流动都需要采用柔性壁面结构来近似，从而恰当地表示实际流动特性. 未来呼吸系统和心血管系统的研究特别需要流-固耦合分析.

8.4 CFD 中的其他数值方法

传统数值方法是基于对宏观连续方程的离散，已经在很多工程实践中得到了应用．与传统数值方法不同，在流体流动模拟和流动物理建模方面，最近还出现了一些新方法．作者将介绍三种有前途的方法：格子 Boltzmann 方法、蒙特卡罗(Monte Carlo)方法以及粒子方法(Particle methods)．对于使用粒子方法的流动模拟，将讨论和说明模拟连续流动现象的粒子涡方法和光滑粒子动力学．

8.4.1 格子 Boltzmann 方法

格子 Boltzmann 方法(Lattice Boltzmann Method，LBM)是基于微粒子模型以及介观运动方程(mesoscopic kinetic equations)的一种算法．Kadanoff (1986)的研究发现，如果只关心流体系统的整体宏观流动行为，那么流体流动内部微观粒子的行为对宏观流动影响甚微．LBM 的基本思想是构建简化的运动模型，该模型只表现微观过程的基本物理特性，因此，得到的宏观平均特性服从所采用的宏观方程．这就避开了全 Boltzman 方程的使用，也避开了在分子动力学模拟时对每一个粒子的跟踪．

尽管 LBM 是基于粒子描述的方法，但其基本着眼点仍然是反映平均宏观流动行为．LBM 区别于其他数值计算方法的动力学特性主要有以下三点．第一，LBM 速度相中的对流算子是线性的．当与碰撞算子结合时，通过多尺度扩展，固有的简单对流可以恢复为非线性宏观对流．第二，不可压缩 Navier-Stokes 方程可以从 LBM 不可压缩极限中得到．压力可以直接从状态方程中计算得到，而不必求解以速度应变作为源项的 Poisson 方程．第三，在相空间中，LBM 采用了最小速度系列．因为只需要一个或两个速度以及为数不多的运动方向，所以微观分布函数与宏观量之间的转换就得到了极大简化，并且都是由简单的算术运算组成．

在 LBM 之中，分子动力学在空间、时间和粒子速度上都是离散的，可以通过简化，建立基于格子气自动机(lattice gas automata)的格子 Boltzmann 方程(LBE)．使用通常采用的 Bhatnagar-Gross-Krook (1954)单一间歇时间碰撞模型(single relaxation time collision model)，LBE 可由下式表示：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{e}\cdot\nabla f=\frac{f-f^{\mathrm{eq}}}{\lambda}. \tag{8.18}$$

式中，f 为粒子分布函数；$\boldsymbol{e}$ 为粒子速度；λ 为粒子碰撞的接触时间；f^{eq} 为 Boltzmann-Maxwell 平衡分布函数．可以证明，粒子速度空间 $\boldsymbol{e}$ 可以分割为一系列小的间断的向量 $\boldsymbol{e}_i$，这样，宏观守恒定律可以得到满足(He 和 Luo，1997)．因此，方程(8.18)可以在每个格子里沿每一速度方向离散，得到以下方程：

$$f_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_i\delta t,\ t+\delta t)-f_i(\boldsymbol{x},\ t)=-\frac{1}{\tau}[f_i(\boldsymbol{x},\ t)-f_i^{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x},\ t)]. \tag{8.19}$$

式中，$f_i(\boldsymbol{x}, t)$表示在位置 $\boldsymbol{x}$ 处和时间 t 时，沿速度 e_i 方向的密度函数；$\tau = \lambda / \delta t$ 表示间歇时间参数，δt 为时间步长．应用 LBM，流体宏观密度 ρ 和流动速度 $\boldsymbol{u}$ 可以由粒子分布函数定义为

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \rho \boldsymbol{u} = \sum_i f_i \boldsymbol{e}_i. \tag{8.20}$$

从以上描述可见，与传统的 Navier-Stokes 方法相比，LBM 数值计算相对简单．在 LBM 计算中，主要由两个部分组成：方程(8.19)右侧的碰撞运算以及方程左侧的流动运算．由于碰撞运算完全是局部的，而流动通过简单的位移操作(shift operation)(为大多数编译器提供的内置函数)很容易得到，因此，LBM 非常适合并行计算．因为运算速度非常快的并行机已经出现，从某种意义上讲，LBM 很容易满足并行计算的条件．然而，方程(8.19)也可以解释为对连续形式方程(8.18)的一种特殊的有限差分形式，即由格子尺寸限定时间步长．因此，LBM 的计算效率，特别是对稳态流动的计算效率仍然是一个有待评估的重要问题．

流体流动的格子 Boltzmann 模拟已经在包括驱动空腔流动、背向台阶流动、圆柱周围流动等简单几何形状流动以及复杂流动中得到了运用．亚格子尺度 LBE 模型为实际工业应用中采用 LBM 进行湍流流动模拟研究提供了可能．LBM 还为模拟复杂多相流和多组分流体流动提供了一种可选方法．已经证明，该方法克服了传统宏观方法在模拟界面流动以及多孔介质中流动、沸腾动力学以及树枝状流动等重要相关工程应用中所面临的困难．感兴趣的读者可参见如下 LBM 应用以及未来发展的相关文章：Hou 等(1995)，Benzi 等(1996)，Hou 等(1996)，Luo(1997)，He 和 Doolen(1997)，Shan(1997)，Spaid 和 Phelan(1997)，Chen 和 Doolen(1998)，Yang 等(2000)等．

8.4.2 Monte Carlo 方法

除了 LBM，最近，人们又提出将直接模拟蒙特卡罗(direct simulation Monte Carlo, DSMC)方法用于计算流体力学之中，去求解在实际科学和工程中非常重要的高克努森数(Knudsen number, Kn)流动问题．无量纲参数 Kn 通常定义为分子平均自由程(molecular mean-free-path)与特征长度(characteristic length)的比值．因为在微米或纳米尺度流动系统中，连续流体的近似被打破，此时 Kn 数很大，即平均自由程与特征长度相近甚至超过特征长度，物质的粒子特性必须明确加以考虑．表 8.1 中显示了描述原子之间、离子之间以及分子之间相互作用的多层次数学模型．这些模型包括求解粒子之间基本作用力最基本的方法(如分子动力学模型)到单独粒子被连续流体单元取代的近似方法(如 Navier-Stokes 方程)．分子动力学是该层次中最基础的方法，LBM 和 DSMC 是处在分子动力学和连续流体方法之间的方法．

表 8.1 物体相互作用模型(源自 Oran 等，1998)

方 程	求解方法
牛顿定律：$f=ma$	分子动力学(以粒子为基础确定性描述粒子间的作用力)
Liouville 方程：$F(x_i, v_i, t)(i=1, N_p)$	Monte Carlo 方法(以粒子为基础的统计学方法)——DMSC
Boltzmann 方程：$F(x, v, t)$	直接求解——LBM
二元碰撞(低密度) Navier-Stokes 方程：$\rho(x, t)$，$u(x, t)$ 短的平均自由程	直接求解：有限差分法、有限容积法、光谱方法等(连续流动方法)

DSMC 是基于分子运动论的直接粒子模拟方法．该方法的基本思想是跟踪大量的在统计意义上有代表性的粒子．之后，根据粒子的运动，修正粒子的位置、速度甚至反应流动中的化学反应．质量、动量和能量守恒定律必须精确满足计算机的机器精度(machine accuracy)．DSMC 方法的近似基础是将分子运动与短时间内分子间的碰撞进行解耦．因此，分子运动的模拟是确定性的，而分子间的碰撞按统计方法处理．

DSMC 方法的核心由四个基本步骤组成．第一步，被模拟的粒子在一个时间步长内运动．对化学反应、三体碰撞以及离子流等分子表面相互作用的物理效应进行建模，来确定边界条件．第二步，为粒子编号和跟踪粒子．这是下两步(模拟碰撞和流场取样)的先决条件．DSMC 对大量分子处理的关键是准确和快速地标定和跟踪粒子．第三步，模拟碰撞．DSMC 与分子动力学方法等其他确定性模拟方法是不同的．现在首选的模型是 Bird (1994)提出的，与 Bird (1986)的亚单元技术(sub-cell technique)联合使用的无时间计数技术(no-time counter technique)．亚单元方法通过计算各自单元内的局部碰撞率，保证碰撞只发生在附近的相邻粒子之间，但将可能的碰撞对限定在亚单元内．第四步，通过粒子的取样提供宏观流动特性．用特定单元内分子的空间坐标和速度分量计算单元几何中心的宏观参量．感兴趣的读者可以参阅 Muntz(1989)，Cheng(1993)，Cheng 和 Emmanuel(1995)以及 Oran 等(1998)文献，了解 DSMC 详细的最新进展．

DSMC 是时间精度的显式方法．该方法可以很好地应用到非稳态流动中，包括计算激波、边界层以及高超声速黏性流动和高温稀薄气体动力学中的非定常流动结构．人们已经对后面的应用产生了强烈的兴趣，特别是在高速飞机和空间运输系统中的应用更是如此．在材料加工领域中，DSMC 在处理各种气相沉积过程中的薄膜生长以及等离子刻蚀中的应用在持续增长．为了探索 DSMC 作为预测工具的潜力，在低 Kn 范围内，DSMC 获得的结果也已经与 Navier-Stokes 的计算结果和实验数据进行了对比．计算结果表明，在该限定条件下(低 Kn)，DSMC 结果接近 Navier-Stokes 结果．尽管现代计算机的计算能力不断增强，但仍然限制了 DSMC 在计算流体力学中的广泛应用．然而，人们正在认真考虑用 DSMC 求解更特殊的流动，如低速、高 Knudsen 数流动．

8.4.3 粒子方法

通过求解决定粒子轨迹和特性演变的常微分方程组（ordinary differential equations，ODEs）可以获得粒子方法(particle methods)模拟连续现象的主要特性．要求解的 ODEs 通式可由下式给出：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_p}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{u}_p(\boldsymbol{x}_p,t)=\sum_{q=1}^{N}K(\boldsymbol{x}_p,\boldsymbol{x}_q;\omega_p,\omega_q),\tag{8.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega_p}{\mathrm{d}t}=\sum_{q=1}^{N}F(\boldsymbol{x}_p,\boldsymbol{x}_q;\omega_p,\omega_q).\tag{8.22}$$

式中，$\boldsymbol{x}_p$，$\boldsymbol{u}_p$ 表示 N 个粒子的位置和速度；ω_p 表示粒子特性，如密度、温度和旋涡；K，F 表示控制模拟物理系统的动力学参数．

粒子方法采用 Lagriangian 方程．粒子方法主要有两种：涡方法(vortex methods，VMs)和光滑粒子流体动力学(smooth particle hydrodynamics，SPH)方法．通过用等价积分算子代替导数算子，并在粒子位置上分别进行离散，从而将 Navier-Stokes 方程转化为 Lagrangian 的近似形式．

粒子方法常常定义为“无网格方法”(grid-free methods)，因此与基于格子方法(如已被大量描述的传统的 Navier Stokes 方法)相比来说是一种具有吸引力的选择．当对流-扩散方程用 Lagrangian 方法表示时，粒子方法可随流动图形的指示自动适应计算单元．然而，该方法引入的截断误差能使粒子变形，会导致伪涡结构的产生和演变，因此该方法不得不与格子一起使用，以保证模拟的相容性、有效性和精确性．通过更新格子可以使规则的粒子位置得到恢复，但又不削弱该方法固有的使用特性．

自从涡粒子方法被 Rosenhead (1930)提出以来，已经被用于描述不可压缩流动中涡结构的演变．基于 Krasny (1986)的涡团(vortex-blob)近似，考虑所有计算单元的整体行为，重新获得计算域内每一位置上的流场．当粒子产生重叠时，由有限的粒子核尺寸(finite particle core size)代替粒子内距(inter-particle distance)来确定物理量尺寸．用粒子强度转换(particle-strength exchange，PSE)方法(Koumoutsakos，2005)模拟黏性的影响．采用边界积分方法确定固体边界无贯通流动(no-through flow)等运动学边界条件；而黏性边界条件，如无滑移边界条件，则采用转化为涡流体边界条件(vorticity fluid boundary conditions)(Cottet and Poncet，2004)来补充方程的黏性部分．

VMs 已经在工程中得到了广泛应用．对一定雷诺数流经圆柱流动的 DNS，在需要精细求解以捕捉非稳定分离现象的计算区域内，已经证明了 VMs 具有自动适应流动区域内计算单元的能力 (Koumoutsakos 和 Leonard，1995)．由于这些计算域通常不能事先得知，因此在基于网格方法的临界区域内，需要设计合适的检验标准来确定在何处需增加计算单元的数量．在 VMs 中，计算单元与其描述的流动特性紧密相关，因而就不需要上述附加的方法．VMs 的适应性和鲁棒性使得该方法也可以模拟伴有化学反应的流动(Knio 和

Ghoniem，1992）．与基于网格的方法相比，Lagrangian粒子方法可以更好地捕获高度各向异性的扩散现象，同时精确地传递标量场．最近，为捕获界面现象，Hieber和Koumoustsakos(2005)提出了一种新颖的粒子等级设置方法(particle-level set method)．众所周知，由于Krasny在20世纪80年代的开创性工作(Krasny，1986)，粒子方法很适合捕获界面现象．将一系列基准问题与现在已有的公式相比较已经证明，在减少计算单元数量的条件下，这种方法仍然可以很好地捕获界面特性，因而是一种有前途的方法．

SPH方法首先由Lucy于20世纪70年代后期提出，并由Monaghan(1988)在天体物理学中的无网格模拟上得到了进一步发展．在SPH中，用粒子内距代替粒子核尺寸．通过Monaghan(1988)以及Ellero等(2002)的重要研究工作，SPH的应用范围已经从天体物理学中的气体动力学进一步扩展到了牛顿流体和黏性弹性流体当中．与VMs相似，SPH也涉及粒子变形的问题．Ellero等人于2002提出的动力学条件已经弥补了这一问题．受VMs技术的启发，通过网格重建，在SPH中引入无量纲的粒子变形，已经将该方法改进为二阶精度，同时也削弱了其无网格的特性．最近，人们已经对基于Galerkin型的无网格方法进行了研究，以提高SPH对流动的模拟能力．Duarte和Oden(1996)以及Belytschko等(1996)对与SPH相关的统一移动最小二乘法、再造Kernal粒子方法(Reproducing Kernal Particle Methods)以及无单元Galerkin(Element-free Galerkin)方法的研究工作已经引起人们的关注．为了进一步理解模拟分子现象的粒子方法的理论背景、方程、数值运算、面临的问题和未来的发展，建议读者参考Koumoutsakos (2005)关于使用粒子方法对多尺度流动模拟进行的全面综述．

8.5 小 结

在流体力学中，新的应用领域已经带来了很多新颖和创新技术的发展．因此，本章中描述的前沿课题旨在探究CFD研究和开发的最新发展趋势．作者无意对本章所描述的每一个主题进行全面的评述，只是对采用的研究方法和仍然需要研究和解决的关键课题提供一个宽泛的概述．然而，在数值方法和计算模型中取得的重要进步，以及某些非传统方法，特别是模拟流体流动的格子Boltzmann方法、直接模拟Monte Carlo、涡方法以及光滑粒子流体力学方法等的成功应用，使我们对CFD在很多与流体相关研究中的巨大能力感到钦佩．包括强跨声速和高超声速流动中的强激波，多相流中复杂的气泡机理，甚至人体中的复杂流动(人体由成万亿个细胞和数十亿条血管组成，心血管系统内的循环使血液重新分布)等，只是CFD未来研究中具有挑战性的流体动力学问题中的一部分．如同我们的前辈Newton、Euler、Bernoulli、Poiseuille、Young、Lighthill一样，人们对流体力学的研究已经产生了数十年的强烈迷恋．由于大量的流体流动和过程仍然未得到解决，随着方法和模型的进一步发展，CFD必将始终处在科学研究和开发的前沿，其发展还将持续多年．

复习题

8.1 将如下通用连续性方程简化为不可压缩稳态流动方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0.$$

8.2 在标记网格(MAC)方法中，如何使用压力项满足连续性方程？

8.3 简单讨论分步过程的基本思想.

8.4 可压缩流动包含的应用类型和条件是什么？

8.5 在对流过机翼周围的超声速非稳态建模时会出现什么困难？

8.6 可压缩流动必须克服的最大困难是什么？

8.7 在可压缩流动中，采用何种技术可以使激波前峰流动间断引起的振荡最小？

8.8 高阶格式，如五阶格式是如何处理非连续问题的？

8.9 在何种情况下应采用适应性网格？如果采用固定网格，会产生什么问题？

8.10 简单讨论 r-refinement 网格适应技术的概念.

8.11 何种应用通常采用移动网格？

8.12 说明如何应用移动网格模拟如图 8.9 所示的螺杆压缩机. 哪些部分需要保持静止，哪些部分允许运动？

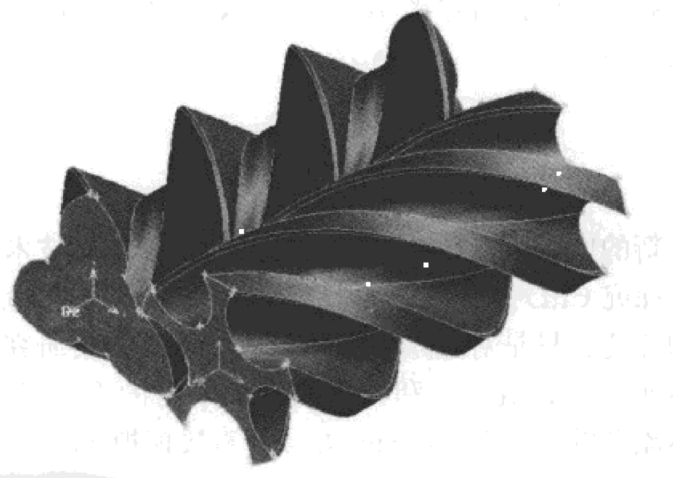


图 8.9

8.13 在处理高频和低频误差方面，使用多重网格方法进行数值求解的主要优点是什么？

8.14 说明并行计算中的区域分解和负载平衡.

8.15 何为浸入边界方法？与边界贴体网格有何差别？

8.16 何为直接数值模拟 (DNS)？在处理湍流方面与雷诺平均 Navier-Stokes (RANS)方法有何不同？

8.17　何为 Kolmogorov 微尺度？对网格设计的影响如何？

8.18　为什么当前还不能使用 DNS 求解高雷诺数流动问题？

8.19　LES 在湍流建模中的主要概念有哪些？

8.20　在 LES 中，何为亚网格尺度(SGS)模型？如何对小的湍流尺度进行定义？

8.21　在 RANS-LES 耦合方法中，在网格的哪一区域中使用 RANS 模型，在哪一区域使用 LES 模型？

8.22　为什么要使用 RANS-LES 耦合方法模拟高雷诺数湍流流动？

8.23　在多相流动中，单向耦合与双向耦合的区别是什么？

8.24　当多相流中第二相(非连续相)具有大的质量流量时，能否使用 Eulerian-Eulerian 或 Eulerian-Lagrangian 方法？

8.25　对燃烧现象的模拟是复杂的．在模拟燃烧时，必须考虑哪些问题？

8.26　说明流-固耦合（FSI）模型的应用．

8.27　在 FSI 中，流体与固体之间能够产生相互作用的关键条件是什么？

8.28　需要采用何种先进计算方法来模拟通过呼吸系统进入肺部的气流流动？对于通过血管的脉动血液流动，又如何模拟？

8.29　简要讨论格子 Boltzmann 方法的概念．

8.30　简要讨论 Monte Carlo 方法的概念．

8.31　简要讨论粒子方法的概念．

附录 A　守恒方程的推导

本附录中对动量守恒方程和能量守恒方程进行推导．由于动量守恒，因此 x 方向上的净力为作用在流体单元上的各分量之和．假设速度分量 u 如图 3.4 所示，作用在流体单元上的表面力有法向应力 σ_{xx} 以及切向应力 τ_{yx} 和 τ_{zx}．x 方向上的正应力为

$$\left(\sigma_{xx}+\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z-\sigma_{xx}\Delta y\Delta z; \tag{A.1}$$

沿 x 方向上的切向力分别为

$$\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta z-\tau_{yx}\Delta x\Delta z, \tag{A.2}$$

$$\left(\tau_{zx}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x\Delta y-\tau_{zx}\Delta x\Delta y. \tag{A.3}$$

流体单位体积上表面应力产生的总净力应等于式(A.1)、(A.2)、(A.3)之和除以控制体体积 $\Delta x\Delta y\Delta z$，即

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}. \tag{A.4}$$

不难证明，在 y 和 z 方向上，单位流体体积上的总表面力分别为

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}, \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \tag{A.6}$$

将式(A.4)与水平速度分量 u 以及体力相结合，则 x 方向上的动量方程变为

$$\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\sum F_x^{\text{body forces}}. \tag{A.7}$$

同理，由式(A.5)和(A.6)可以得到 y，z 方向上的动量方程：

$$\rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\sum F_y^{\text{body forces}} \tag{A.8}$$

及

$$\rho\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+\sum F_z^{\text{body forces}}. \tag{A.9}$$

由于所有的气体和绝大部分液体都是各向同性的，因此，如果假设流体为各向同性的牛顿流体，那么，方程(A.7)至(A.9)中的法向应力 σ_{xx}，σ_{yy}和 σ_{zz} 可以用压力 p 和法向黏

性应力分量表示，而 τ_{xx}，τ_{yy}和 τ_{zz}的作用方向与控制体垂直．包括切向黏性应力分量的其余各项也可由方程(A.7)至(A.9)描述．在很多流体流动中，引入了适当的黏性应力模型，该模型可以表示为局部变形率(或应变率)的函数．因为所有的气体和绝大多数液体为各向同性，因此假设流体为各向同性的牛顿流体．由流体流动引起控制体体积 $\Delta x\Delta y\Delta z$ 的线性变形率通常可在速度梯度项里描述．正应力关系可由下式表示：

$$\sigma_{xx}=-p+\tau_{xx},\quad \sigma_{yy}=-p+\tau_{yy},\quad \sigma_{zz}=-p+\tau_{zz}. \tag{A.10}$$

根据牛顿黏性定律，正向和切向黏性应力分量可由下式表示：

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xx}&=2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\
\tau_{yy}&=2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\
\tau_{zz}&=2\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\
\tau_{xy}&=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\
\tau_{xz}&=\tau_{zx}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\\
\tau_{yz}&=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{A.11}$$

比例常数 μ 和 λ 为(第一)动力黏度和第二黏度，其中，第一动力黏度主要与线性变形有关，而第二黏度主要与体积变形有关．到目前为止，对第二黏度的研究不多．常常采用 Stokes 的假设：$\lambda=-\frac{2}{3}\mu$，而且已经发现对气体而言有很好的近似．

将方程(A.10)、(A.11)与方程(A.7)至(A.9)组合，则三维速度分量 u，v 和 w 可以重写成

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=&-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\sum F_x^{\text{body forces}},
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}=&-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\sum F_y^{\text{body forces}},
\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}=&-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\sum F_z^{\text{body forces}}.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

对于能量守恒，作用在控制体体积 $\Delta x\Delta y\Delta z$ 上功的变化率等于力与速度分量的乘积，其中，x 方向上的速度分量为 u．由图 3.5 可知，法向力在 x 方向上所做的功为

$$\left[u\sigma_{xx}+\frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y\Delta z-u\sigma_{xx}\Delta y\Delta z,\tag{A.15}$$

而切向力在 x 方向上所做的功分别为

$$\left[u\tau_{yx}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}\Delta y\right]\Delta x\Delta z-u\tau_{yx}\Delta x\Delta z\tag{A.16}$$

及

$$\left[u\tau_{zx}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}\Delta z\right]\Delta x\Delta y-u\tau_{zx}\Delta x\Delta y.\tag{A.17}$$

作用在 x 方向上的这些表面力所做的净功率除以控制体体积，可得

$$\frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}.\tag{A.18}$$

与此相似，也可以得到表面力在 y 和 z 方向上所做的功，这些作用在流体上的附加功率为

$$\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\sigma_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}\tag{A.19}$$

及

$$\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(w\sigma_{zz})}{\partial z}.\tag{A.20}$$

对于有热量增加的情况，如图 3.5 所示，x 方向上热流动产生的热传递率由表面 x 的输入热量与表面 $x+\Delta x$ 的热量损失之差给出，即

$$\left(q_x+\frac{\partial q_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z-q_x\Delta y\Delta z.\tag{A.21}$$

同样，y 方向和 z 方向上的净热量传递也可以表示如下：

$$\left(q_y+\frac{\partial q_y}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta z-q_y\Delta x\Delta z\tag{A.22}$$

及

$$\left(q_z+\frac{\partial q_z}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x\Delta y-q_z\Delta x\Delta y.\tag{A.23}$$

流体中增加的总热量除以控制体体积 $\Delta x\Delta y\Delta z$，其结果为

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}.\tag{A.24}$$

对于给定流体比能量 E，将方程(A.18)，(A.19)，(A.20)以及(A.24)与能量随时间变化率组合，能量守恒方程变为

$$\rho\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(v\sigma_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(w\sigma_{zz})}{\partial z}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}-\frac{\partial q_z}{\partial z}.\tag{A.25}$$

到目前为止，我们还没有定义流体的比能量 E. 流体的能量通常为内能、动能以及重力势能的总和. 我们可以把重力(体力)及势能作为源项. 在三维流动中，比能量定义为

$$E = \underbrace{e}_{\text{内能}} + \underbrace{\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)}_{\text{动能}}. \tag{A.26}$$

对于可压缩流动，方程(A.26)常常以焓方程的形式给出. 流体的比焓 h_{sp} 以及总焓 h 可定义为

$$h_{sp} = e + \frac{p}{\rho} \quad \text{以及} \quad h = h_{sp} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

将上述两定义与比能量 E 联立，可得

$$h = e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = E + \frac{p}{\rho}. \tag{A.27}$$

附录 B　迎风格式

一阶迎风格式已在第 4 章 4.2.3 节中作了描述. 此处，我们集中介绍如图 B.1 所示的二阶迎风格式和三阶 QUICK 格式. 作为一阶迎风格式的发展，如图 B.1 所示，其思想是结合位于邻近网格节点 WW 和 EE 上的变量来计算单元表面 w 和 e 界面上的值.

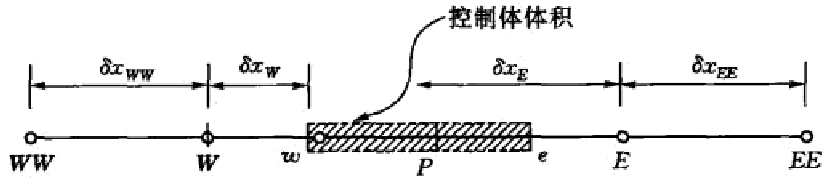


图 B.1　一维计算区域周围节点为 WW，W，E 和 EE 时，节点 P 周围的控制体体积

对于二阶迎风格式，假设网格节点为均一分布，通过增加一上游变量点，将流体流动信息引入到近似计算中，即

$$\left.\begin{aligned}\phi_w &= \frac{2}{3}\phi_W - \frac{1}{2}\phi_{WW},\\ \phi_e &= \frac{2}{3}\phi_P - \frac{1}{2}\phi_W;\end{aligned}\right\} \quad (u_w>0 \text{ 且 } u_e>0) \tag{B.1}$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_w &= \frac{2}{3}\phi_P - \frac{1}{2}\phi_E,\\ \phi_e &= \frac{2}{3}\phi_E - \frac{1}{2}\phi_{EE}.\end{aligned}\right\} \quad (u_w<0 \text{ 且 } u_e<0) \tag{B.2}$$

对于三阶 QUICK 格式，根据流动方向，将上游的 2 个变量点、下游的 1 个变量点引入到二次逼近中. 这种格式的不等权重决定了界面值仍然依赖上游流动信息. 基于均一网格节点分布的界面值 ϕ_w 和 ϕ_e 可由下式计算：

$$\left.\begin{aligned}\phi_w &= -\frac{1}{8}\phi_{WW} + \frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P,\\ \phi_e &= -\frac{1}{8}\phi_W + \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E;\end{aligned}\right\} \quad (u_w>0 \text{ 且 } u_e>0) \tag{B.3}$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_w &= -\frac{1}{8}\phi_E + \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_W,\\ \phi_e &= -\frac{1}{8}\phi_{EE} + \frac{6}{8}\phi_E + \frac{3}{8}\phi_P.\end{aligned}\right\} \quad (u_w<0 \text{ 且 } u_e<0) \tag{B.4}$$

附录 C　显式及隐式方法

在第 4 章 4.2.3 节中已经对一阶显式和隐式方法进行了叙述. 在此，以二阶显式 Adams-Bashford 方法以及半隐 Nicholson 方法为例，作进一步说明.

如图 C.1 所示，不仅要在第 n 层时间上将一阶显式 Adams-Bashford 方法拓展到二阶显式 Adams-Bashford 方法，而且还要在第 $n-1$ 时间层上进行. 一维非稳态对流-扩散方程(4.43)重写为如下形式：

$$\begin{aligned}\frac{\phi_P^{n+1}-\phi_P^{n}}{\Delta t} &= \frac{3}{2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|^{n} - \frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|^{n-1} \\ &= \frac{3}{2}\bigg[-u_e A_E \frac{1}{2}(\phi_W+\phi_P) + u_w A_W \frac{1}{2}(\phi_P+\phi_E) + \Gamma_e A_E \frac{1}{\rho}\left(\frac{\phi_E-\phi_P}{\delta x_E}\right) \\ &\quad - \Gamma_w A_W \frac{1}{\rho}\left(\frac{\phi_P-\phi_W}{\delta x_W}\right) + \frac{S_\phi}{\rho}\Delta V\bigg]^{n} - \frac{1}{2}\bigg[-u_e A_E \frac{1}{2}(\phi_W+\phi_P) + u_w A_W \frac{1}{2}(\phi_P+\phi_E) \\ &\quad + \Gamma_e A_E \frac{1}{\rho}\left(\frac{\phi_E-\phi_P}{\delta x_E}\right) - \Gamma_w A_W \frac{1}{\rho}\left(\frac{\phi_P-\phi_W}{\delta x_W}\right) + \frac{S_\phi}{\rho}\Delta V\bigg]^{n-1}. \end{aligned} \tag{C.1}$$

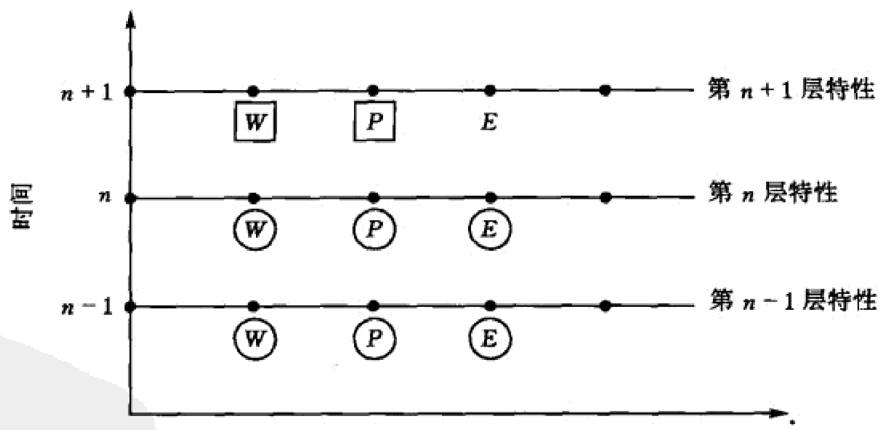


图 C.1　二阶 Adams-Bashford 方法示意图

对于二阶 Crank-Nicholson 方法，这种特殊类型的时间差分需要通过平均第 n 层与第 $n+1$ 层之间的特性来求解 ϕ_P^{n+1}. CFD 中有多种 Crank-Nicholson 形式. 某些可能只包括对扩散项的隐式求解，而其他则可能选择除了隐式求解扩散项外，还考虑对流项的隐式求解，但源项仍维持在前一时间层 n 中，未予考虑. 现将后者描述如下：

$$\begin{aligned}\frac{\phi_P^{n+1}-\phi_P^n}{\Delta t}=&-\frac{u_e^n A_E}{2}\left[\frac{1}{2}(\phi_W^{n+1}+\phi_W^n)+\frac{1}{2}(\phi_P^{n+1}+\phi_P^n)\right]\\&+\frac{u_w^n A_W}{2}\left[\frac{1}{2}(\phi_P^{n+1}+\phi_P^n)+\frac{1}{2}(\phi_E^{n+1}+\phi_E^n)\right]\\&+\frac{\Gamma_e^n A_E}{\rho}\left[\frac{\frac{1}{2}(\phi_E^{n+1}+\phi_E^n)-\frac{1}{2}(\phi_P^{n+1}+\phi_P^n)}{\delta x_E}\right]\\&-\frac{\Gamma_w^n A_W}{\rho}\left[\frac{\frac{1}{2}(\phi_P^{n+1}+\phi_P^n)-\frac{1}{2}(\phi_W^{n+1}+\phi_W^n)}{\delta x_W}\right]+\frac{S_\phi^n}{\rho}\Delta V.\end{aligned}\tag{C.2}$$

上述方程是半隐方法表示的一个例子．与全隐方法一样，需要同时求解给定第 $n+1$ 时间层上所有网格节点处差分方程中的未知数．

附录 D 学习进程和学时安排

本书中的素材有一部分是为澳洲 RMIT 大学航空、机械和制造工程学院高年级本科生开设的“计算流体力学基础”课程而设计的. 任何工程系中 CFD 课程的任课教师可以在一个学期(6～8 学时/周)或两个学期(3～4 学时/周)中采用本课程学时安排. 例如，对于一学期的课程，授课教师可以安排每周 3 或 4 学时的课堂讲授，3 或 4 学时的上机练习. 课堂讲授与上机练习之间的学时分配完全取决于任课教师. 教师可以减少课堂讲授的学时，集中更多时间在 CFD 实验室中，通过 CFD 方法，使学生获得更多的处理真实流体流动问题的实际经验.

学习安排包括学生自学有关章节(见下面的具体安排)、做作业以及完成最后的 CFD 课程设计(见附录 E). 从教学的角度，作业和设计方案可以帮助学生更好地参与到各种真实问题之中. 从学生的角度，在从课程开始通过相对容易的作业到课程最后阶段求解实际流体动力学问题的过程中，会始终充满兴趣. 在课程教学过程中，将相关数学方程的细节介绍降低到最小程度，并且避开计算机程序. 而我们强调的是 CFD 求解分析的知识和能力. 因此，教材直接呈现了 CFD 中使用的主要理论和数学方法，并指导学生将他们的学习集中在这些方面. 在上机练习时，通过使用 CFD 软件，进行 CFD 练习将促进基础理论的学习、提高求解和分析实际工程问题的能力. 在 CFD 上机练习的过程中，将介绍软件使用，讨论作业中的问题，并为学生提供上机帮助和信息反馈. 最后的 CFD 设计方案能使学生在应用 CFD 方法分析实际工程问题中获得经验.

一学期 CFD 课程的学习安排

第 1 周	课堂：	CFD 及 CFD 求解过程概述
	自学：	第 1 章和第 2 章
	CFD 上机练习：	CFD 软件介绍
		作业 1 (介绍)
第 2 周	课堂：	CFD 基本方程
	自学：	第 3 章
	CFD 上机练习：	作业 1 (讨论)
第 3 周	课堂：	网格生成和边界条件
	自学：	第 3 章和第 6 章
	CFD 上机练习：	作业 1 (确定方案)
第 4 周	课堂：	数值方法基础

	自学：	第4章
	CFD上机练习：	作业2（介绍）
第5周	课堂：	数值技术基础
	自学：	第4章
	CFD上机练习：	作业2（讨论）
第6周	课堂：	CFD求解分析
	自学：	第5章
	CFD上机练习：	作业2（确定方案）
第7周	课堂：	湍流模型
	自学：	第6章
	CFD上机练习：	作业3（介绍）
第8周	课堂：	实用指导以及实例学习
	自学：	第6章
	CFD上机练习：	作业3（讨论）
第9周	课堂：	CFD应用
	自学：	第7章
	CFD上机练习：	作业3（确定方案）
第10周	课堂：	邀请讲座：应用CFD进行工程设计和优化
	自学：	第7章
	CFD上机练习：	CFD课程设计方案介绍
第11周	课堂：	CFD的最新进展
	自学：	第8章
	CFD上机练习：	CFD设计方案（讨论）
第12周		CFD设计方案（反馈）
第13周		CFD设计方案(确定方案)
第14周		复习和考试

附录 E　CFD 作业及 CFD 课程设计指导

本附录包括 3 个作业例子和 CFD 课程设计项目指南．没有 CFD 课题的学生，必须选择后面给出的 CFD 项目(CFD 项目 A 至 CFD 项目 C)中的一个．

一、CFD 作业

1．作业 1

背景和目的

背向台阶作为一种标准装置，常用来验证流动循环、流动黏着等流动特性以及测试各种模型和方法．这一问题在工程中有大量的应用，比如在 HVAC、燃烧室等的应用．

问题目标：

(1) 应用现有的任何网格生成软件，学习网格生成和导出过程．本作业中，采用网格生成器 GAMIBIT．

(2) 应用现有的任何 CFD 软件，学习边界条件设定和计算模型选择．本作业中，采用 ANSYS-FLUENT 求解流动问题．

(3) 探究 CFD 软件中的后处理方法，分析数值计算结果．

(4) 给出简明的 CFD 报告．

问题的描述

要求学生通过下面给出的后向台阶的具体条件，计算其中的层流流动．几何数据按特征长度进行无量纲化处理后给出．对于后向台阶问题，特征长度为台阶高度(本例中假设为单位长度，如图 E.1 所示)．按入口速度进行无量纲化处理后得到的流动条件如下．

入口速度：$u_x=1$，$u_y=0$．

流动特性：密度：$\rho=1$；动力黏度：$\mu=1/Re$，其中 Re 为雷诺数．

出口边界定义为流出条件，其他计算边界采用无滑移条件．流动中忽略湍流，并且没有热量传递．注意：需要改变计算域的尺寸，以保证出口边界处得到充分发展流动．

操作过程

(1) 启动 GAMBIT 对后向台阶创建网格．对计算域设置适当的边界条件．最好采用结构化网格，使用者也可以在计算域内生成非结构化网格．确定已经获得良好的网格质量．解释需要进一步网格细化的地方．将二维网格输出到 ANSYS-FLUENT 6 中．

(2) 当 $Re=100$ 时，使用 ANSYS-FLUENT 进行模拟计算，获得速度和压力云图以及速度矢量图．确保在出口边界处，流动得到充分发展(没有反向流动)或接近充分发展．讨论上述观察到的流动特性．

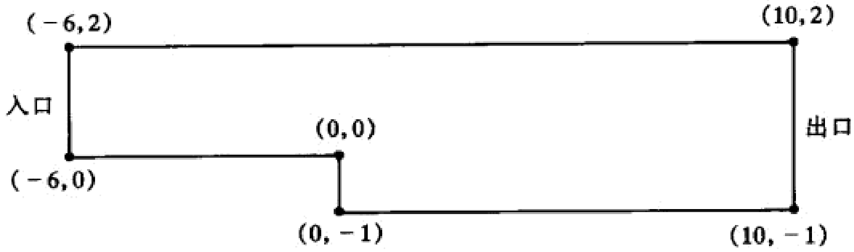


图 E.1 二维后向台阶的几何结构示意图

(3) 采用不同的网格密度，重复步骤(2)和步骤(3)．对于 $Re=100$，使用相同的流动设置，确定循环区域重附着点对网格密度的敏感性．绘制网格尺寸与重附着位置的关系图，进一步说明数值计算的最经济网格密度．(提示：当获得网格独立性时，重附着点将不随网格密度的增大而变化)

(4) 应用(3)中确定的网格，对其他雷诺数 50，150，200 条件进行模拟计算．整理计算结果，绘制雷诺数与重附着点之间的关系图．解释有关现象，并提出自己的结论．

2．作业 2

背景与目的

CFD 常见的应用之一是对流经结构外表流动的研究．在汽车工业领域，一个重要的问题是确定相邻机动车之间的气体动力学影响．因为 Ahmed 模型结构简单，很多重要参数易于改变，因此在实验中，该模型常常用来代表机动车．

问题目标：

(1) 创建对单一 Ahmed 模型的 CFD 模拟并提取重要数据；

(2) 进行两 Ahmed 模型 CFD 模拟并研究车间距对模拟的影响；

(3) 了解湍流流动模型以及对 y^+ 值分布重要性的理解；

(4) 加深对边界层流动的理解；

(5) 学习如何从现有发表的实验数据中筛选和取得结果．

问题的描述

单一汽车外形：典型 Ahmed 结构如图 E.2 所示．学生需要创建一个二维 Ahmed 模拟模型．

图 E.2 Ahmed 模型的二维外形示意图

Ahmed 模型的相关尺寸如下：

x	y
−0.94400	0.00000
0.00000	0.00000
−1.04400	0.10000
0.00000	0.17700
−1.04400	0.18800
−0.94400	0.28800
−0.19226	0.28800

注意：Ahmed 外形的特征长度(取汽车的长度)并不等于单位长度．在雷诺数计算及相邻汽车之间间距无量纲化处理时，必须考虑这一点．

在空气中进行模拟计算．对于单一模型，根据下面数据，在直角坐标系下构建外部计算区域．在该计算域内，能对任何尾迹和旋涡进行适当的求解．

x	y
−9.39600	−0.05000
−9.39600	4.12600
19.83600	−0.05000
19.83600	4.12600

入口速度应根据雷诺数 2.3×10^6(与汽车长度相关)设定．流动湍流强度假设为 1.8%．

操作过程

(1) 要求学生在上述创建的汽车模型基础上生成其后第二个汽车的网格．(提示：可以将计算区域扩展到增加汽车所处的区域内)

(2) 与前面相似，采用适当的网格．在此可以使用与前面相同的网格方法和边界条件．

(3) 改变前后汽车之间的距离(至少 3 种情况)．讨论流动特性，并比较前后模型的牵引力系数和升力系数(如图 E.3 和图 E.4 所示)．

(4) 如图 E.3 和图 E.4 所示，比较实验结果与牵引力系数和升力系数．

(5) 依模拟获得的牵引力系数和升力系数讨论流动物理特性．

绘制模型结构

(1) 生成一定质量的网格(需考虑数值计算的网格纵横比和网格斜度)．确定已经获得了网格独立性．(提示：使用两个或三个不同网格密度)

(2) 学生必须应用从软件指南和前面作业中获得的知识确定适当的边界条件．(注意：可以采用地面以与空气相同的速度运动的方法对模型进行模拟)

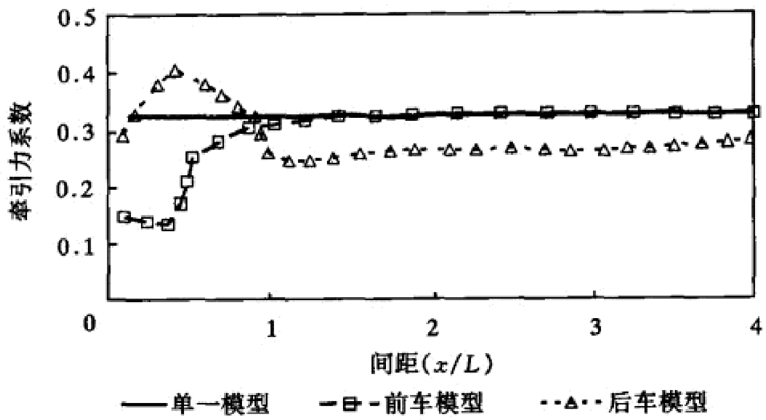


图 E.3 不同车间距条件下单一 Ahmed 模型和双 Ahmed 模型的牵引力系数(选自 Watkins S 和 Vino, 2004)

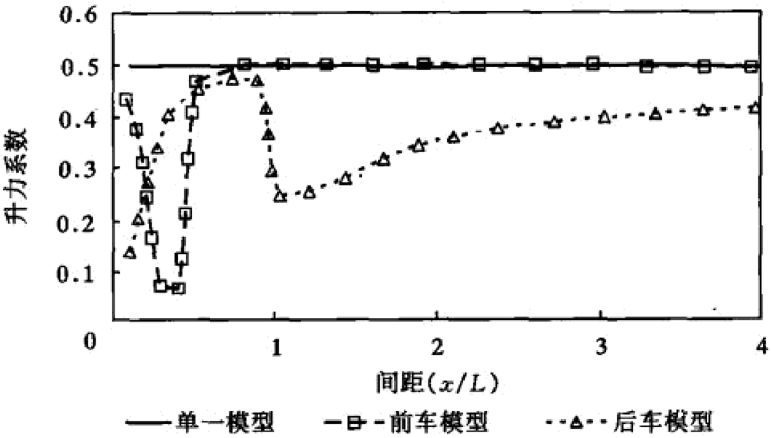


图 E.4 不同车间距条件下单一 Ahmed 模型和双 Ahmed 模型的升力系数 (选自 Watkins S 和 Vino, 2004)

(3) 讨论 y^+ 值在湍流中的重要性. 学生必须确定已经获得可接受的 y^+ 值. 否则给出相应的解释.

3. 作业 3

背景和目的

CFD 可以对与热传递耦合的流体流动进行模拟. 对通道内流体热传递行为和动力学行为的基础研究已经有很长时间了. CFD 模拟可以观察到内部的流动行为和热传递, 这样可以改进具有如下描述的波浪壁面的复杂通道几何形状中的热传递, 在工业换热器中的这种探索正在不断增加.

本作业的目的:

(1) 创建由足够数量的完整波浪组成的波浪通道, 提供充分发展条件;

(2) 应用周期性边界条件创建波浪通道的一部分;

(3) 研究不同湍流模型以及壁面函数对求解的影响；

(4) 采用固定表面温度以及固定表面热流量条件，确定雷诺数与热特性之间的关系；

(5) 比较模拟结果与实验数据，并进行讨论.

问题的描述

通道由重复的部分构成，每一部分由顶部的直面和底部的正弦型曲面构成，如图 E.5 所示.

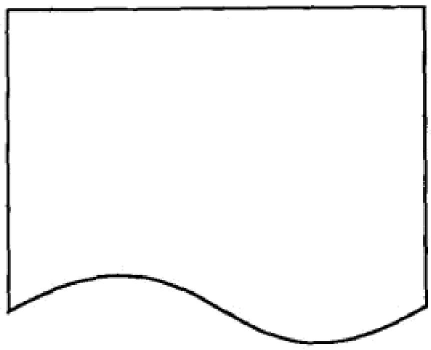


图 E.5　波浪通道的一部分

几何坐标如下：

0	0
0.25	0.1
0.5	0
0.75	-0.1
1	0
1	0
0	1
1	1

空气的流动特性如下：

质量流量：$\dot{m}=0.816\text{kg/s}$;

密度：　$\rho=1\text{kg/m}^3$;

动力黏度：$\mu=0.0001\text{kg/(m·s)}$;

流动温度：$T_b=300\text{K}$;

流体其他热特性选择默认项.

流动初始条件如下：

x 方向的速度＝0.816m/s;

湍动能＝$1\text{m}^2/\text{s}^2$;

湍流耗散率＝$1\times10^5\text{m}^2/\text{s}^3$.

所有湍流模型中均采用增强壁面处理(根据第 6 章的讨论适当调整 y^+ 的值).

操作过程

(1) 创建由足够数量的上述给定部分组成的通道，保证流动处于充分发展状态.（提示：近似由 12 个部分组成）

(2) 将充分发展段内无量纲轴向速度峰值、谷值与实验数据进行比较.

(3) 应用周期性边界条件(见第 7 章)，创建上述模型的一个部分.

(4) 将周期性模型波峰($x=0.25$)、波谷($x=0.75$)处无量纲轴向速度与实验数据进行比较. 讨论整体模型、周期性模型与实验数据的关系.

(5) 应用周期性模型，研究标准 k-ϵ、RNG 以及 Realizable 湍流模型的计算精度，并与实验数据进行比较. 讨论哪种模型最适合对该复杂几何形状下的流动进行模拟.

(6) 对整体模型，给定波浪壁面温度为 500K，讨论传热特性. 改变流动条件，使雷诺数为 10000 和 5400. 比较并讨论流量改变对流动的影响.

(7) 给定波浪壁面表面热流率为 $1000\mathrm{W/m^2}$，采用初始雷诺数，对整体模型，讨论传热特性.

(8) 生成其他感兴趣的结果：速度、湍流参数、温度分布(壁面和流体)、总的传热量以及努塞尔数.

二、CFD 课程设计指南

目　的

CFD 课程设计的目的是为学生提供证明其对 CFD 原理理解、CFD 软件使用能力以及引导他们接触更多 CFD 软件应用的机会. 学生可以自由选择自己感兴趣的课题. 希望选择的 CFD 题目与最后一年毕业设计的题目相关，同时注意所模拟流动问题的诸多约束条件及其复杂性. 因此，建议在进行数值模拟之前，学生应与任课教师就问题进行协商和讨论.

目　标

项目报告应展示学生的如下能力.

(1) 使用商业 CFD 软件的能力：

- 网格生成和网格质量；
- 流动问题设定，即边界条件及求解器设定；
- 合适 CFD 模型的选择，即湍流模型、热传递或其他模拟类型.

(2) 使用 CFD 进行工程设计的能力：

- 减少流体流过物体（例如汽车车体或飞机机翼）时的阻力或增加升力；
- 增加汽车发动机的冷却传热，或者减少热传递，防止热损失；
- 创造期望的流动控制，即在期望的区域内产生相应流动的能力.

(3) 应用 CFD 知识分析数值结果的能力：

- 流动模式和行为的讨论(即尾流、流动分离、边界层流动以及对流等)；

- 讨论 CFD 求解精度与网格质量、流动模型选择以及边界/计算域设定之间的关系；
- 为简化原始几何形状而对实际模型所作的诸多假设．

注意：对所有的 CFD 问题，并非上述所列各项均适用．请与任课教师协商上述问题，确定合适的选题．需要准备项目目的和应用领域的简要提纲、问题描述和项目目标，本部分内容占课程设计分数的 5%．

CFD 项目选题实例：

- 汽车间距对汽车车队的影响；
- 飞机机翼地面效应的 CFD 分析；
- 机翼升力和牵引力性能设计的研究；
- 气流流过自行车运动员头盔的 CFD 模拟；
- 减少汽车车队气体动力学阻力的研究；
- 变水平间距二维机翼上的湍流流动分析；
- 水力发电厂不同区域内的流场研究；
- 对汽车进气管系统建模，并比较不同的设计方案；
- 对机翼后缘流动的数值研究；
- 用 CFD 方法比较各种福勒(fowler)机翼．

三、建议学生准备的 CFD 项目实例

简　介

在航空工业中，翼型设计在机翼和表面性能控制方面起着关键作用．而风洞实验相当耗时且费用昂贵，CFD 成为一种吸引人的选择．机翼流动的建模是一个重要的 CFD 问题．在机翼设计当中，如图 E.6 所示的襟翼展开时增加了机翼拱形，提高了升力(和阻力)．作为升力(和阻力)提升装置，这一情况被用于大多数飞机的起飞和降落(见图 E.7)．

图 E.6　平面襟翼机翼

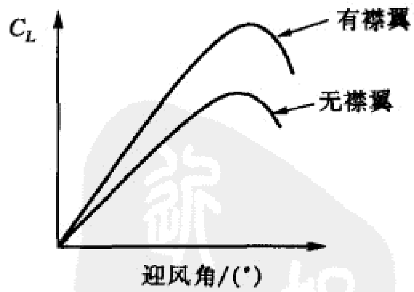


图 E.7　升力曲线

范　围

本项目将对带有 20% NACA 23012 平面襟翼的二维 NACA 23012 机翼的空气动力学特性进行分析．模拟机翼的迎风角为 0°，而襟翼角设置为 0°，10°，20°，30°和 40°．采用雷诺数 1400000 研究这种组合的湍流特性．使用标准 k-ε 湍流模型、RNG k-ε 湍流模型以

及 *Realizable* k-ε 湍流模型确定升力系数、阻力系数及流动分离，并确定最适合的模型.

计算结果将由 Carl Wenzinger 标准实验数据进行验证(Carl J Wenzinger，1937. 见：Pressure distribution over an NACA 23012 Airfoil with an NACA 23012 External-airfoil Flap. NACA Report，No.614).

目 标

- 在机翼/襟翼周围创建高质量的网格；
- 在 $Re=1400000$ 以及 SSL 条件下，应用标准 k-ε 湍流模型，襟翼从 0°到 40°的变化时，模拟机翼/襟翼周围的气流流动；
- 确定机翼/襟翼的升力系数、阻力系数、压力和速度分布；
- 用 RNG k-ε 湍流模型和 Realizable k-ε 湍流模型重复上述模拟；
- 比较三种湍流模型的计算结果，并作讨论；
- 用实验数据评估计算结果的精度.

四、其他 CFD 项目题目

1. CFD 项目 A：后向台阶湍流流动的 CFD 模拟

背 景

后向台阶常用于验证湍流模型、多相流以及基本数值方法等大量流动特性的标准装置. 这种模拟也应用于工业领域中，如燃烧和 HVAC 等.

目 标

(1) 创建适合于湍流模拟的后向台阶的几何模型；

(2) 确定不同网格形式对计算结果的影响；

(3) 进行湍流模拟并与标准数据进行对比；

(4) 确定不同湍流模型对计算结果的影响；

(5) 了解相关的流动特性；

(6) 认真准备简明完整的个人报告.

问题的描述

27℃干燥空气，雷诺数 $Re_h=5100$，流入 2D 台阶高为 h 的后向台阶通道. 该流动结构的尺寸见图 E.8. 在壁面上采用“无滑移”条件，并假设壁面绝对光滑(即粗糙高度为 0m). 来流的湍流强度可假设为 0.01%，并假设壁面与流体的热量交换为绝热(即无热传递). 本项目的目的是期望避免出现脱落的旋涡(即进行稳态分析). 非常精确的直接数值模拟(DNS)已经确定发生在底部壁面边界层分离的重附着发生在 $x=16.28h$ 处.

必要的讨论

(1) 比较如下网格形式：(a)单一结构化四边形网格；(b)在适当区域内细划的非单一结构四边形网格(具有相当的单元数量)；(c)在适当区域内细划的非结构三角形网格(具有相当的单元数量). 讨论不同网格以及网格细划的必要性.

(2) 从(1)中确定最好的网格，对不同的湍流模型：(a)标准 k-ε 湍流模型；(b)Realiz-

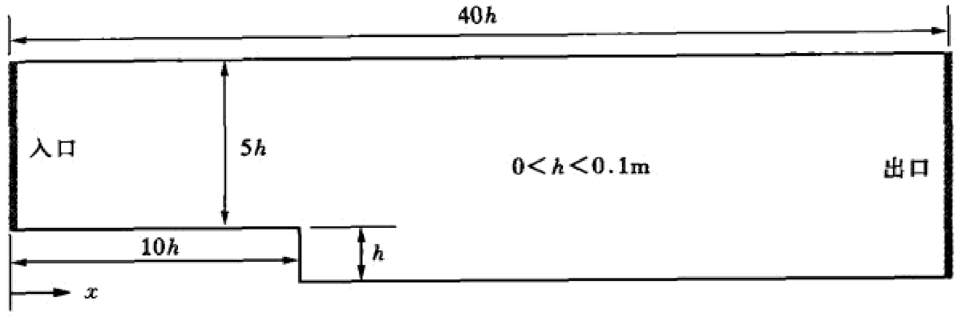


图 E.8

able k-ε 湍流模型，进行适当的设置和计算. 确定哪一种模型可以给出更好的预测. 参考模型的特征方程，讨论模型的不同之处.

(3) 使用由(1)和(2)确定的最好模型，用 370℃ 乙二醇代替干燥空气，在相同的雷诺数($Re_h=5100$)条件下，进行模拟. 比较两种计算结果的异同.

(4) 讨论模拟的相关流动特性.

2. CFD 项目 B: 敞开/封闭车厢小型卡车的 CFD 模拟

背　景

在汽车动力学中，CFD 已经成为一个重要的研究工具. 模拟的目的是为了更好地理解流过复杂几何形状的流动行为，以及考查提高汽车效率的方法.

目　标

(1) 创建二维敞开/封闭车厢卡车的几何模型;

(2) 创建具有网格稳定性的足够精度的网格;

(3) 模拟湍流流动并与标准数据进行对比;

(4) 理解和讨论流动速度和压力等相关流动特性，设计阻力和升力等参数;

(5) 创建一个跟随卡车，并研究不同车间距时的流动特性;

(6) 认真准备简明完整的研究报告.

问题的描述

卡车模型(尺寸见附录)见图 E.9(后挡板封闭). 在雷诺数为 3.3×10^6(与车长相关)时，模拟运动的卡车. 采用标准 k-ε 湍流模型和标准壁面函数. 学生应创建足够大的计算域以捕捉产生的尾迹. 入口对应的湍流强度为 2%，底边界(平行于 x 轴)应设置成为无滑移光滑表面，这样就模拟了风洞的条件. 假设模拟流动系统为绝热并与时间无关. 对于单一后挡板封闭的卡车，发现其阻力系数达到 0.44.

必要的讨论

(1) 确定适当的边界层，为模拟提供足够精度的计算网格，包括对标准壁面湍流模型的第一边界层厚度的计算.

(2) 将模拟获得的阻力系数与标准数据进行对比，确定网格的独立性.

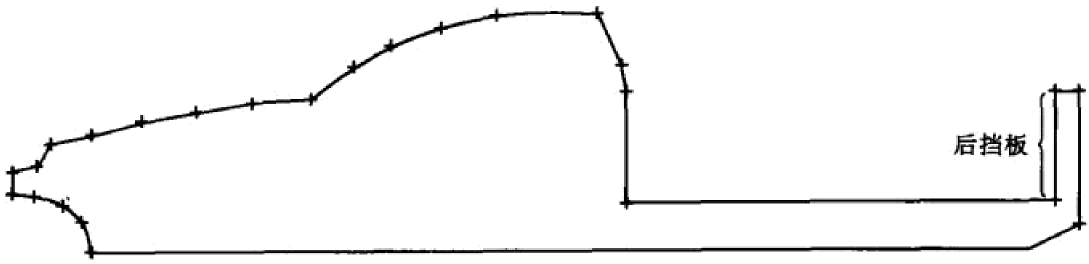


图 E.9

(3) 比较并讨论后挡板敞开和后挡板封闭时单个卡车的流动特性，确认是否对汽车整体阻力产生影响.

(4) 比较并讨论增加后车以及改变前后车间距(建议不要超过车长的 3 倍)对流动的影响. 在本研究中，后挡板可以设置为敞开或封闭状态. 绘制并比较不同车间距对阻力和升力系数的影响，并加以讨论.

注意：增加卡车时，需要扩展计算域的长度.

附 录

后挡板封闭卡车的相关尺寸如下：

x	y	x	y
0	0.354	0	0.224
0.0215	0.246	0.0215	0.354
0.045	0.199	0.4226	0.246
0.4226	0.354	0.4264	0.38
0.4504	0.432	0.5458	0.432
0.5981	0.419	0.6438	0.402
0.6795	0.38	0.7185	0.35
0.7743	0.346	0.8284	0.337
0.8792	0.328	0.9263	0.199
0.9263	0.199	0.9267	0.315
0.935	0.229	0.9518	0.246
0.966	0.307	0.9771	0.285
0.9798	0.255	1	0.26
1	0.281		

3. CFD 项目 C：计算机内电子器件的冷却研究

背 景

CFD 是一种功能强大的优化工具，包括在热量传递中的应用. 最近，计算机内部电

子元件的冷却成为一个重要课题. 特别是随着计算机处理能力的不断增强，产生了更多的热量，这可能导致计算机硬件的损坏或失效.

设计项目

模拟的目的如下：

(1) 为分析计算机内空气冷却的传热特性和流动特性，准备具有足够计算精度的合适网格；

(2) 明确计算机内电子元件冷却的要求；

(3) 通过确认传热和流动行为，设计系统内电子元件的最佳位置，使之在安全的范围内运行；

(4) 确定电子元件的最佳位置.

问题的描述

如图 E.10 所示的系统实例，其中长度单位为 mm. 有 2 个排气口(宽 50mm)，1 个空气进口(宽 80mm). 进入系统的空气温度为 20℃，流量为 0.1m^3/s，其湍流强度为 5%. 假设系统壁面为光滑、绝热. 在系统中增加：(a)1 个尺寸为 25mm×25mm、产热量为 800W/m^2 的处理器；(b)3 个尺寸为 135mm×30mm、产热量为 60W/m^2 的 RAM 模块；(c)3 个尺寸为 100mm×50mm、产热量为 150W/m^2 的其他元件. 使用标准 k-ε 湍流模型模拟其中的流动.

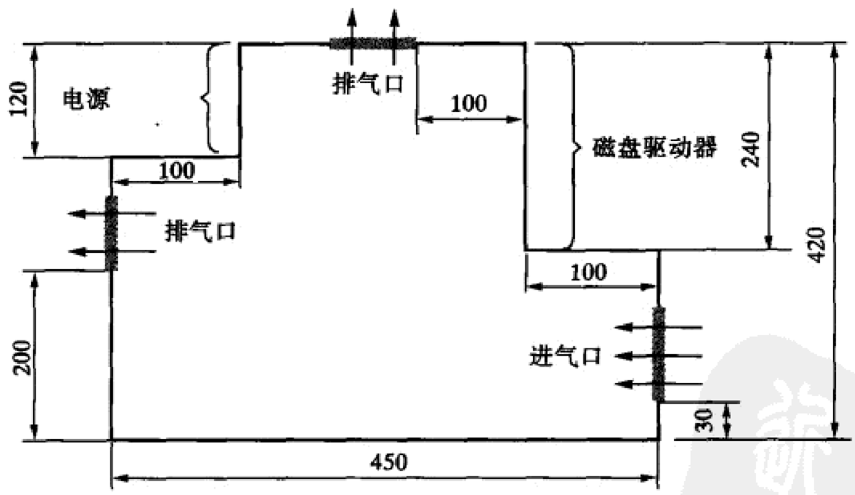


图 E.10

必要的讨论

根据给定的边界条件，在系统中布置上述所列电子元件，至少给出 3 种不同的设计方案. 此外，分析流动及传热特性. 注意任何元件表面温度不得高于 80℃，依次确定元件的最佳位置.

参考文献

[1] Ahmed S R, Ramm G, Faltin G. Some Salient Features of the Time-Averaged Ground Vehicle Wake[C]. SAE Technical Paper Series 840300, 1984.

[2] Aiba S, Tsuchida H, Ota T. Heat Transfer Around Tubes in In-Line Tube Banks[J]. Bulletin of the JSME, 1982a, 25: 919-926.

[3] Aiba S, Tsuchida H, Ota T. Heat Transfer Around Tubes in Staggered Tube Banks[J]. Bulletin of the JSME, 1982b, 25: 927-933.

[4] American Institute of Aeronautics and Astronautics. AIAA G-077-1998 Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations[S]. Reston, USA, 1998.

[5] Anderson W, Thomas J L, Van Leer B. Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations[J]. AIAA J., 1986, 24: 1453-1460.

[6] Apsley D, Chen W L, Leschziner M, et al. Nonliner Eddy Viscosity Modelling of Separated Flows[J]. I-AHR J. Hydraulic Research, 1997, 35: 723-748.

[7] Arcilla A S, Häuser J, Eiseman P R, et al. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields[M]. Amsterdam: North-Holland, 1991.

[8] Balaras E, Benocci C, Piomelli U. Two-layer Approximate Boundary Conditions for Large-Eddy Simulations [J]. AIAA J., 1996, 34: 1111-1119.

[9] Baldwin W S, Lomax H. Thin-layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flow [C]. AIAA Paper, 1978: 87-257.

[10] Battan P, Goldberg U, Chakravarthy S. Interfacing Statistical Turbulence Closures with Large-Eddy Simulation[J]. AIAA J., 2004, 42: 485-492.

[11] Baum H R, McCaffrey B J. Fire Induced Flow Field-Theory and Experiment, Fire Safety Science[C]. Proc. 2nd Int. Symp., 1989: 129-148.

[12] Beam R M, Warming R F. An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations [J]. AIAA J., 1978, 16: 393-402.

[13] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless Methods: An Overview and Recent Developments [J]. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1996, 139: 3-47.

[14] Benson R A, McRae D S. A Solution Adaptive Mesh Algorithm for Dynamic/Static Refinement of Two and Three Dimensional Grids[C]//3rd Int Conf Num. Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields. Barcelona, Spain, 1991.

[15] Benzi R, Struglia M V, Tripiccione R. Extended Self-Similarity in Numerical Simulations of Three-dimensional Anisotropic Turbulence[J]. Phys. Rev. E, 1996, 53: 5565-5568.

[16] Bhatnagar P L, Gross E P, Krook M. A Model for Collision Processes in Gases. Ⅰ: Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-component System[J]. Phys. Rev., 1954, 94: 511-525.

[17] Bourgoyne D A, Ceccio S L, Dowling D R, et al. Hydrofoil Turbulent Boundary Layer Separation at High Reynolds Numbers[C]//23rd Symp. Naval Hydrodynamics. Val de Reuil, France, September,

2000: 17-22.

[18] Bird G A. Direct Simulation of Gas at the Molecular Level[C]//First World Congr. Comput. Mech. Austin, TX., 1986.

[19] Bird G A. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows[M]. Oxford Press, Clarenden, UK, 1994.

[20] Briley W R, McDonald H. Solution of the Multidimensional Compressible Navier-Stokes Equations by a Generalized Implicit Method[J]. J. Comp. Phys., 1977, 24: 372-379.

[21] Bradshaw P. Turbulence: The Chief Outstanding Difficulty of Our Subject[J]. Exp. Fluids, 1994, 16: 203-216.

[22] Chang J L C, Kwak D. On the Method of Pseudo Compressibility for Numerically Solving Incompressible Flows[C]. AIAA Paper 84-0252, 1984.

[23] Chen L, Tu J Y, Yeoh G H. Numerical Simulation of Turbulent Wake Flows Behind Two Side-By-Side Cylinders[J]. J. Fluids Structures, 2003, 18: 387-403.

[24] Chen S, Doolen G D. Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows[J]. Ann. Rev. Fluid Mech., 1998, 30: 329-364.

[25] Cheng H K. Perspectives on Hypersonic Viscous Flow Research[J]. Ann. Rev. Fluid Mech., 1993, 25: 455-484.

[26] Cheng H K, Emmanual G. Perspectives on Hypersonic Nonequilibrium Flow[J]. AIAA J., 1995, 33: 385-400.

[27] Cheung S C P, Yeoh G H, Cheung A L K, et al. Flickering Behaviour of Turbulent Fires Using Large Eddy Simulation[J]. Numer. Heat Transfer, Part A: Applications, 2007.

[28] Chiesa M, Mathiesen V, Melheim J A, et al. Numerical Simulation of Particulate Flow by the Eulerian-Lagrangian and the Eulerian-Eulerian Approach with the Application to a Fluidized Bed[J]. Comp. Chem. Eng., 2005, 29: 291-304.

[29] Chorin A J. Numerical Solution of Navier-Stokes Equations[J]. Math. Comp., 1968, 22: 745-762.

[30] Choy Y H, Merkle C L. The Application of Preconditioning in Viscous Flows[J]. J. Comp. Phys., 1993, 105: 207-223.

[31] Colella P, Woodward P. The Piecewise Parabolic Method for Gas-Dynamical Simulations[J]. J. Comp. Phys., 1984, 54: 174.

[32] Cottet G H, Poncet P. Advances in Direct Numerical Simulations of 3D Wall-Bounded Flows by Vortex-in-Cell Methods[J]. J. Comp. Phys., 2004, 193: 136-158.

[33] Colburn A P. A Method of Correlating Forced Convection Heat Transfer Data and a Comparison with Fluid Friction[J]. Trans. American Institute of Chemical Engineers, 1933, 29, American Institute of Electrical Engineers, New York: 174-210.

[34] Cox G, Chitty R. A Study of the Deterministic Properties of Unbounded Fire Plumes[J]. Combust. Flame, 1980, 39: 191-209.

[35] Crowe C, Sommerfield, M Tsuji Y. Multiphase Flows with Droplets and Particles[M]. Florida: CRC Press, 1998.

[36] Daru V, Tenaud C. High Order One-Step Monotonicity-Preserving Schemes for Unsteady Compressible Flow Calculations[J]. J. Comp. Phys. ,2004,193:563-594.

[37] Davidson L,Peng S H. Hybrid LES-RANS: A One-equation SGS Model Combined with a k-ω Model for Predicting Recirculating Flows[J]. Int. J. Num. Meth. Fluids, 2003,43:1003-1018.

[38] Demirdzic I, Muzaferija, S Peric M, et al. Numerical Method for Simulation of Flow Problems Involving Moving and Sliding Grids[C]//Proc. 7th Int. Symp. Computational Fluid Dynamics. Int. Academic Publishers, Beijing, China,1997b.

[39] Deng S, Jiang L,Liu C. DNS for Flow Separation Control Around Airfoil by Steady and Pulsed Jets[J]. Computers & Fluids,2007.

[40] Desjardin P E, Frankel S H. Two-Dimensional Large Eddy Simulation of Soot Formation in the Near-Field of a Strongly Radiating Nonpremixed Acetylene-Air Turbulent Jet Flame[J]. Comb. Flame, 1999, 119:121-132.

[41] Dopazo C. Recent Development in PDF Methods, Turbulent Reacting Flows, P. A. Libby and F. A. Williams[M]. New York:Academic Press,1993.

[42] Drikakis D. Embedded Turbulence Model in Numerical Methods for Hyperbolic Conservation Laws[J]. Int. J. Num. Meth. Fluids,2002,39:763-781.

[43] Duarte C A,Oden J T. An H-P Adaptive Method Using Clouds[J]. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1996,139:237-262.

[44] Dufort E C,Frankel S P. Stability Conditions in the Numerical Treatment of Parabolic Differential Equations[J]. Math. Tables and Other Aids to Computation, 1953,7:559-573.

[45] Ellero M, Kröger M,Hess. Viscoelastic Flows Studied by Smoothed Particle Dynamics[J]. J. Non-Newton. Fluid Mech., 2002, 105:35-51.

[46] Farhat C. CFD on Moving Grids: From Theory to Realistic Flutter, Maneuvering, and Multidisciplinary Optimization[J]. Int. J. Comp. Fluid Dyn., 2005,19:595-603.

[47] Forum H P F. High Performance Fortran Language Specification[J]. Sci. Prog. ,1993,2:1-70.

[48] Forum M P I. MPI: A Message-Passing Interface Standard[J]. J. Supercomputer Appl., 1994,8.

[49] Fauci L J, McDonald A. Sperm Moltility in the Presence of Boundaries[J]. Bull. Math. Biol., 1994, 57:679-699.

[50] Fujii K,Obayashi S. Navier-Stokes Simulations of Transonic Flows over a Practical Wing Configuration [J]. AIAA J. ,1987a, 25:368-370.

[51] Fujii K,Obayashi S. Navier-Stokes Simulations of Transonic Flows over a Wing Fuselage Configuration [J]. AIAA J. ,1987b, 25:1587-1596.

[52] Fujii K. Progress and Future Prospects of CFD in Aerospace- Wind Tunnel and Beyond[J]. Prog. Aero. Sci. ,2005, 42:455-470.

[53] Garnier E, Mossi M, Sagaut P, et al. On the Use of Shock-Capturing Schemes for Large-Eddy Simulation[J]. J. Comp. Phys. ,1999,153:273-311.

[54] Germano M, Piomelli U, Moin P, et al. A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model[J]. Phys. Fluids,1991,3:1760-1765.

[55] Ghias R, Mittal R, Lund T S. A Non-body Conformal Grid Method for Simulation of Compressible Flows with Complex Immersed Boundaries[C]. AIAA paper 2004-0080,2004.

[56] Godunov S K. A Finite Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics[J]. Mat. Sb., 1959,47:357.

[57] Gresho P M, Sani R L. On Pressure Boundary Conditions for the Incompressible Navier-Stokes Equations [J]. Int. J. Num. Meth. Fluids,1990,7:11-46.

[58] Gresho P M. Incompressible Fluid Dynamics: Some Fundamental Formulation Issues[J]. Ann. Rev. Fluid Mech.,1991,23:182-188.

[59] Grotberg J B, Jensen O E. Biofluid Mechanics in Flexible Tubes[J]. Ann Rev. Fluids Mech., 2004,36: 121-147.

[60] Guerts B J. Modern Simulation Strategies for Turbulent Flow[M]. Philadelphia:Edwards, Inc., 2001.

[61] Gunzburger M D, Nicolades R A. Incompressible Computational Fluid Dynamics Trends and Advances [M]. London:Cambridge University Press,1993.

[62] Gustafsson B, Lotsedt P, Goran, A. A Fourth-Order Difference Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations. Numerical Simulation of Incompressible Flows[M]. Washington: World Scientific Press,2002.

[63] Hafez M. Numerical Simulation of Incompressible Flows[M]. Washington: World Scientific Press,2002.

[64] Hájek J, Kermes V, Stehlík P, et al. Utilizing CFD as an Efficient Tool for Improved Equipment Design [J]. Heat Transfer Engineering, 2005,26:15-24.

[65] Harlow F H, Welch J E. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow with Free Surface[J]. Phys. Fluids, 1965,8:2182-2189.

[66] Harten A. ENO Schemes with Subcell Resolution[J]. J. Comp. Phys., 1989,83:148.

[67] Hartwich P M, Agrawal S. Method for Perturbing Multi-block Patched Grids in Aeroelastic and Design Optimization Applications[C]. AIAA Paper,1997:91-2038.

[68] Hassan O, Probert E J. Grid Control and Adaptation, Handbook of Grid Generation[M]//Thompson J F, Soni B K, Wetherhill N P. Florida:CRC Press,1999,35-1 to 35-29.

[69] Hazel A L, Heil M. Steady Finite-Reynolds-Number Flows in Three-Dimensional Collapsible Tubes[J]. J. Fluid Mech.,2003,486:79-103.

[70] He X, Doolen G D. Lattice Boltzmann Method on Curvilinear Coordinates System: Vortex Shedding Behind a Circular Cylinder[J]. Phys. Rev. E, 1997,56:434-440.

[71] He X, Luo L S. A Priori Derivation of the Lattice Boltzmann Equation[J]. Phys. Rev. E, 1997,55: 6333-6336.

[72] Heil M, Pedley T J. Large Post-Buckling Deformations of Cylindrical Shells Conveying Viscous Flow[J]. J. Fluids Struct.,1996,10:565-599.

[73] Heil M. Stokes Flow In Collapsible Tubes: Computation and Experiment[J]. J. Fluid Mech.,1997, 353:285-312.

[74] Hieber S E, Koumoutsakos P. A Lagrangian Particle Level Set Method[J]. J. Comp. Phys.,2005,210: 342-367.

[75] Hirt C W, Nichols B D. Volume of Fluid (VOF) Method for Dynamics of Free Boundaries[J]. J. Comp. Phys., 1981, 39:201-225.

[76] Hörschler I, Meinke M, Schröder W. Numerical Simulation of the Flow Field in a Model of the Nasal Cavity[J]. Comput. Fluids., 2003, 32:39-45.

[77] Hou S, Zuo Q, Chen S, et al. Simulation of a Cavity Flow by the Lattice Boltzmann Method[J]. J. Comp. Phys., 1995, 118:329-347.

[78] Hou S, Sterling J, Chen S, et al. A Lattice Boltzmann Subgrid Model for High Reynolds Number Flows [J]. Fields Inst. Comm., 1996, 6:151-166.

[79] Hu F Q, Hussaini M Y, Manthey J L. Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics[J]. J. Comp. Phys., 1996, 124:177-191.

[80] Huang W, Ren Y, Russel R D. Moving Mesh Methods Based on Moving Mesh Partial Differential Equations[J]. J. Comp. Phys., 1994, 113:279-290.

[81] Huang W, Russel R D. Moving Mesh Strategy Based on a Gradient Flow Equation for Two-dimensional Problems[J]. SIAM J. Sci. Comp., 1999, 20:998-1015.

[82] Huang W. Pratical Aspects of Formulation and Solution of Moving Mesh Partial Differential Equations [J]. J. Comp. Phys., 2001, 171:753-775.

[83] Hubbard B J, Chen H C. A Chimera Scheme for Incompressible Viscous Flows with Applications to Submarine Hydrodynamics[C]. AIAA Paper 94-2210, 1994.

[84] Hubbard B J, Chen H C. Calculation of Unsteady Flows around Bodies with Relative Motion Using a Chimera RANS Method[C]. Proc. 10th ASCE Engineering Mechanics Conference, Vol. Ⅱ:7832-785, Univ. of Colorado at Boulder, Boulder, CO, May 21-24, 1995.

[85] Hucho W H. Road Vehicle Aerodynamic Design, An Introduction[M]. Edinburgh, Harlow: Addison Wesley Longmann Ltd., 1996.

[86] Iaccarino G, Kalitzin G, Elkins C J. Numerical and Experimental Investigation of the Turbulent Flow in Ribbed Serpentine Passage[J]. Ann. Res. Briefs, Cent. Turb. Res., 2003:379-388.

[87] Ingram C L, McRae D S, Benson R A. Time Accurate Simulation of a Self-Excited Oscillatory Supersonic External Flow with a Multi-Block Solution Adaptive Mesh Algorithm[C]//AUAA 9303387, 11th Computational Fluid Dynamics Conf. Orlando, Florida, 1993.

[88] Ince N Z, Launder B E. Three-Dimensional and Heat-Loss Effects on Turbulent Flow in a Nominally Two-Dimensional Cavity[J]. Int. J. Heat Fluid Flow, 1995, 16:171-177.

[89] Inthavong K, Tian Z F, Li H F, et al. A Numerical Study of Spray Particles Deposition in a Human Nasal Cavity[J]. Aerosol Sci. Tech., 2006, 40:1034-1045.

[90] Issa R I. Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator-Splitting[J]. J. Comp. Phys., 1986, 62:40-65.

[91] Ishii M, Hibiki T. Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flows[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[92] Jiang G S, Shu C W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes[J]. J. Comp. Phys., 1996, 126:202-228.

[93] Jiang L, Choudari M, Chang C, et al. Numerical Simulations of Laminar-Turbulent Transition in Super-

sonic Boundary Layers[C]. AIAA Paper 2006-3224, 2006.

[94] Liseikin V D. Grid Generation Methods[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

[95] Kadanoff L. On Two Levels[J]. Phys. Today, 1986, 39: 7-9.

[96] Kader B. Temperature and Concentration Profiles in Fully Turbulent Boundary Layers[J]. Int. J. Heat Mass Transfer, 1993, 24: 1541-1544.

[97] Kandil O A, Chung H A. Unsteady Vortex-Dominated Flows Around Maneuvering Wings over a Wide Range of Mach Numbers[C]//AIAA Paper No. 88-0317, AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit. Reno, Nevada, 1988.

[98] Kallinderis Y. Adaptive Methods for Compressible CFD[J]. Comp. Meth. Appl. Sci. Eng., 2000, 189: Preface.

[99] Kamakoti R, Shyy W. Fluid-Structure Interaction for Aeroelastic Applications[J]. Prog. Aero. Sci., 2004, 40: 535-558.

[100] Kato M, Launder B E. Three-dimensional Modelling and Heat-loss Effects on Turbulent Flow in a Nominally Two-dimensional Cavity[J]. Int. J. Heat and Fluid Flow, 1993, 16: 171-177.

[101] Keyhani K, Scherer P W, Mozell M M. Numerical Simulation of Airflow in the Human Nasal Cavity [J]. J. Biomech. Eng., 1995, 117: 429-441.

[102] Khan W A, Culham J R. Yovanovich M M. Analytical Model for Convection Heat Transfer from Tube Banks[J]. J. Thermophysics & Heat Transfer, 2006, 20: 720-727.

[103] Kim S E, Choudbury D. A Near-Wall Treatment Using Wall Functions Sensitized to Pressure Gradient [J]. ASME FED, 1995, 217, Separated and Complex Flows, ASME.

[104] Kiris C, Kwak D, Rogers S. Incompressible Navier-Stokes Solvers in Primitive Variables and their Applications to Steady and Unsteady Flow Simulations: Numerical Simulation of Incompressible Flows [M]. Washington: World Scientific Press, 2002.

[105] Knio O M, Ghoniem A F. The Three-dimensional Structure of Periodic Vorticity Layers Under Non-symmetrical Conditions[J]. J. Fluid Mech., 1992, 243: 353-392.

[106] Kliafas Y, Holt M. LDV Measurements of a Turbulent Air-Solid Two-Phase Flow in a 90° Bend[J]. Exp. Fluids, 1987, 5: 73-85.

[107] Koelbel C, Loveman D, Schreiber R, et al. The High Performance Fortran Handbook[M]. London: MIT Press, Cambridge, MA, 1994.

[108] Kolev. Multiphase Flow Dynamics 1[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

[109] Koobus B, Tran H, Farhat C. Computation of Unsteady Viscous Flows Around Moving Grids Using k-ε Turbulence Model on Unstructured Dynamics Grids[J]. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 2000, 190: 1441-1466.

[110] Koumoutsakos P, Leonard A. High Resolution Simulation of the Flow Around an Impulsively Started Cylinder Using Vortex Methods[J]. J. Fluid Mech., 1995, 296: 1-38.

[111] Koumoutsakos P. Multiscale Flow Simulations Using Particles[J]. Ann. Rev. Fluid Mech., 2005, 37: 457-487.

[112] Krasny R. A Study of Singularity Formation in a Vortex Sheet by the Point Vortex Approximation[J].

J. Fluid Mech. ,1986,167:65-93.

[113] Ku D. Blood Flow in Arteries[J]. Ann. Rev Fluids Mech. , 1997,29:399-434.

[114] Kuzan J D. Velocity Measurements for Turbulent Separated and Near-Separated Flows Over Solid Waves [D]. Dept. Chem. Eng. , Univ. Illonois, Urbana, Illinois,1986.

[115] Kwak D, Kiris C. Steady and Unsteady Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations[J]. AIAA J. ,1991,29:603-610.

[116] Kwak D, Kiris C, Kim C S. Computational Challenges of Viscous Incompressible Flows[J]. Comp. Fluids,2005,34:283-299.

[117] Labournasse E, Sagaut P. Advance in RAN-LES Coupling, a Review and an Insight on the NLDE Approach[J]. Arch. Comp. Meth. Eng. ,2004,11:199-256.

[118] De Langhe C, Merci B, E Dick. Hybrid RANS/LES Modelling with an Approximate Renormalization Group Ⅰ: Model Development[J]. J. Turb,2005a,6:1-18.

[119] De Langhe C, Merci B, Lodefier K, et al. Hybrid RANS/LES Modelling with an Approximate Renormalization Group Ⅱ: Applications[J]. J. Turb,2005b,6:1-16.

[120] Launder B E, Spalding D B. The Numerical Computation of Turbulent Flows[J]. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. ,1974,3:269-289..

[121] Launder B E, Reece G J, Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds Stress Turbulence Closure [J]. J. Fluid Mech. ,1975, 68(3):537-566.

[122] Launder B E. Second-moment Closures: Present and Future? [J]. Int. J. Heat Fluid Flow,1989,10: 282-300.

[123] Lax P D, Richtmyer R D. Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations[J]. Communication on Pure Applied Mathematics,1956,9:267-293.

[124] Lei M, Archie J, Kleimstreuer C. Computational Design of a Bypass Graft that Minimizes Wall Shear Stress Gradients in the Region of the Distal Anastomcsis[J]. J. Vasc. Surg. ,1997,25:637-646.

[125] Lilek Z, Muzaferija S, Peric M, et al. Computation of Unsteady Flows Using Non-matching Blocks of Structured Grids[J]. Num. Heat Transfer, Part B: Fund. ,1997a,23:369-384.

[126] Lilly D K. A Proposed Modification of the Germano Subgrid-Scale Closure Model[J]. Phys. Fluid, 1992,4:633-635.

[127] Liu X, Osher S, Chan T. Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes[J]. J. Comp. Phys. ,1994, 115:200-212.

[128] Leonard B P. The ULTIMATE Conservative Difference Scheme Applied to Unsteady One-Dimensional Advection[J]. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. ,1991,88:17.

[129] Loner R, Yang C, Cebral J, et al. On Incompressible Flow Solvers. Numerical Simulation of Incompressible Flows[M]. Washington:World Scientific Press,2002.

[130] Luo L. Symmetry Breaking of Flow in 2-D Symmetric Channels: Simulations by Lattice Boltzmann Method[J]. Int. J. Mod. Phys. C, 1997,8:859-867.

[131] MacCormack R W. The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering[C]. AIAA Paper,1969: 60-354.

[132] MacCormak R W, Paullay A J. Computational Efficiency Achieved by Time Splitting of Finite Difference Operators[C]. AIAA Paper, 1972:72-154.

[133] Magnussen B F, Hjertager B H. On Mathematical Modelling of Turbulent Combustion with Special Emphasis on Soot Formation and Combustion[C]//16th Symp. (Int.) on Comb. The Combustion Institute, 1976:1405-1414.

[134] Malalasekara W M G, Versteeg H K, Gilchrist K. A Review of Research and an Experimental study of the Pulsation of Buoyant Diffusion Flames and Pool Fires[J]. Fire Mater., 1996, 20:261-271.

[135] MATLAB. The Student Edition of MATLAB[M]. New Jersey: The Math Works Inc., Prentice Hall, 1992.

[136] Mavriplis D. Multigrid Solution of the Two-dimensional Euler Equations on Unstructured Triangular Meshes[J]. AIAA J., 1988, 26:824-831.

[137] Mattson T. Progamming Environments for Parallel and Distributed Computing: A Comparison of p4, PVM, Linda and TCGMSG[J]. Int. J. Supercomputing, 1995, 9:138-161.

[138] McDonald P W. The Computation of Transonic Flow through Two-Dimensional Gas Turbine Cascades [C]//ASME Paper 71-GT-89, Gas Turbine Conference and Products Show. Houston, Texas, 1971.

[139] McCaffrey B J. Purely Buoyant Diffusion Flames: Some Experimental Results[C]. NBSIR 79-1910, NIST, 1979.

[140] McCaffrey B J. Momentum Implications for Buoyant Diffusion Flames[J]. Combust. Flame, 1983, 52: 149-216.

[141] McRae D S. R-Refinement Grid adaptation and Issues[J]. Comp. Meth. Appl. Sci. Eng., 2000, 189: 1288-1294.

[142] Meneveau C, Lund T S, Cabot W H. A Lagrangian Dynamic Subgrid-Scale Model of Turbulence[J]. J. Fluid Mech., 1996, 319:353-385.

[143] Métais O, Lesieur M. Spectral Large-Eddy Simulation of Isotropic and Stably Stratified Turbulence[J]. J. Fluid Mech., 1992, 256:157-194.

[144] Menter F R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications[J]. AIAA J., 1994a, 32:1598-1605.

[145] Menter F R. Eddy-Viscosity Transport Equations and Their Relation to the k-ϵ Model[C]. NASA-TM-108854, 1994b.

[146] Mittal R, Moin P. Suitability of Upwind-Biased Finite Difference Schemes for Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows[J]. AIAA J., 1997, 35:1415.

[147] Mittal R, Utturkar Y, Udaykumar H S. Computational Modeling and Analysis of Biomimetric Flight Mechanisms[C]. AIAA Paper 2002-0865, 2002.

[148] Mittal R, Seshadri V, Udaykumar H S. Flutter, Tumble and Vortex Induced Autorotation[J]. Theo. Comp. Fluid Dyn., 2004, 17:165-170.

[149] Mittal R, Iaccarino G. Immersed Boundary Methods[J]. Ann. Rev. Fluid Mech., 2005, 37:239-261.

[150] Monaghan J J. An Introduction to SPH[J]. Comp. Phys. Comm., 1988, 48:89-96.

[151] Morsi S A, Alexander J A. An Investigation of Particle Trajectories in Two-Phase Systems[J]. J. Fluid

Mech. ,1972, 55:193-201.

[152] Morsi Y S, Tu J Y, Yeoh G H, et al. Principal Characteristics of Turbulent Gas-Particulate Flow in the Vicinity of Single Tube and Tube Bundle Structure[J]. Chem. Eng. Sci. ,2004,59:3141-3157.

[153] Morris P J, Long L N, Wang Q, et al. Numerical Prediction of High-Speed Jet Noise[C]. AIAA Paper,1997:91-1958.

[154] Morris P J, Long L N, Wang Q, et al. High-Speed Jet Noise SImulations[C]. AIAA Paper,1998:98-2290.

[155] Muntz E P. Rarefied Gas Dynamics[J]. Ann. Rev Fluid Mech., 1989,21:387-417.

[156] Murakami S. Comparison of Various Turbulence Models Applied to a Bluff Body[J]. J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. ,1993,46:21-36;1993,47:21-36.

[157] Najm H H, Wyckoff P S, Knio O M. A Semi-implicit Numerical Scheme for Reacting Flow Ⅰ: Stiff Chemistry[J]. J. Comp. Phys., 1998,143:381-402.

[158] Oberkampf W L, Trucano T G, Hirsch C. Verification, Validation and Predictive Capavility in Computational Engineering and Physics[M]. Maryland: 21st Century Workshop, John Hopkins University/Applied Physics Laboratory,2002.

[159] Oran E S, Oh C K, Cybyk B Z. Direct Simulation Monte Carlo: Recent Advances and Applications[J]. Ann. Rev. Fluid Mech. ,1998, 30:403-441.

[160] Orszag S A, Israeli N, Deville M O. Boundary Conditions for Incompressible Flow[J]. J. Sci. Comp., 1986,1:75-111.

[161] Park N, Yoo J Y, Choi D. Discretisation Errors in Large-Eddy Simulation on the Suitability of Centered and Upwind-Biased Compact Difference Schemes[J]. J. Comp. Phys. ,2004,198:580-616.

[162] Patankar S V, Spalding D B. A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows[J]. Int. J. Heat Mass Transfer, 1972,15:1787-1806.

[163] Patel V C, Rodi W, Scheuerer G. Turbulence Model for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review[J]. AIAA J. ,1985,23:1308-1319.

[164] Peaceman D W, Rachford H H. The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations [J]. J. Soc. Ind.. Appl. Math., 1955,3(1):28-41.

[165] Perktold K, Resch M, Peter R O. Three-dimensional Numerical Analysis of Pulsatile Flow and Wall Shear Stress in the Carotid Artery Bifurcation[J]. J. Biomech. ,1991,24:409-420.

[166] Peskin C S. Flow Patterns Around Heart Valves: A Digital Method for Solving the Equations of Motion [D]. Physiol., Albert Einstein Coll. Med., Univ. Microfilms,1972, 378:72-30.

[167] Peters N. Turbulent Combustion[M]. London: Cambridge University Press,2000.

[168] Posner J D, Buchanan C R, Dunn-Rankin D. Measurement and Prediction of Indoor Air Flow in a Model Room[J]. Energy Buildings,2003,35:269-289.

[169] Pope S B. Lagrangian PDF Methods for Turbulent Flows[J]. Ann. Rev. Fluid Mech. ,1994,26:23-63.

[170] Portscht R. Studies on Characteristic Fluctuations of the Flame Radiation Emitted by Fires[J]. Combust. Sci. Tech. ,1975,10:73-84.

[171] Piomelli U, Ferziger J H, Moin P. Models for Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flows Including Transpiration[R]//Technical Report, Report TF-32, Dept. Mech. Eng. Stanford University, 1987.

[172] Piomelli U, Ferziger J H, Moin P, et al. New Approximate Boundary Conditions for Large Eddy Simulations of Wall-Bounded Flows[J]. Phys. Fluids, 1989, A1:1061-1068.

[173] Rai M M, Moin P. Direct Simulation of Turbulent Flow Using Finite-Difference Schemes[J]. J. Comp. Phys., 1991, 96:15-53.

[174] Rajamani G K. CFD Analysis of Air Flow Interactions in Vehicle Platoons[D]. RMIT University, Australia, 2006.

[175] Rappitsch G, Perktold K. Pulsatile Albumin Transport in Large Arteries[J]. J. Biomech. Eng., 1996, 118:511-519.

[176] Rhie C M, Chow W L. A Numerical Study of the Turbulent Flow Past An Isolated Airfoil with Trailing Edge Separation[J]. AIAA J., 1983, 21:1525-1532.

[177] Rizzi A W, Inuoye M. Time Split Finite Volume Method for 3D Blunt Body Flows[J]. AIAA J., 1973, 11:1478-1485.

[178] Roache P J. Quantification of Uncertainty in Computational Fluid Dynamics[J]. Ann. Rev. Fluid Mech., 1997, 29:123-160.

[179] Rodi W. Turbulence Models and Their Application in Hydraulics: A State of the Art Review[M]. IAHR, Delft, The Netherlands, 1980.

[180] Rodi W. Experience with Two-Layer Models Combining the k-ϵ Model with a One-Equation Model Near the Wall[C]. AIAA Paper, 1991: 91-0216.

[181] Rodi W. Turbulence Models and Their Application in Hydraulics[M]. Balkema, Rotterdam, 1993.

[182] Roe P L. Computational Fluid Dynamics: Retrospective and Prospective[J]. Int. J. Comp. Fluid Dyn., 2005, 19:581-594.

[183] Roma A M, Peskin C S, Berger M J. An Adaptive Version of the Immersed Boundary Method[J]. J. Comp. Phys., 1999, 153:509-534.

[184] Rosenfeld M, Kwak D, Vinokur M. A Fractional-Step Method for Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations in Generalized Coordinate Systems[J]. J. Comp. Phys., 1991, 94:102-137.

[185] Rosenhead L. The Spread of Vorticity in the Wake Behind a Cylinder[J]. Proc. R. Soc. A, 1930, 127: 590-512.

[186] Ryck B, Makiola B. Particle Dispersion in a Single-Sided Backward Facing Step Flow[J]. Int. J. Multiphase Flow, 1988, 14:787-800.

[187] Saad Y, Schultz M. Conjugate Gradient-like Algorithms for Solving Nonsymmetric Linear Systems[J]. SIAM J., 1985, 44:417-424.

[188] Sagaut P. Large-Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[189] Sethan J A. Level Set Methods[M]. London: Cambridge University Press, 1996.

[190] Shah K B, Ferziger J H. A Fluid Mechanisms View of Wind Engineering: Large Eddy Simulation of

Flow Over a Cubical Obstacle, In R. N. Meroney, B. Bienkiewicsz[J]. Computer Wind Engineering, 1997, 2: 211-236, Elsevier, Amsterdam.

[191] Shan X. Simulation of Rayleigh-Bénard Convection Using a Lattice Boltzmann Method[J]. Phys. Rev. E, 1997, 55: 2780-2788.

[192] Shan H, Jiang L, Liu C. Direct Numerical Simulation of Flow Separation Around a NACA0023 Airfoil [J]. Computers & Fluids, 2005, 34: 1096-1114.

[193] Shih T H, Liou W W, Shabbir A, et al. A New k-ε Eddy Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows[J]. Comp. Fluids, 1995, 24: 227-238.

[194] Shu C W, Osher S. Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Schemes: I[J]. J. Comp. Phys., 1988, 77: 439-471.

[195] Shu C W, Osher S. Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Schemes: II[J]. J. Comp. Phys., 1989, 83: 32-78.

[196] Simon H. Parallel Computational Fluid Dynamics[M]. Cambridge MA: MIT Press, 1992.

[197] Smagorinsky J. General Circulation Experiments with the Primitive Equation, Part 1: The Basic Experiment[J]. Mon. Weather Rev., 1963, 91: 99-164.

[198] Soni B, Thompson D, Koomullil R, et al. GGTK: ATOllKit for Static and Dynamic Geometry-Grid Generation[C]//AIAA 2001-1164, AIAA 39th Aerospace Science Meeting. Reno, Nevada, 2001.

[199] Spaid M A A, Phelan F R. Lattice Boltzmann Methods for Modeling Microscale Flow in Fibrous Porous Media[J]. Phys. Fluids, 1997, 9: 2468-2474.

[200] Spalart P R, Jou W H, Strelets M, et al. Comments on the Feasibility of LES for Wings, and on a Hybrid RANS/LES Approach[M]//Liu C, Liu Z. Advances in DNS/LES. Columbus: Greyden Press, 1997: 137-148.

[201] Spalding D B. Mixing and Chemical Reaction in Steady Confined Turbulent Flames[C]//13th Symp. (Int.) on Comb. The Combustion Institute, 1971: 649-657.

[202] Spalding D B. Numerical Computation of Multi-Phase Fluid Flow and Heat Transfer[J]. Recent Advances in Numerical Methods in Fluid, 1980, 1: 139-167.

[203] Speziale C G. Turbulence Modeling for Time-Dependent RANS and VLES: A Review[J]. AIAA J., 1998, 36: 173-184.

[204] Squires K D, Constantinescu G S. LES and DES Investigations of Turbulent Flow Over a Sphere at $Re = 10000$[J]. Flow, Turb. & Comb., 2003, 70: 267-298.

[205] Stone H L. Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations[J]. SIAM. J. Numer. Anal., 1968, 5(3): 530-558.

[206] Strelets M. Detached Eddy Simulation of Massively Separated Flows[C]. AIAA Paper, 2001: 2001-0879.

[207] Sunderam V, Geist G, Dongarra J, et al. PVM: A Framework for Parallel Distributed Computing[J]. J. Concurrency: Prac. & Exp., 1990, 2: 315-339.

[208] Suresh A, Huynh H T. Accurate Monotonicity-Preserving Schemes with Runge-Kutta Time Stepping [J]. J. Comp. Phys., 1997, 136: 83-99.

[209] Sweby P K. High Resolution Schemes using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws[J]. SIAM J. Num. Anal., 1984, 21: 995-1011.

[210] Sweet R A. Direct Methods for the Solution of Poisson's Equation on a Staggered Grid[J]. J. Comp. Phys., 1973, 12: 422-428.

[211] Taylor C A, Draney M T. Experimental and Computational Methods in Cardiovascular Fluid Mechanics [J]. Ann. Rev. Fluids Mech., 2004, 36: 197-231.

[212] Taylor C A, Draney M T, Ku J P, et al. Predictive Medicine: Computational Techniques in Therapeutic Decision-Making[J]. Comp. Aided Surg., 1999, 4: 231-247.

[213] Tian Z F, Tu J Y, Yeoh G H. Numerical Simulation and Validation of Dilute Gas-Particle Flow over a Backward Facing Step[J]. Aerosol Sci. & Tech., 2005, 39: 319-332.

[214] Tian Z F, Tu J Y, Yeoh G H. On the Numerical Study of Contaniminat Particle Concentration in Indoor Airflow[J]. Build. & Env., 2006, 41: 1504-1514.

[215] Temmerman L, Hadziabdic M, Leschziner M A, et al. A Hybrid Two-Layer URANS-LES Approach for Large Eddy Simulation at High Reynolds Numbers[J]. Int. J. Num. Meth. Fluids, 2005, 26: 173-190.

[216] Tennekes H, Lumley J L. A First Course in Turbulence[M]. Cambridge, MA: MIT Press, 1976.

[217] Tezduyar T E. Finite Element Methods for Flow Problems with Moving Boundaries and Interfaces[J]. Arch. Comp. Meth. Eng., 2001, 8: 83-130.

[218] Thomas J L, Diskin B, Brandt A. Textbook Multigrid Efficiency for Fluid Simulations[J]. Ann. Rev. Fluid Mech., 2003, 35: 317-340.

[219] Thompson J F, Warsi Z U A, Mastin C W. Numerical Grid Generation: Foundations and Applications [M]. New York: Elsevier, 1985.

[220] Thompson J F, Soni B K, Weatherhill N P. Handbook of Grid Generation[M]. Florida: CRC Press, 1999.

[221] Timmermann G. A Cascadic Multigrid Algorithm for Semilinear Elliptic Problems[J]. Numerische Mathematik, 2000, 86: 717-731.

[222] Toro E F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[223] Tu J Y, Fuchs L. Overlapping Grids and Multigrid Methods for Three-Dimensional Unsteady Flow Calculations in IC Engines[J]. Int. J. Numer. Methods Fluids, 1992, 15: 693-714.

[224] Tu J Y, Fletcher C A J. Numerical Computation of Turbulent Gas-Solid Particle Flow in a 90° Bend [J]. AIChE Journal, 1995, 41: 2187-2197.

[225] Tu J Y. Computational of Turbulent Two-Phase Flow on Overlapped Grids[J]. Num. Heat. Transfer, Part B, Fund., 1997, 32: 175-195.

[226] Tu J Y, Abu-Hijleh B, Xue C, et al. CFD Simulation of Air/Particle Flow in the Human Nasal Cavity [C]// Proc. 5th Int. Conf. Multiphase Flow. Yokohama, Japan, 2004a.

[227] Tu J Y, Yeoh G H, Morsi Y S, et al. A Study of Particle Rebounding Characteristics of Gas-Particle Flow over Curved Surface[J]. Aerosol Sci. & Tech., 2004b, 38: 739-755.

[228] Turkel E. Preconditioning Techniques in Computational Fluid Dynamics[J]. Ann. Rev. Fluid Mech., 1999,31.
[229] Tucker P G, Davidson L. Zonal *k-l* Based Large Eddy Simulation[J]. Comp. Fluids,2004,33:267-287.
[230] Tucker P. Differntial Equation Based Length Scales to Improve DES and RANS Simulations[C]. AIAA Paper,2003:3968.
[231] Unverdi S, Tryggvason G. A Front-Tracking Method for Viscous, Incompressible, Multifuild Flows [J]. J. Comp. Phys.,1992, 100:25-42.
[232] Valino L. A Field Monte-Carlo Formulation for Calculating the Probability Density Function of a Single Scalar in a Turbulent Flow[J]. Flow, Turb. Comb.,1998,60:151-172.
[233] Van Doormal J P, Raithby G D. Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows[J]. Numer. Heat Transfer,1984,7:147-163.
[234] Van Doormal J P, Raithby G D. An Evaluation of the Segregated Approach for Predicting Incompressible Fluid Flows[C]//ASME Paper 85-HT-9, National Heat Transfer Conference. Denver, Colorado, 1985.
[235] Van Drient E R. Investigation of Laminar Boundary Layer in Compressible Fluids Using the Crocco Method[J]. NACA Tech. Note ,1952:2597.
[236] Van Driest E R. On Turbulent Flow Near a Wall[J]. J. Aero. Sci.,1956,23:1007-1011.
[237] Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. Ⅱ: Monotonicity and Conservation Combined in a Second-Order Scheme[J]. J. Comp. Phys.,1974,14:361-370.
[238] Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. Ⅲ: Upstream-Centered Finite Difference Schemes for Ideal Compressible Flow[J]. J. Comp. Phys.,1977a,23:263-275.
[239] Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. Ⅳ: A Second Order Sequel to Godunov's Method[J]. J. Comp. Phys.,1977b,23:276-299.
[240] Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. Ⅴ: A New Approach to Numerical Convection[J]. J. Comp. Phys.,1979,32:101-136.
[241] Vino G, Watkins S, Mousley P, et al. The Unsteady Near-Wake of a Simplified Passenger Car[C]// 15th Australasian Fluid Mech. Conf. Sydney, Australia,2004.
[242] Wang M, Moin P. Dynamic Wall Modeling for Large-Eddy Simulation of Complex Turbulent Flows [J]. Phys. Fluids, 2002,14:2043-2051.
[243] Wang Y Q, Jackson P, Phaneu T J, et al. Turbulent Flow Through a Staggered Tube Bank[J]. J. Thermophysics & Heat Transfer,2006,20:738-747.
[244] Watkins S, Vino G. On Vehicle Spacing and its Effect on Drag and Lift[C]//Proceedings, 5th Int. Colloquium Bluff Body Aero. Appl. (BBAA5). Ottawa, Canada,2004.
[245] Wesseling P. Introduction to Multi-Grid Methods[C]. CR-195045 ICASE 95-11, NASA,1995.
[246] Wilcox D C. Turbulence Modelling for CFD[M]. DCW Industries, Inc.,1998.
[247] Wilson N M. Geometric Algorithms and Software Architecture for Computational Prototyping: Applications in Vascular Surgery and MEMS[D]. Stanford:Stanford University, 2002.

[248] Witry A, Al-Hajeri M H, Bondok A A. Thermal Performance of Automotive Aluminium Plate Radiator [J]. Appl. Thermal Eng., 2005,25:1207-1218.

[249] Wolfshtein M W. The Velocity and Temperature Distribution in a One-Dimensional Flow with Turbulence Augmentation and Pressure Gradient[J]. Int. J. Heat Mass Transfer,1969,12:301-312.

[250] Yakhot V, Prszag S A, Tangham S, et al. Development of Turbulence Models for Shear Flows by a Double Expansion Technique[J]. Phys Fluids A: Fluid Dynamics,1992,4:1510-1520.

[251] Yakhot V, Orszag S A. Renormalization Group Analysis of Turbulence Ⅰ: Basic Theory[J]. J. Sci. Comp.,1986,1:1-15.

[252] Yanenko N N. The Method of Fractional Steps[M]. Berlin: Springer-Verlag,1971.

[253] Yang Z L, Dinh T N, Nourgaliev R R, et al. Numerical Investigation of Bubble Coalescence Characteristics Under Nucleate Boiling Condition by a Lattice Boltzmann Model[J]. Int. J. Therm. Sci.,2000, 389:1-17.

[254] Yeoh G H, Behnia M, de Vahl Davis G, et al. A Numerical Study of Three-dimensional Natural Convection during Freezing of Water[J]. Int. J. Num. Meth. Eng.,1990,30:899-914.

[255] Yeoh G H, Lee E W M, Yuen R K K, et al. Fire and Smoke Distribution in a Two-Room Compartment Structure[J]. Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow, 2002,12:178-194.

[256] Yeoh G H, Tu J Y. Thermal-Hydrodynamics Modelling of Bubbly Flows with Heat and Mass Transfer [J]. AIChE J., 2005,51:8-27.

[257] Yeoh G H, Tu J Y. Numerical Modelling of Gas-Liquid With and Without Heat and Mass Transfer[J]. Appl. Math. Modelling, 2006a,30:1067-1095.

[258] Yeoh G H, Tu J Y. Two-Fluid and Population Balance Models for Subcooled Boiling Flow[J]. Appl. Math. Modelling,2006b, 30:1370-139.

[259] Yu G, Xhang Z., Lessmann R. Fluid Flow and Particle Diffusion in the Human Upper Respiratory System[J]. Aerosol Sci. Tech., 1998,28:146-158.

[260] Yun G, Kim D, Choi H. Vortical Structures Behind a Sphere at Subcritical Reynolds Numbers[J]. Phys. Fluid,2006,18:015102:1-14.

[261] Zang Y, Street R L, Koseff J R. A Dynamic Mixed Subgrid-Scale Model and its Application to Turbulent Recirculating Flows[J]. Phys. Fluids A, 1993,5:3186-3196.

[262] Zukauskas A, Ulinskas R. Heat Transfer in Tube Banks in Crossflow[M]. Washington: Hemisphere, 1988.

[263] Zukoski E E, Cetegen B M, T Kubota T. Visible Structures of Buoyant Diffusion Flames[C]//20th Symp. (Int.) on Comb. Comb. Inst.,1984:361-366.

[264] Zwartz G J, Guilmette R A. Effect of Flow Rate on Particle Deposition in a Replica of a Human Nasal Airway[J]. Inhalation Toxicology,2001,13:109-127.

建议进一步阅读的书籍

[1] Anderson J D. Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications[M]. New York: McGraw-Hill, 1995.

[2] çengel Y A. Heat Transfer: A Practical Approach[M]. New York: McGraw-Hill, 2003.

[3] çengel Y A, Turner R. Fundamentals of Thermal-Fluid Science[M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 2005.

[4] Chung T J. Computational Fluid Dynamics[M]. London: Cambridge University Press, 2002.

[5] Crowe T C, Elger D F, Roberson J A. Engineering Fluid Mechanics[M]. 8th ed. New York: Wiley, 2005.

[6] Drikakis D, Rider W. High-Resolution Methods for Incompressible and Low-Speed Flows[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

[7] Ferziger J H, Perić M. Computational Methods for Fluid Dynamics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

[8] Fletcher C A J. Computational Techniques for Fluid Dynamics[M]. Berlin: Springer-Verlag(Volumes Ⅰ, Ⅱ), 1991.

[9] Incropera F P, De Witt D. Fundamentals of Heat and Mass Transfer[M]. 6th ed. New York: Wiley, 2005.

[10] Patankar S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow[M]. New York: Hemisphere Publishing Corporation, Taylor & Francis Group, 1980.

[11] Roach P J. Fundamental of Computational Fluid Dynamics[M]. Albuquerque: Hermosa Publishers, 1998.

[12] Versteeg H K, Malalasekera W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method[M]. London: Prentice Hall, Pearson Education Ltd., 1995.